

过驱动飞行器线性参变鲁棒预测跟踪控制策略

陈勇[†], 董新民, 薛建平, 郭创

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘要: 针对飞行包线内过驱动飞行器参数线性时变、控制量多增益调度难的问题, 基于约束动态控制分配提出了一种主环线性参变鲁棒预测跟踪控制器. 采用飞行状态增量以及跟踪指令误差为增广变量, 建立了过驱动飞行器的多面体线性参变离散控制模型. 引入 H_∞ 性能指标, 通过参变量转换将无穷时域min-max非线性鲁棒预测控制优化问题约简为线性矩阵不等式凸优化问题. 以操纵面偏转跟踪误差和偏转变化量为混合二次型指标, 建立了包含飞行器动态性能的无约束控制分配模型. 进而考虑操纵面的物理约束, 设计了级联动态控制分配策略. 仿真结果表明, 该方法能够生成合理的操纵面控制指令, 实现参考指令的有效跟踪.

关键词: 过驱动飞行器; 线性变参数; 鲁棒预测; 控制分配; 跟踪控制

中图分类号: TP273; V249.1 **文献标识码:** A

Robust linear parameter-varying predictive tracking control scheme for over-actuated vehicle

CHEN Yong[†], DONG Xin-min, XUE Jian-ping, GUO Chuang

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710038, China)

Abstract: To deal with the time-varying parameters in large envelope of an over-actuated air vehicle with excessive effectors, we propose a method to design the robust predictive tracking controller in the major loop with linear varying parameters based on the constrained dynamic control allocation. The polytopic linear parameter-varying discrete model of over-actuated vehicle is built by adopting the increments of flight states as well as the errors of virtual controls as augmented variables. With the H-infinity objective performance, the infinite time domain 'min-max' nonlinear robust predictive optimization problem is converted into the simplified convex linear matrix inequalities. By introducing the tracking errors and varying magnitudes of the effector deflections, we built the unconstrained control allocation model containing the effector dynamics. By considering the physical constraints on effectors, we design the cascaded dynamic control allocation. Simulation results show that this scheme can generate appropriate control instructions for effectively tracking reference commands.

Key words: over-actuated vehicle; linear parameter-varying; robust prediction; control allocation; tracking control

1 引言(Introduction)

现代先进布局飞行器常采用过驱动配置, 在各个轴向设计冗余的执行机构^[1], 使飞行控制律能够提供多种可选择的组合方式, 以保证飞行器在不断扩展的飞行包线内具有足够的安全性和可靠性^[2].

与常规飞机不同, 过驱动飞机包含升降舵、副翼、鸭翼、方向舵、襟翼、扰流板、翼尖小翼等多组约束控制面, 其控制效能在包线内随高度、马赫数、迎角等时变参数不断变化, 直接进行控制器设计必然增加参数调节的难度. 传统的增益调度控制器根据飞行状态在飞行包线内不断切换, 虽可实现各平衡点的性能指标, 但无法保证整个飞行包线性能稳定^[3], 甚至导致飞行事故^[4]. 因此, 过驱

动飞行器的大包线飞行控制需解决以下两个问题:

- 1) 如何考虑执行机构的物理约束合理地分配控制指令?
- 2) 如何保证包线内的控制性能和稳定性?

近年来, 基于线性参变(linear parameter-varying, LPV)系统的变增益控制在飞机^[3-9]、导弹^[10]、机器人^[11]等方面得到了广泛的研究. 通过工作点的局部控制器依赖时变参数插值获取全局控制器, LPV变增益调度^[5, 12]能够保证闭环系统全局稳定. 尤其是结合鲁棒预测控制理论^[13-18]设计的变增益控制器, 在保证闭环系统控制性能的同时能够充分利用参数可测的条件有效地抑制参数扰动带来的影响^[18-20], 受到国内外学者的高度重视. 但目前针对过驱动飞行器大包线控制问题的研究较少, 因此基

