

含自时延和通信时延的Euler-Lagrange系统自适应一致性算法

刘源[†], 王仕成, 闵海波, 刘志国, 廖守亿

(第二炮兵工程大学 301 教研室, 陕西 西安 710025)

摘要: 针对动力学方程中含未知参数的多Euler-Lagrange系统的一致性控制问题, 设计了一种分布式自适应协调控制器. 该控制器容许多Euler-Lagrange系统的通信拓扑为一般的有向图, 并允许通信时延和自时延的同时存在. 利用Barblata定理、Lyapunov稳定性定理和LMI方法等对控制器的稳定性进行了证明, 并设计了数值仿真实验, 仿真结果证明了控制算法的有效性.

关键词: 自适应算法; 一致性; 自时延和通信时延; 未知参数

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Distributed adaptive consensus algorithm of Euler-Lagrange system with input and communication delays

LIU Yuan[†], WANG Shi-cheng, MIN Hai-bo, LIU Zhi-guo, LIAO Shou-yi

(Department 301, the Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: This paper deals with the consensus problem of networked Euler-Lagrange systems with unknown parameters. An adaptive controller is proposed which allows for the existence of input and communication delays under the directed communication topology. Barbalat's Lemma, Lyapunov stability theorem and LMI methods are used to prove the stability of the proposed controller. Numerical simulation is also presented to demonstrate the effectiveness of the controller.

Key words: adaptive algorithm; consensus; input and communication delays; uncertain parameters

1 引言(Introduction)

自20世纪80年代以来, 受生物学、人类社会学研究的启发, 多智能体系统(multi-agent system, MAS)的协同与合作机制成为众多领域的研究热点. 类似于鱼群捕食、鸟群迁徙等生物群体性优势, 多智能体间的协作可大大提高个体行为的智能化程度, 展现出了优异的性能和巨大的发展潜力. 在控制领域, 融合“计算、通信与控制”的多智能体协调控制具有高效率、高灵活性、高容错性和内在的并行性等优点, 代表了未来控制技术的发展趋势, 迅速成为世界范围内研究的焦点^[1-2].

多Euler-Lagrange(EL)系统协调控制的研究是多智能体协调控制研究领域的重要分支. EL方程主要用于刻画机器人、机械臂、空间飞行器等大量机械系统及一些电力系统的动力学特性. 未来空间站多机械臂协调装配、在轨遥操作、航天器协调高精度干涉测量与合成孔径成像、地面轮式机器人编队等都属于多EL系统协调任务范畴^[3-8]. 这些系统不仅可广泛应用于空间探索、卫星保障、气象预警、灾难

救援等民用领域, 而且还可应用于侦查监视、空间对抗、航天器协同攻击等军事领域, 并极大提升单一武器平台的作战效能, 具有广阔的应用前景.

到目前为止, 众多学者对EL系统协调控制进行了大量的研究, 取得了一些研究成果(如文献[3-17]等, 这里不一一列举). 文献[11]针对无领航者(leaderless)的编队系统设计了协调控制器, 运用Lyapunov定理和Matrosov定理等证明了控制器的稳定性. 文献[15]设计了滑模控制算法, 实现了多EL系统的有限时间一致性. 文献[14]针对含有多领航者的编队EL系统设计了有限时间控制器, 并分别考虑了领航者为静态和动态时的情形. 文献[16]针对含未知参数的EL系统, 设计了分布式自适应控制器, 控制器中允许通信时延的存在, 但是并没有考虑自时延对系统稳定性的影响. 文献[13]基于无源性理论, 对含有通信时延的情形进行了研究, 得到了自适应协调控制器, 并对切换通信网络的情况进行了研究. 文献[17]基于滑模控制思想, 设计了自适应协调控制器, 并证明了控制器的收敛性. 其要求通信网络为一般

的伪强连通图,但是文中并没有对含有通信时延的情形进行研究.还有一些文献对EL系统协调控制进行了研究,这里不一一列举.尽管多智能体协调控制在最近几年获得了很大的发展,但针对复杂网络环境下具有本质非线性的多EL系统协调控制的研究尚处于起步阶段,还有很多问题需要解决,特别是针对现有网络环境下多EL系统协调控制的研究尚未充分考虑复杂的网络特性,如含未知参数、信息丢包、时延及网络拓扑的切换等.

在实际的多智能体系统中,由于各个体间需要不断地进行信息传递和交换,所以时延往往是不可避免的.对于网络化分布式协调控制,个体的控制信号中包含自身的状态信息和邻近个体的状态信息,所以研究时延的影响具有尤为重要的意义^[18].MAS协调控制中,时延包括自时延和通信时延.自时延是指个体得到自身状态所需要的时间;通信时延是指个体得到相邻个体状态所需要的时间延迟.对于线性一阶和二阶系统的MAS协调控制,已有很多文献对通信时延和自时延进行了研究(如文献[18-23]),但是对于含未知参数的非线性EL系统协调控制,目前还没有见到文献对同时含有自时延和通信时延的情况进行研究.

本文针对自时延和通讯时延同时存在的网络通信环境,并考虑动力模型含未知参数的情形,研究了分布式多EL系统的一致性问题.提出了一种自适应协调控制律,该控制器只要求通信图为最一般的有向图.运用Lyapunov稳定性定理、Barbalat定理和LMI方法等,从理论上证明了自适应控制器的稳定性,并设计了数值仿真实验验证了控制器的有效性.