于鲁棒预测理论设计过驱动飞行器的LPV变增益控制器具有重要意义。

控制分配技术^[1-2,6,21-26]是综合考虑各任务指标要求优化分配多操纵面约束指令的有效方法, 已经成为研究的热点^[21]。针对过驱动飞行器的大包线飞行控制问题, 文献[22]基于简单的伪逆控制分配方法设计了ICE多操纵面无尾飞机在参数随状态变化时的LPV控制器; 文献[23]基于加权伪逆分配法对比研究了动态逆和LPV增益调度对ICE无尾飞机内环控制的性能; 文献[6]基于Kriging建模和鲁棒自增益控制技术, 运用力矩控制分配方法研究了多操纵面飞机大包线控制律设计问题, 等等。这些方法没有考虑操纵面偏转的位置、速率约束和动态性能, 不能最优地发挥整个冗余操纵面的控制效能, 以保证主环虚拟控制指令完全实现, 这种差异将直接影响模块化^[24]飞行控制结构的控制性能。

本文在研究LPV变增益控制技术和控制分配技术的基础上, 引入鲁棒预测控制理论提出了一种闭环稳定的过驱动飞行器指令跟踪控制方案, 通过参变量转换设计了基于虚拟控制指令的鲁棒预测变增益控制律, 并考虑操纵面偏转的动态性能和物理约束, 设计了级联的动态控制分配策略, 以更好地发挥多操纵面的控制效能。

2 问题描述(Problem formulation)

与常规飞行器一样, 过驱动飞行器受大气密度、飞行速度等参数影响, 其刚体运动方程呈现非线性, 可描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varsigma}, t), \\ \mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varsigma}, t), \\ \boldsymbol{\varsigma}(t) = h(\theta, t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为飞行器状态, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ 为输出变量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为执行器控制指令; $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 分别表示飞行器的状态和输出非线性动态特性; θ 表示高度、马赫数、迎角等变化参数, $h(\cdot)$ 为 $\theta \rightarrow \boldsymbol{\varsigma}$ 的映射^[5]。

直接基于系统(1)进行理论分析和实际工程设计具有一定的难度。通常在小扰动假设下, 将过驱动飞行器在飞行包线内各基准状态点组成的运动方程描述为如下的参数时变线性模型^[8,12]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(\boldsymbol{\varsigma})\mathbf{x}(t) + B_u(\boldsymbol{\varsigma})\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t). \end{cases}$$

进一步可离散化为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A(\boldsymbol{\varsigma}_k)\mathbf{x}(k) + B_u(\boldsymbol{\varsigma}_k)\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k), \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ 和 $\boldsymbol{\varsigma}_k$ 分别为离散的状态量、输出量、控制量和参变量; A , B_u 为适当维数的参数矩阵, C 为适当维数的输出矩阵。

过驱动飞行器线性参变的运动模型(2)中各参数矩阵随高度、马赫数、迎角等状态参数非线性变化, 组成的线性方程组可有效描述飞机的非线性时变特性, 为此飞行控制器也应相应地发生变化。而基于线性模型的变增益控制技术通过时变参数将各状态下的飞行控制器和飞机运动联系起来, 已经成为飞行控制系统工程设计中最常用、最成功的有效方法, 目前在新一代战斗机如Su-27、Su-30及F-16等飞机的飞行控制系统中得到了成功应用^[9]。

2.1 模块化级联飞行控制结构(Modular cascaded flight control structure)

为处理冗余执行器系统的控制分配问题, 可将 $B_u(\boldsymbol{\varsigma}_k)$ 进行满秩分解为

$$B_u(\boldsymbol{\varsigma}_k) = B_v(\boldsymbol{\varsigma}_k)B(\boldsymbol{\varsigma}_k), \quad (3)$$

其中: $B_v \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 为虚拟控制输入阵, $B \in \mathbb{R}^{q \times m}$ 为控制效率映射阵。进而在飞行包线内建立 k 时刻系统(2)的多面体LPV级联控制系统离散化模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A(\boldsymbol{\varsigma}_k)\mathbf{x}(k) + B_v(\boldsymbol{\varsigma}_k)\mathbf{v}(k), \\ \mathbf{v}(k) = B(\boldsymbol{\varsigma}_k)\mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k), \\ [A(\boldsymbol{\varsigma}_k), B_v(\boldsymbol{\varsigma}_k), B(\boldsymbol{\varsigma}_k)] \in \Omega, \forall k \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{v}(k) \in \mathbb{R}^q$ 为虚拟控制量, Ω 是凸多面体集合

$$\Omega = \text{Co}\{[A_1, B_{v,1}, B_1], \dots, [A_L, B_{v,L}, B_L]\},$$

对 $i \in \mathcal{E} = \{i | i = 1, 2, \dots, L\}$, $[A_i, B_{v,i}, B_i]$ 是 Ω 的顶点, L 为顶点数, 且对于参数:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varsigma}_k &= [\varsigma_1 \ \varsigma_2 \ \dots \ \varsigma_L]^T \in \Theta, \\ \Theta &= \{\boldsymbol{\varsigma}_k | \sum_{i=1}^L \varsigma_i = 1, \sum_{i=1}^L \varsigma_i \vartheta_i = \theta_k, 0 \leq \varsigma_i \leq 1\}, \end{aligned}$$

其中 ϑ_i 为 θ_k 在多面体顶点的取值。对 $\forall k \geq 0$ 满足:

$$A(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i A_i, B_v(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i B_{v,i}, B(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i B_i.$$

针对离散系统(4)作如下假设:

- 假设 1** 在任意时刻参数 $\boldsymbol{\varsigma}_k$ 可测, 且变化较慢。
- 假设 2** 对 $\forall i \in \mathcal{E}$, 系统 $(A_i, B_{v,i}, C, 0)$ 可镇定。
- 假设 3** 对 $\forall i \in \mathcal{E}$, 矩阵 $[A_i \ B_{v,i}; C \ 0]$ 行满秩。

图1为模块化多操纵面级联飞行控制系统结构。

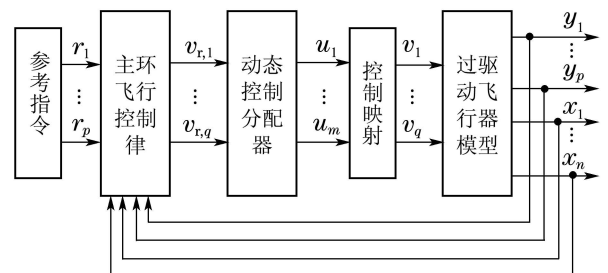


图 1 模块化级联飞行控制结构图

Fig. 1 Block diagram of modular cascaded flight control

模块化多操纵面级联飞行控制系统可分成两个独立的步骤进行设计:

1) 设计稳定的LPV主环飞行控制指令 $\mathbf{v}_r(k)$, 使得系统输出 $\mathbf{y}(k+1)$ 跟踪参考指令 $\mathbf{r}(k)$;

2) 设计动态控制分配器实现虚拟控制指令 $\mathbf{v}_r(k)$ 向执行器指令 $\mathbf{u}(k)$ 的合理分配.

2.2 多面体线性参变增广模型(Polytopic LPV augmented model)

为实现指令的有效跟踪, 引入误差信号

$$\tilde{\mathbf{e}}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k).$$

令 $\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)$, $\tilde{\mathbf{y}}(k+1) = \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k)$, $\tilde{\mathbf{v}}_r(k+1) = \mathbf{v}_r(k+1) - \mathbf{v}_r(k)$, $\tilde{\mathbf{r}}(k+1) = \mathbf{r}(k+1) - \mathbf{r}(k)$. 选取增广状态 $\tilde{\mathbf{x}}^T(k) = [\tilde{\mathbf{x}}^T(k) \ \tilde{\mathbf{e}}^T(k)]$, 根据假设1可得到模块化级联系统离散LPV增广模型

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{A}(\boldsymbol{\varsigma}_k)\tilde{\mathbf{x}}(k) + \bar{B}_v(\boldsymbol{\varsigma}_k)\tilde{\mathbf{v}}_r(k) + \bar{B}_r(\boldsymbol{\varsigma}_k)\tilde{\mathbf{r}}(k+1), \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) = \bar{C}(\boldsymbol{\varsigma}_k)\tilde{\mathbf{x}}(k), \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$\bar{A}(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \begin{bmatrix} A(\boldsymbol{\varsigma}_k) & 0 \\ -CA(\boldsymbol{\varsigma}_k) & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_v(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \begin{bmatrix} B_v(\boldsymbol{\varsigma}_k) \\ -CB_v(\boldsymbol{\varsigma}_k) \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_r(\boldsymbol{\varsigma}_k) = [0 \ I]^T, \quad \bar{C}(\boldsymbol{\varsigma}_k) = [C \ 0].$$