2 问题描述(Problem formulation)

2.1 Euler-Lagrange 系统方程(Euler-Lagrange system equation)

假设编队EL系统中有 n 个个体,第 i ($i \in \mathcal{I}, \mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$)个个体的运动方程为

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i(t), \quad (1)$$

其中: $q_i \in \mathbb{R}^p$ 为系统的状态, $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为对称的惯性矩阵, $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为科里奥利力与向心力矩阵, $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^p$ 为重力约束矩阵,施加在系统上的 p 维广义力或力矩($\tau_i(t) \in \mathbb{R}^p$). $\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 为反对称矩阵.典型的EL系统具有以下4个性质^[24]:

性质1 惯性矩阵 $M_i(q_i)$ 有界,即

$$0 < \lambda_m\{M_i(q_i)\}I \leq M_i(q_i) \leq \lambda_M\{M_i(q_i)\}I < \infty.$$

性质2 矩阵 $\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 为反对称矩阵,即,对于给定向量 $r \in \mathbb{R}^n$,有

$$r^T[\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)]r = 0.$$

性质3

$$\forall q_i \in \mathbb{R}^n, \exists k_{c_i} \in \mathbb{R}_{>0} : |C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i| \leq k_{c_i}|\dot{q}_i|^2.$$

性质4 方程(1)可线性化为

$$M(q_i)\ddot{q}_i + C(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = Y(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)\theta_i,$$

其中: $Y_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times r}$ 是包含广义坐标及其高阶导数的已知函数矩阵, $\theta_i \in \mathbb{R}^r$ 为含物理参数的一个 r 维常向量(比如机械臂的铰链质量、瞬时惯性等).

2.2 代数图论(Graph theory)

用图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 来表示多EL系统中 n 个个体的信息交换.图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 由顶点集 $\mathcal{V} = \{v_i\}, i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$,边集 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 和邻接矩阵 $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ 组成.每条边都可由两个不同的顶点(v_i, v_j)所确定,其中: v_i 称为头(head), v_j 称为尾(tail).若(v_i, v_j) $\in \mathcal{E} \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$,则称图为无向的或对称的;反之,称该图为有向的.对于有向图,若(v_i, v_j) $\in \mathcal{E}$,则 i 为 j 的邻接个体,以 v_i 作为头的边的数目称为节点 v_i 的出度,以 v_i 作为尾的边的数目称为节点 v_i 的入度,加权图的邻接矩阵 $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ 为一个 $n \times n$ 矩阵,其中: $a_{ii} = 0$,当 $i \neq j$ 且 $a_{ij} \in \mathcal{E}$ 时, $a_{ij} = 1$.有向图中的有向路径是指边集(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots 的序列^[25].

文中需要用到以下一些引理:

引理1(Schur补) 对于分块矩阵

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0$$

成立的充分必要条件是下面两个条件之一成立:

$$1) S_{11} < 0, \text{ 且 } S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0.$$

$$2) S_{22} < 0, \text{ 且 } S_{11} - S_{12}^T S_{22}^{-1} S_{12} < 0.$$

引理2 假设 $e(t) = h(t) * r(t)$, $*$ 为卷积, $h(t) = L^{-1}(H(s))$,其中 $H(s)$ 为 $n \times n$ 维指数稳定传递函数.如果 $r \in L_2^n$ 则 $e \in L_2^n \cap L_\infty^n, \dot{e} \in L_2^n$, e 连续且当 $t \rightarrow \infty$ 时 $|e(t)| \rightarrow 0$.另外,如果当 $t \rightarrow \infty$ 时, $|r(t)| \rightarrow 0$,则 $|\dot{e}(t)| \rightarrow 0$ ^[26].

引理3 对于任何 $a, b \in \mathbb{R}^n$,任意正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$,有^[27]

$$-2a^T b \leq a^T R^{-1} a + b^T R b. \quad (2)$$

2.3 控制目标(Control objective)

本文探讨在含有自时延和通信时延的情况下,多EL系统的一致性控制.控制目标如下:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} |q_i(t) - q_j(t)| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{q}_i(t)| \rightarrow 0, \forall i, j \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\|x\|$ 表示向量或者矩阵 x 的标准Euclidean范数.对于任意函数, $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{L}_∞ -范数定义为 $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$, \mathcal{L}_2 -范数定义为 $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt}$.同

时, \mathcal{L}_∞ 空间和 \mathcal{L}_2 空间分别定义为集合 $\{\mathbf{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n : \|\mathbf{f}\|_\infty < \infty\}$ 和 $\{\mathbf{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n : \|\mathbf{f}\|_2 < \infty\}$. 假设个体之间在通信时, 存在自时延和通信时延, 本文设相邻个体间状态差 $\mathbf{e}_{ij}(t)$ 为

$$\mathbf{e}_{ij}(t) = \mathbf{q}_i(t - t_{ii}) - \mathbf{q}_j(t - t_{ij}), \forall i \in \mathcal{I}, \quad (4)$$

其中: t_{ii} 为第 i 个个体得到自身姿态信息所需的时间, 即自时延, t_{ij} 为个体 i 和 j 之间的通信时延, 假设时延 t_{ii} 和 t_{ij} 为定值, 分别为 t_1 和 t_2 .