由 $[A(\boldsymbol{\varsigma}_k), B_v(\boldsymbol{\varsigma}_k), B(\boldsymbol{\varsigma}_k)] \in \Omega$ 知, 对 $\forall k \geq 0$:

$$[\bar{A}(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{B}_v(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{B}_r(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{C}(\boldsymbol{\varsigma}_k)] \in \bar{\Omega} = \text{Co}\{[\bar{A}_1, \bar{B}_{v,1}, \bar{B}_{r,1}, \bar{C}_1], \dots, [\bar{A}_L, \bar{B}_{v,L}, \bar{B}_{r,L}, \bar{C}_L]\}.$$

其中: $\bar{A}(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i \bar{A}_i$, $\bar{B}_v(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i \bar{B}_{v,i}$, $\bar{B}_r(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i \bar{B}_{r,i}$, $\bar{C}(\boldsymbol{\varsigma}_k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i \bar{C}_i$. 对 $\forall i \in \Xi$, 满足

$$\begin{cases} \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -CA_i & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{v,i} = \begin{bmatrix} B_{v,i} \\ -CB_{v,i} \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_{r,i} = [0 \ I]^T, \quad \bar{C}_i = [C \ 0]. \end{cases} \quad (6)$$

若对于 $[\bar{A}(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{B}_v(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{B}_r(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{C}(\boldsymbol{\varsigma}_k)] \in \bar{\Omega}$, LPV增广系统(5)鲁棒稳定, 则对 $[A(\boldsymbol{\varsigma}_k), B_v(\boldsymbol{\varsigma}_k), B(\boldsymbol{\varsigma}_k)] \in \Omega$, 线性参变系统(4)鲁棒稳定.

3 主环飞行控制律设计(Main-loop flight control law design)

鲁棒模型预测控制是实现优化的同时保证系统闭环稳定的有效控制策略, 其研究成果主要针对多面体不确定性和结构反馈不确定性两种类型, 且控制器不依赖于结构参数. 但是过驱动飞行器在包线内飞行时参数 $\boldsymbol{\varsigma}_k$ 具有时变且可测的特点, 包括文献[13–16]在内的大部分鲁棒预测控制器都有一定的保守性^[20]. 为此, 本文结合文献[18–20]的变参数鲁棒预测控制思想, 充分考虑多面体组合存在的所有

不确定性, 利用可测时变参数 $\boldsymbol{\varsigma}_k$ 构造主环飞行控制律, 实现对参考指令的有效跟踪.

3.1 鲁棒预测滚动优化指标(Receding horizon optimal objectives for robust prediction)

针对离散凸多面体线性参变系统(4), 目标是设计鲁棒预测控制器, 使得闭环系统的稳定状态被驱动到 $(\tilde{\mathbf{x}}_{ss}, \tilde{\mathbf{v}}_{r,ss}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, 从而保证稳态误差 $\tilde{\mathbf{e}}_{ss} \rightarrow \mathbf{0}$.

不妨定义 k 时刻线性参变系统(4)的二次型鲁棒预测滚动优化性能指标

$$\min_{\tilde{\mathbf{v}}_r(k)} \max_{[\bar{A}, \bar{B}_v, \bar{B}_r, \bar{C}] \in \bar{\Omega}} J_\infty(k) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \|\tilde{\mathbf{x}}(k+\tau|k)\|_{Q_x}^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_r(k+\tau|k)\|_{R_v}^2, \quad (7)$$

其中: $\tilde{\mathbf{x}}(k+\tau|k)$ 表示 k 时刻基于系统(5)对 $k+\tau$ 时刻 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的预测值, $\tilde{\mathbf{v}}_r(k+\tau|k)$ 表示经滚动优化得到的虚拟控制指令序列, Q_x, R_v 均为正定对称加权矩阵.

性能指标式(7)通过min-max函数要求所有的 $[\bar{A}(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{B}_v(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{B}_r(\boldsymbol{\varsigma}_k), \bar{C}(\boldsymbol{\varsigma}_k)] \in \bar{\Omega}$, 在最坏情形下目标 $J_\infty(k)$ 达到最小值. $J_\infty(k)$ 包含增广系统(5)当前时刻与未来时刻状态和输入的二次加权, 可实现控制过程中系统动态误差和能量消耗综合最优^[13]. 式(7)中优化值 J_∞^* 的大小将体现算法的最优性. 不妨定义性能评价函数

$$\tilde{\mathbf{z}}(k) = C_{\tilde{z}, \tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{x}}(k) + D_{\tilde{z}, \tilde{\mathbf{v}}} \tilde{\mathbf{v}}_r(k), \quad (8)$$

其中:

$$C_{\tilde{z}, \tilde{\mathbf{x}}}^T = [Q_x^{0.5} \ 0], \quad D_{\tilde{z}, \tilde{\mathbf{v}}}^T = [0 \ R_v^{0.5}].$$

从而二次型鲁棒预测性能指标转化为

$$J_\infty(k) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{z}}^T(k+\tau|k) \tilde{\mathbf{z}}(k+\tau|k).$$

为保证 $\tilde{\mathbf{r}}(k)$ 作用下控制系统(5)的闭环性能, 假设 $\mu > 0$ 为其 H_∞ 鲁棒性能上界, 即满足

$$\|T_{\tilde{z}, \tilde{\mathbf{r}}}\|_\infty^2 < \mu. \quad (9)$$

3.2 主环虚拟控制律设计(Main-loop virtual flight control law design)

引理 1^[27](Schur补引理) 对称分块矩阵

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & * \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

其中: $X_{11} = X_{11}^T, X_{22} = X_{22}^T$. 以下3个条件等价:

- 1) $X > 0$;
- 2) $X_{22} > 0, X_{11} - X_{21}^T X_{22}^{-1} X_{21} > 0$;
- 3) $X_{11} > 0, X_{22} - X_{21} X_{11}^{-1} X_{21}^T > 0$.

引理 2 对于离散状态空间系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_d(k+1) = A_d \mathbf{x}_d(k) + B_d \mathbf{u}_d(k), \\ \mathbf{z}_d(k) = C_d \mathbf{x}_d(k) + D_d \mathbf{u}_d(k), \quad \mathbf{x}_d(0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (10)$$

对 $k \geq 0$ 和 $\mu_d > 0$, 若存在对称矩阵 $P_d(k) > 0$, 满足

$$A_d(k) = \begin{bmatrix} A_d^T P_d(k+1) A_d - P_d(k) + C_d^T C_d \\ B_d^T P_d(k+1) A_d + D_d^T C_d \\ * \\ -\mu_d I + B_d^T P_d(k+1) B_d + D_d^T D_d \end{bmatrix} \leq 0, \quad (11)$$

则系统稳定且 H_∞ 鲁棒性能指标 $\|T_{z_d u_d}\|_\infty^2 \leq \mu_d$.

证 对 $\forall k \geq 0$, 选择Lyapunov函数

$$V_d(k) = \mathbf{x}_d^T(k) P_d(k) \mathbf{x}_d(k),$$

其中 $P_d(k) > 0$ 为相应维数对称阵. 代入式(10)可知

$$\begin{aligned} V_d(k+1) - V_d(k) = & \mathbf{u}_d^T(k) B_d^T P_d(k+1) B_d \mathbf{u}_d(k) + \\ & \mathbf{x}_d^T(k) (A_d^T P_d(k+1) A_d - P_d(k)) \mathbf{x}_d(k) + \\ & \mathbf{x}_d^T(k) A_d^T P_d(k+1) B_d \mathbf{u}_d(k) + \\ & \mathbf{u}_d^T(k) B_d^T P_d(k+1) A_d \mathbf{x}_d(k), \end{aligned}$$

左右同时加上 $\mathbf{z}_d^T(k) \mathbf{z}_d(k) - \mu_d \mathbf{u}_d^T(k) \mathbf{u}_d(k)$, 进一步根据引理1和式(10)可知,

$$\begin{aligned} V_d(k+1) - V_d(k) = & -\|\mathbf{z}_d(k)\|^2 + \mu_d \|\mathbf{u}_d(k)\|^2 + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ \mathbf{u}_d(k) \end{bmatrix}^T A_d(k) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ \mathbf{u}_d(k) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $A_d(k)$ 如式(11). 对 $\forall k \geq 0$, 当 $A_d(k) \leq 0$ 时存在

$$V_d(k+1) - V_d(k) \leq -\|\mathbf{z}_d(k)\|^2 + \mu_d \|\mathbf{u}_d(k)\|^2, \quad (12)$$

$$A_d^T P_d(k+1) A_d - P_d(k) + C_d^T C_d \leq 0. \quad (13)$$

对式(10)对应的自治系统, 选择Lyapunov函数:

$$V_d^0(k) = \mathbf{x}_d^T(k) P_d(k) \mathbf{x}_d(k),$$

则由式(13)知, 对 $\forall k \geq 0$, 满足 $V_d^0(k+1) \leq V_d^0(k)$.