3 自适应控制器设计(Adaptive controller design)

假设式(1)中含有不确定参数, 即 $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ 和 $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$ 项不能准确地获得而只能得到其估计值分别为 $\hat{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i)$, $\hat{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ 和 $\hat{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i)$. 为了实现一致性控制, 本文对第 i 个个体设计自制律如下:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{1}{d_i} \hat{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{\mathbf{e}}_{ij} + \frac{1}{d_i} \hat{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_{ij} + \hat{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i) + K_i \boldsymbol{\varsigma}_i, \quad (5)$$

其中: $K_i > 0$, d_i 为第 i 个个体的入度, 即 $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, 这里本文假设每个个体至少有一个邻接个体, 即 $d_i > 0$. 根据EL系统的性质4可知, 下面的等式成立:

$$\mathbf{Y}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \hat{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{\mathbf{e}}_{ij} + \hat{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_{ij} + d_i \hat{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i), \quad (6)$$

其中: \mathbf{Y}_i 为已知的广义坐标函数, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ 是惯性参数 $\boldsymbol{\theta}_i$ 的时变估计. 所以控制律(6)可以写为 $\boldsymbol{\tau}_i = \frac{1}{d_i} \mathbf{Y}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + K_i \boldsymbol{\varsigma}_i$, 将 $\boldsymbol{\varsigma}_i$ 定义为

$$\boldsymbol{\varsigma}_i = -\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{d_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_{ij}, \quad (7)$$

则系统动力学方程(1)可写为

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\boldsymbol{\varsigma}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \boldsymbol{\varsigma}_i = \frac{1}{d_i} \mathbf{Y}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - K_i \boldsymbol{\varsigma}_i. \quad (8)$$

该式中, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(t) = \boldsymbol{\theta}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(t)$ 为参数的估计误差, 其动态方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i = \boldsymbol{\Gamma}_i \mathbf{Y}_i^T \boldsymbol{\varsigma}_i, \quad (9)$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}_i$ 为已知的正定矩阵.

在给出定理之前, 本文重新定义通信图的邻接矩阵 $\hat{\mathbf{A}} = [\hat{a}_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其中 $\hat{a}_{ij} = a_{ij} / \sum_{j=1}^n a_{ij}$, $i, j \in \mathcal{I}$. 并定义 $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{A}}$, 将式(7)写成矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{q}(t - t_1) + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{q}(t - t_2) + \boldsymbol{\varsigma}. \quad (10)$$

由文献[25]可知, 当通信图 \mathcal{G} 含有一个有向衍生树时, $\hat{\mathbf{L}}$ 有一个零特征值, 对应的特征向量为 $\mathbf{1}_n$, 并且其他特征值都在右半复平面. 因此可以找到可逆矩阵 W , 使下式成立:

$$W^{-1} \hat{\mathbf{L}} W = \begin{bmatrix} L & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

这里矩阵 W 的最后一列为向量 $\mathbf{1}_n$, 注意到, 式(11)中 L 为 $n-1$ 阶矩阵, 其特征值都为正数. 本文设 $\mathbf{z} = W^{-1} \mathbf{q}$, 在这里用向量 $\mathbf{x}(t)$ 表示 \mathbf{z} 的前 $n-1$ 行, 用 $x_2(t)$ 表示 \mathbf{z} 的第 n 行, 则式(10)可化为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t - t_1) \\ x_2(t - t_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t - t_2) \\ x_2(t - t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varsigma}_{n-1} \\ \varsigma_n \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $A = I_{n-1} - L$, 方程(12)可分解为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{x}(t - t_1) + A\mathbf{x}(t - t_2) + \boldsymbol{\varsigma}_{n-1}, \quad (13)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t - t_1) + x_2(t - t_2) + \varsigma_n. \quad (14)$$

定理 1 考虑系统(1), 假定有向通信图包含一个衍生树并且各个体至少有一个邻接个体, 存在 \bar{t}_1 和 \bar{t}_2 使得以下条件满足:

$$1) \bar{t}_1 + \bar{t}_2 < 1;$$

2) 如果存在 $0 < P_1 = P_1^T, P_2, P_3$ 和 $R_1 = R_1^T, R_2 = R_2^T$ 使得下面不等式(LMI)成立:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & -\bar{t}_1 P_2^T & \bar{t}_2 P_2^T A \\ X_{21} & X_{22} & -\bar{t}_1 P_3^T & \bar{t}_2 P_3^T A \\ -\bar{t}_1 P_2 & -\bar{t}_1 P_3 & -\bar{t}_1 R_1 & 0 \\ \bar{t}_2 A^T P_2 & \bar{t}_2 A^T P_3 & 0 & -\bar{t}_2 R_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

其中:

$$X_{11} = -L^T P_2 - P_2^T L,$$

$$X_{12} = P_1 - P_2^T - L^T P_3,$$

$$X_{21} = P_1 - P_2 - P_3^T L,$$

$$X_{22} = -P_3 - P_3^T + \bar{t}_1 R_1 + \bar{t}_2 R_2.$$

如果以上条件满足, 自时延 $t_1 \in [0, \bar{t}_1]$, 通信时延 $t_2 \in [0, \bar{t}_2]$ 利用控制器(5), 则多EL系统可实现式(3)意义下的一致性.

证 本文将证明过程分为两部分: 第一, 证明系统(13)渐进稳定, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}_{n-1}$; 第二, 证明系统(14)收敛于一个平衡点, 有前面分析可知 $\mathbf{q} = W\mathbf{z}$, 其中 W 最后一列所有元素相等. 所以, 若以上两部分得到证明, 则定理得证.

构造以下Lyapunov函数:

$$V_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varsigma}_i^T \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\varsigma}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{\Gamma}_i^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i}{d_i}, \quad (16)$$

对其求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(\boldsymbol{\varsigma}_i, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i, \mathbf{e}_{ij}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varsigma}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\varsigma}_i + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varsigma}_i^T \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\boldsymbol{\varsigma}}_i + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{\Gamma}_i^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i}{d_i} = - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varsigma}_i^T K_i \boldsymbol{\varsigma}_i. \end{aligned}$$

这里用到了 EL 系统的性质 2, 即

$$\sum_{j=1}^n \zeta_i^T [\dot{M}(q_i) - 2C(q_i, \dot{q}_i)] \zeta_i = 0.$$

由于 $V_0 \geq 0, \dot{V}_0 \leq 0$, 则对于 $\forall i \in \mathcal{I}$, 有 $\zeta_i(t) \in \mathcal{L}_2$ 和 $\zeta_i(t), \tilde{\theta}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$, 于是由式 (7) 易知 $\dot{q}_i \in \mathcal{L}_\infty$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} e_{ij} \in \mathcal{L}_\infty$. 由式 (6) 可知, Y_i 是否有界取决于 $\hat{M}_i, \sum_{j=1}^n a_{ij} e_{ij}, \hat{C}_i, \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{e}_{ij}$ 和 $\hat{\theta}_i$. 由 EL 系统的性质 1 和性质 3 知, \hat{M}_i 和 \hat{C}_i 有界, 又有 $\tilde{\theta}, \sum_{j=1}^n a_{ij} e_{ij}, \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{e}_{ij}$ 的有界性, 可得 Y_i 是有界的. 根据式 (8) 可以得到 $\dot{\zeta}_i \in \mathcal{L}_\infty$, 又有 $\zeta_i(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$, 所以, 由 Barbalat 定理可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $|\zeta_i(t)| \rightarrow 0$.

接下来本文首先考虑系统

$$\dot{x}(t) = -x(t - t_1) + Ax(t - t_2) \quad (17)$$

的稳定性, 方程 (17) 可以转化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ y(t) = -x(t - t_1) + Ax(t - t_2) = \\ (A - I)x(t) + \int_{t-t_1}^t y(s)ds - A \int_{t-t_2}^t y(s)ds. \end{cases} \quad (18)$$

选取 Lyapunov-Krasovskii 函数如下:

$$V(t) = V_1 + V_2 + V_3, \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} V_1 &= \zeta^T EP\zeta, \\ V_2 &= \int_{-t_1}^0 \int_{t+\theta}^t y^T(s)R_1 y(s)dsd\theta, \\ V_3 &= \int_{-t_2}^0 \int_{t+\theta}^t y^T(s)R_2 y(s)dsd\theta, \\ \zeta &= \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

分别对 V_1, V_2, V_3 求导

$$\dot{V}_1 = 2\zeta^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = 2\zeta^T P^T \begin{bmatrix} y(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由式 (18) 可知, $(A - I)x(t) + \int_{t-t_1}^t y(s)ds - A \int_{t-t_2}^t y(s)ds - y(t) = 0$, 将其代入式 (3) 得

$$\dot{V}_1 = 2\zeta^T P^T \begin{bmatrix} y(t) \\ (-I + A)x(t) - y(t) \end{bmatrix} + \eta(t),$$

其中

$$\eta(t) = -2 \int_{t-t_1}^t \zeta^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y(s)ds -$$

$$2 \int_{t-t_2}^t \zeta^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} y(s)ds.$$

由引理 3 可得

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leq t_1 \zeta^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} R_1^{-1} [0 \ -I] P \zeta + \\ &t_2 \zeta^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} R_2^{-1} [0 \ A^T] P \zeta + \\ &\int_{t-t_1}^t y(s)R_1 y(s)ds + \int_{t-t_2}^t y(s)R_2 y(s)ds. \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= - \int_{t-t_1}^t y(s)R_1 y(s)ds + t_1 y^T(t)R_1 y(t), \\ \dot{V}_3 &= - \int_{t-t_2}^t y(s)R_2 y(s)ds + t_2 y^T(t)R_2 y(t), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) \leq \\ &2\zeta^T P^T \begin{bmatrix} y(t) \\ (-I + A)x(t) - y(t) \end{bmatrix} + \\ &t_1 \zeta^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} R_1^{-1} [0 \ -I] P \zeta + \\ &t_2 \zeta^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} R_2^{-1} [0 \ A^T] P \zeta + \\ &t_1 y^T(t)R_1 y(t) + t_2 y^T(t)R_2 y(t) = \\ &\zeta^T (P^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -L^T \\ I & -I \end{bmatrix} P + \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_1 R_1 + t_2 R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t_1 P_2^T & t_2 P_2^T A \\ -t_1 P_3^T & t_2 P_3^T A \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} t_1 R_1 & 0 \\ 0 & t_2 R_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -P_2 & -P_3 \\ A^T P_2 & A^T P_3 \end{bmatrix}) \zeta. \end{aligned}$$

由引理 1 (Schur 补) 可知, 若不等式 (15) 成立, 则有 $\dot{V}(t) < 0$, 则系统 (17) 渐进稳定. 又由 $\zeta_i(t) \in \mathcal{L}_2$ 且 $|\zeta_i(t)| \rightarrow 0$, 所以根据文献 [28] 中定理 2.15 可知, 系统 (13) 也是渐进稳定的, 即 $x(t)$ 收敛于 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0}_{n-1}$.

下面证明系统 (14) 收敛于一个平衡点, 由于 $\zeta(t) \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$, 所以 ζ_n 的拉普拉斯变换存在, 记为 $\zeta_n(s)$, 由方程 (14) 可得

$$x_2(s) = \frac{\zeta_n(s)}{s + e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s}}. \quad (20)$$

所以, 其稳定性取决于方程

$$s + e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s} = 0$$

的根的分布. 系统类似于文献 [23], 可以得到, 当 $t_1 + t_2 < 1$ 时, 系统 (14) 稳定, 并且 $x_2(t)$ 收敛于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \frac{x_2(0) + \zeta_n(0)}{1 + t_2 - t_1}. \quad (21)$$

即系统(23)收敛于一个由初值决定的平衡点, 并且有已经证明的 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \mathbf{0}_{n-1}$, 于是可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)\| = 0$. 由式(7)知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{\mathbf{q}}_i(t)\| \rightarrow 0$, 定理得证. 证毕.

注1 这里本文借鉴了线性一阶系统多智能体系统一致性控制中对于时延的处理思想(见文献[23]), 得到了含自时延和通信时延的分布式多EL系统自适应一致性算法. 和文献[3]相比, 本文得到了进一步的结果, 在多个体通信中, 不仅允许有通信时延, 而且还考虑了自时延的存在. 文献[16]研究了leader-following构架下含未知参数的EL系统协调控制, 文中运用频域分析方法得到了含通信时延的协调控制算法. 本文中, 运用时域和频域相结合的方法, 并考虑了通信时延和自时延同时存在的情况. 注意到, 若引入文献[29]所提出的virtual leader概念, 同样采用本文的思路, 可以得到主从式(leader-following)编队的协调控制算法, 这里不一一赘述.

注2 在以上的讨论中, 笔者假设系统不存在外部干扰, 接下来本文对分布式执行器含有外部干扰的情况进行讨论. 假设存在外部干扰 $\boldsymbol{\rho}_i (\boldsymbol{\rho}_i \in \mathbb{R}^p)$. 这里把外部干扰分为常值干扰和时变干扰两种情况, 当外部干扰为常值时, 重新定义 $\tilde{\mathbf{Y}}_i$ 如下:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i &= \hat{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{e}_{ij} + \hat{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} e_{ij} + \\ & d_i \hat{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i) - d_i \boldsymbol{\rho}_i, \end{aligned} \quad (22)$$

则类似于定理1控制器 $\boldsymbol{\tau}_i = \frac{1}{d_i} \tilde{\mathbf{Y}}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + K_i \boldsymbol{\varsigma}_i$, 可实现多EL系统的协调控制, 其中 $\boldsymbol{\varsigma}_i$ 为式(7)所定义.

当外部干扰为时变时, 采用类似于滑模控制的处理思想, 假设 $\boldsymbol{\rho}_i(t)$ 有界, 即 $\boldsymbol{\rho}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$. 设计控制如下:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{1}{d_i} \mathbf{Y}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + K_i \boldsymbol{\varsigma}_i + l_i \text{sgn } \boldsymbol{\varsigma}_i, \quad (23)$$

其中: $l_i \in \mathbb{R}_+^p$, $\text{sgn } \boldsymbol{\varsigma}_i = (\text{sgn } \boldsymbol{\varsigma}_i^1, \dots, \text{sgn } \boldsymbol{\varsigma}_i^p)^T$, $\boldsymbol{\varsigma}_i$ 和 \mathbf{Y}_i 如式(7)和式(6)所定义. 此时, 闭环系统(1)可写为

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\boldsymbol{\varsigma}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \boldsymbol{\varsigma}_i = \frac{1}{d_i} \mathbf{Y}_i \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i - K_i \boldsymbol{\varsigma}_i - l_i \text{sgn } \boldsymbol{\varsigma}_i - \boldsymbol{\rho}_i. \quad (24)$$

选择Lyapunov函数如式(16), 对其关于式(24)求导可得

$$\dot{V}_0(\boldsymbol{\varsigma}_i, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i) = - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varsigma}_i^T K_i \boldsymbol{\varsigma}_i - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varsigma}_i^T (l_i \text{sgn } \boldsymbol{\varsigma}_i + \boldsymbol{\rho}_i).$$

类似于文献[4], 假设外界干扰满足 $|\rho_i^m| \leq \Upsilon_i^m$, $m = 1, \dots, p$, 其中 ρ_i^m 代表向量 $\boldsymbol{\rho}_i$ 的第 m 个元素, 设 $l_i^m = \Upsilon_i^m + \eta_i^m$, $m = 1, \dots, p$, 其中 $\eta_i^m \in \mathbb{R}^+$, 于是有

$$\dot{V}_0(\boldsymbol{\varsigma}_i, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i) = - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varsigma}_i^T K_i \boldsymbol{\varsigma}_i - \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\eta}_i^T |\boldsymbol{\varsigma}_i| \leq 0.$$

类似于定理1的证明过程, 笔者也可以证明控制器(23)的稳定性, 这里不再赘述.

4 数值仿真(Numerical simulation)

基于Mathmatica软件, 笔者设计了数值仿真实验用来验证文中控制器的有效性. 假设多EL系统中由5个个体组成. 其通信拓扑如图1所示, 为简单起见, 假设各个体都有相同的运动方程

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & c \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

其中:

$$M_{11} = a_1 + 2a_3 \cos q_2 + 2a_4 \sin q_2,$$

$$M_{12} = M_{21} = a_2 + a_3 \cos q_2 + a_4 \sin q_2,$$

$$M_{22} = a_2,$$

$$h = a_3 \sin q_2 - a_4 \cos q_2,$$

$$c = -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2),$$

$$a_1 = I_1 + m_l l_{c1}^2 + I_e + m_e l_{ce}^2 + m_e l_1^2,$$

$$a_2 = I_e + m_e l_{ce}^2,$$

$$a_3 = m_e l_1 l_{ce} \cos \delta_e,$$

$$a_4 = m_e l_1 l_{ce} \sin \delta_e.$$

仿真参数取 $m_1 = 1.2$, $l_1 = 1.2$, $m_e = 2.5$, $\delta_e = 30^\circ$, $I_1 = 0.15$, $l_{c1} = 0.5$, $I_e = 0.25$, $l_{ce} = 0.6$. 通信拓扑如图1所示.

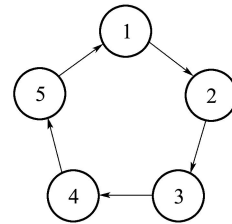


图1 通信拓扑

Fig. 1 Communication and sensing graph

假设 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T = \frac{1}{\sum_{j=1}^n a_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(\mathcal{G})} e_{ij}$. 根据

系统的线性化性质, 取 $\boldsymbol{\theta} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$, 假设这些参数不能准确获得, 仿真时都设为其真实值的20%到80%之间. 则相应的 $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = [y_{ij}] \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ 为

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & \dot{\varepsilon}_2 & y_{13} & y_{14} \\ 0 & \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 & y_{23} & y_{24} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中:

$$y_{13} = (2\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2) \cos q_2 - (\varepsilon_1 \dot{q}_2 + \varepsilon_2 \dot{q}_1 + \varepsilon_2 \dot{q}_2) \sin q_2,$$

$$y_{14} = (2\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2) \sin q_2 + (\varepsilon_1 \dot{q}_2 + \varepsilon_2 \dot{q}_1 + \varepsilon_2 \dot{q}_2) \cos q_2,$$

$$y_{23} = \dot{\varepsilon}_1 \cos q_2 + \varepsilon_1 \dot{q}_1 \sin q_2,$$

$$y_{24} = -\varepsilon_1 \dot{q}_1 \cos q_2 + \dot{\varepsilon}_1 \sin q_2.$$

设自时延 $t_1 = 0.2$ s, 通信时延为 $t_2 = 0.5$ s, 仿真结果如图2-4所示. 图中: $\mathbf{q}^{(p)} = (q_1^{(p)}, q_2^{(p)}, q_3^{(p)})^T$ 表示3个机械臂的第 p 个关节的位置, $\dot{\mathbf{q}}^{(p)} = (\dot{q}_1^{(p)}, \dot{q}_2^{(p)}, \dot{q}_3^{(p)})^T$ 表示其第 p 个关节速度变化情况, 其中 $p = \{1, 2\}$. 由图2和图3所示, 自适应控制器(5)作用下, 二自由度机械臂的角度都趋于一致. 图3和图4显示了机械臂的角速度都收敛于零. 在通信时延和自时延同时存在的情况下, 实现了控制目标.

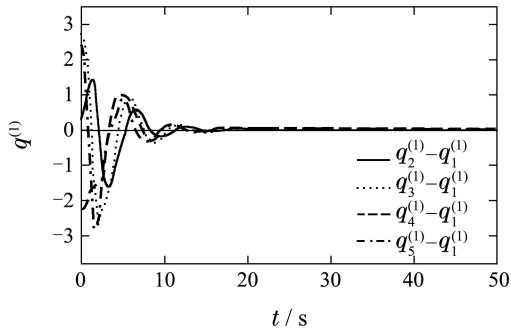


图 2 机械臂 2, 3, 4, 5 与 1 之间的相对姿态差 $q^{(1)}$ 变化情况
Fig. 2 Convergence error of relative attitude $q^{(1)}$ between manipulators 2, 3, 4, 5 and 1

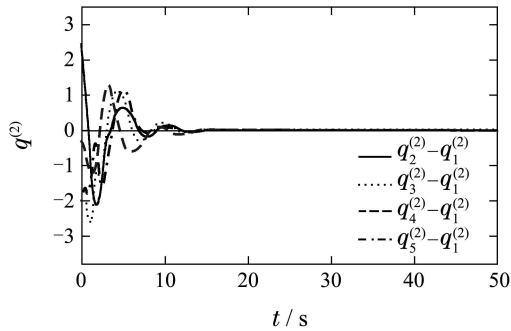


图 3 机械臂 2, 3, 4, 5 与 1 之间的相对姿态差 $q^{(2)}$ 变化情况
Fig. 3 Convergence error of relative attitude $q^{(2)}$ between manipulators 2, 3, 4, 5 and 1

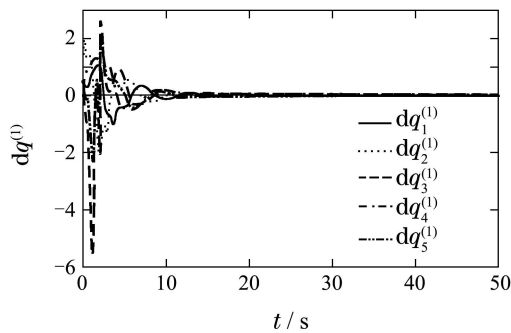


图 4 机械臂 1, 2, 3, 4, 5 的速度分量 $\dot{q}^{(1)}$ 变化情况
Fig. 4 Convergence error $\dot{q}^{(1)}$ of the velocity of the manipulators

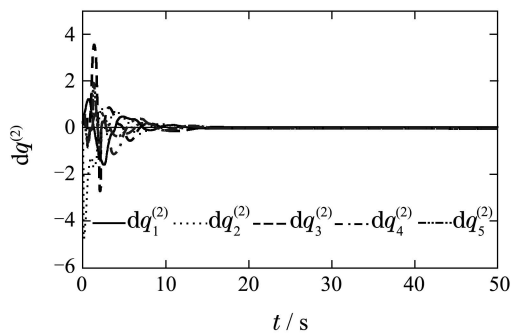


图 5 机械臂 1, 2, 3, 4, 5 的速度分量 $\dot{q}^{(2)}$ 变化情况
Fig. 5 Convergence error $\dot{q}^{(2)}$ of the velocity of the manipulators

在仿真过程中, 笔者发现一个值得注意的现象, 即系统的收敛速度不仅受到初始状态的影响, 而且和 $t_1 - t_2$ (通常情况下, $t_1 - t_2 \geq 0$) 有着密切的关系. 在初始状态相同的情况下, $t_1 - t_2$ 越大, 则收敛速度越慢; 相反, $t_1 - t_2$ 越小, 则收敛速度越快. 当通信时延和自时延相等时, 收敛速度最快, 比如假设通信时延 $t_1 = t_2 = 0.2$ s, 机械臂各关节位置收敛情况如图 6 和图 7 所示. 和图 3 和图 4 相比, 可以看出, 图 6 和图 7 中各个体收敛速度明显更快一些. 查阅文献发现, 对于一阶线性系统多智能体系统控制中, 在同时含通信时延和自时延的情况下, 也有类似的结论(见文献 [18]). 由此可见, 对于含未知参数的多 EL 系统协调控制中, 在通信时延不可避免的情况下, 自时延的存在对系统的控制性能并不是完全有害的. 适当控制自时延的大小反而有可能会提高系统的收敛速度.

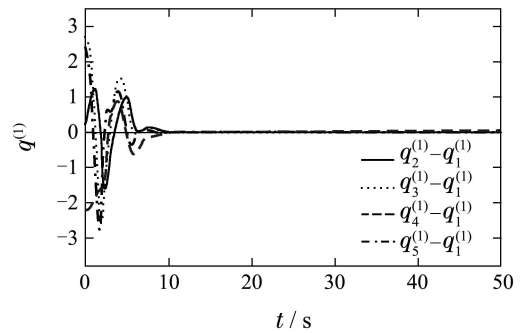


图 6 自时延和通信时延都为 0.2 s 时 $q^{(1)}$ 相对差变化情况
Fig. 6 Convergence error $q^{(1)}$ of the manipulators when the input delay and communication delay is 0.2 s

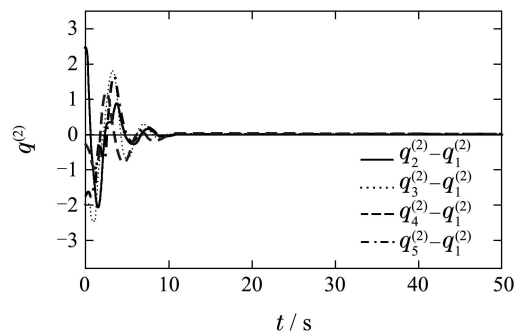


图 7 自时延和通信时延都为 0.2 s 时 $q^{(2)}$ 相对差变化情况
Fig. 7 Convergence error $q^{(2)}$ of the manipulators when the input delay and communication delay is 0.2 s

5 结语(Conclusions)

本文针对含未知参数的多 EL 系统一致性控制问题, 设计了一种自适应控制器. 该控制器允许通信拓扑为一般的有向图, 并考虑到自时延和通信时延的同时存在, 运用 Lyapunov 定理、Barbalat 定理、LMI 方法和频域分析等方法, 证明了自适应控制算法的稳定性, 并用数值仿真验证了算法的有效性. 本文中协调控制器的设计主要受启发于带多时延的一阶线性系统协调控制^[23], 本文将文献 [23] 中

解决线性系统中时延问题的思路运用于含未知参数的非线性EL系统分布式协调控制中,得到了自适应协调算法,为解决复杂网络环境下线性多EL系统一致性控制提供了一种行之有效的探索. 本文假设个体之间的通信时延均为恒定值,然而实际系统中时延可能是时变的,在下一步的研究中,笔者会进一步考虑时变时延对于系统收敛性的影响.

参考文献(References):

- [1] 杨洪勇, 张振兴, 张顺. 采用干扰-观测器控制的移动智能体系统之一致性 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(12): 1787 – 1792.
(YANG Hongyong, ZHANG Zhenxing, ZHANG Shun. Consensus of mobile multiple agent systems with disturbance observer based control [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(12): 1787 – 1792.)
- [2] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J]. *Proceedings of IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 233.
- [3] MIN H B, WANG S C, SUN F C, et al. Decentralized adaptive attitude synchronization of spacecraft formation [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 238 – 246.
- [4] MIN H B, WANG S C, SUN F C, et al. Distributed six degree-of-freedom spacecraft formation control with possible switching topology [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2011, 5(9): 1120 – 1130.
- [5] JIN E, JIANG X, SUN Z. Robust decentralized attitude coordination control of spacecraft formation [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(5): 567 – 577.
- [6] ARCAK M. Passivity as a design tool for group coordination [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1380 – 1390.
- [7] ABDESSAMEUD A, TAYEBI A. Attitude synchronization of a spacecraft formation without velocity measurement [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2008: 3719 – 3724.
- [8] CHUNG S J, AHSUN J J, SLOTINE J J. Application of synchronization to formation flying spacecraft: Lagrangian approach [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(2): 512 – 526.
- [9] WANG P K C, HADAEGH F Y, LAU K. Synchronized formation rotation and attitude control of multiple free-flying spacecraft [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1999, 22(1): 28 – 35.
- [10] REN W. Distributed attitude alignment in spacecraft formation flying [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2007, 21(2/3): 95 – 113.
- [11] REN W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems [J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(11): 2137 – 2149.
- [12] CHUNG S J, SLOTINE J. Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, 25(3): 686 – 700.
- [13] MIN H B, SUN F C, WANG S C, et al. Distributed adaptive consensus algorithm for networked Euler-Lagrange systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(1): 145 – 154.
- [14] MENG Z, REN W, YOU Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies [J]. *Automatica*, 2010, 47(8): 2092 – 2099.
- [15] KHOO S, XIE L, MAN Z. Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2009, 14(2): 219 – 226.
- [16] NUNO E, ORTEGA R, BASANEZ L, et al. Synchronization of networks of nonidentical Euler-Lagrange systems with uncertain parameters and communication delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 935 – 941.
- [17] MEI J, REN W, MA G F. Distributed coordinated tracking with a dynamic leader for multiple Euler-Lagrange systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1415 – 1421.
- [18] TIAN Y P, LIU C L. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2122 – 2128.
- [19] TIAN Y P, LIU C L. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1347 – 1353.
- [20] LIN P, JIA Y, LI L. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(8): 643 – 653.
- [21] ZHU W, CHENG D. Leader-following consensus of second-order agents with multiple time-varying delays [J]. *Automatica*, 2010, 46(8): 1994 – 1999.
- [22] MUNZ U, PAPACHRISTODOULOU A, ALLGOWER F. Delay robustness in consensus problems [J]. *Automatica*, 2010, 46(5): 1252 – 1265.
- [23] MENG Z, REN W, CAO Y, et al. Leaderless and leader-following consensus with communication and input delays under a directed network topology [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2011, 41(1): 75 – 88.
- [24] NUNO E, BASANEZ L, ORTEGA R, et al. Position tracking for nonlinear teleoperators with variable time delay [J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2009, 28(7): 895 – 910.
- [25] REN W R, BEARD W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [26] DESOER C, VIDYASAGAR M. *Feedback Systems: Input-Output Properties* [M]. New York: Academic, 1975.
- [27] HALE J K, VERDUYN S M. *Introduction to Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer, 1993.
- [28] REN W, BEARD R W. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control: Theory and Applications* [M]. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2008.
- [29] REN W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state [J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(7/8): 474 – 483.

作者简介:

刘源 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为多智能体协调控制, E-mail: craig_wayne@163.com;

王仕成 (1962–), 男, 教授, 目前研究方向为导航、制导与控制, E-mail: wscheng@vip.163.com;

闵海波 (1982–), 男, 讲师, 目前研究方向为多Agent协同控制, E-mail: haibo.min@gmail.com;

刘志国 (1979–), 男, 讲师, 目前研究方向为卫星导航、精确制导与控制, E-mail: Lzgc@163.com;

廖守亿 (1977–), 男, 讲师, 目前研究方向为航天器编队、红外制导与控制, E-mail: lsy_nudt@sohu.com.