结合Lyapunov定理知系统(10)稳定, 且 $\mathbf{x}_d(\infty) = 0$, 从而 $V_d(0) = 0, V_d(\infty) = V_d^0(\infty) = 0$ [27-29]. 进一步对 $\forall k \geq 0, A_d(k) \leq 0$ 时将式(12)从 $k = 0$ 叠加到 $k = \infty$ 可得 [28-29]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{z}_d(k)\|^2 \leq \mu_d \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{u}_d(k)\|^2 \Rightarrow \\ \|T_{z_d u_d}\|_\infty^2 \leq \mu_d. \end{aligned}$$

因此引理2得证. 证毕.

注 1 对系统(10)从 $k = 0$ 开始按式(11)步进式离散计算矩阵序列 $P_d(k)$ 的过程中, 在 $k = k_0$ 时刻只需求解满足 $A_d(k_0) \leq 0$ 要求的正定矩阵 $P_d(k_0)$, 且此刻已隐含 $P_d(k)$ 序列对 k_0 之前的任意时刻式(11)成立.

定理 1 对于过驱动飞行器线性参变系统的鲁棒预测控制优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\tilde{\mathbf{v}}_r(k)} \max_{[A, B_v, B_r, C] \in \bar{\mathcal{D}}} J_\infty(k) \\ \text{s.t. } \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{A}(\varsigma_k) \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{B}_v(\varsigma_k) \tilde{\mathbf{v}}_r(k) + \\ \quad \bar{B}_r(\varsigma_k) \tilde{\mathbf{r}}(k+1). \end{cases} \quad (14)$$

若存在常数 $\gamma > 0$, 矩阵 $Y_{i,j} \in \mathbb{R}^{q \times (n+p)}$, 对称正定矩阵 $Z_i \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}, i, j \in \Xi$, 满足凸优化问题:

$$\min_{\mu, \gamma, Y_{i,j}, Z_i} \gamma, \quad (15)$$

$$\text{s.t. } \begin{bmatrix} \gamma & * \\ \bar{\mathbf{x}}(k|k) & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in \Xi, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} -Z_p(i, j, s) & * & * & * & * \\ 0 & -\mu I & * & * & * \\ C_{z, \bar{x}} Z_p(i, j, s) & 0 & -I & * & * \\ D_{z, \bar{v}} F_p(i, j, s) & 0 & 0 & -I & * \\ A_p(i, j, s) & \bar{B}_r & 0 & 0 & -Z_l \end{bmatrix} \leq 0, \quad (17)$$

$l \in \Xi, i \in \Xi, j = i, \dots, L, s = j, \dots, L,$

其中:

$$\begin{aligned} 4Z_p(i, j, s) &= 2Z_i + Z_j + Z_s, \quad Y_{i,j} = F_i Z_j, \\ 4F_p(i, j, s) &= Y_{i,j} + Y_{i,s} + Y_{j,s} + Y_{s,j}, \\ 4A_p(i, j, s) &= \\ & \bar{A}_i Z_j + \bar{A}_i Z_s + \bar{A}_j Z_s + \bar{A}_s Z_j + \\ & \bar{B}_{v,i} Y_{j,s} + \bar{B}_{v,i} Y_{s,j} + \bar{B}_{v,j} Y_{i,s} + \bar{B}_{v,s} Y_{i,j}, \end{aligned}$$

则对于 $\tau \geq 0$, 存在满足式(7)的鲁棒预测控制器

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{v}}_r(k + \tau|k) = F(k) \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k), \\ F(k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i(k) F_i, \\ F_i = \sum_{j=1}^L L^{-1} Y_{i,j} Z_j^{-1} = Y_{i,1} Z_1^{-1}, \end{cases} \quad (18)$$

且闭环系统满足 H_∞ 鲁棒性能指标(9).

证 若 $\tau \geq 0$, 定义Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V(\tau, k) &= \bar{\mathbf{x}}^T(k + \tau|k) P(\tau, k) \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k), \\ P(\tau, k) &= \sum_{i=1}^L \varsigma_i(k + \tau) P_i > 0, \quad P_i \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}. \end{aligned}$$

对于鲁棒预测控制器:

$$\tilde{\mathbf{v}}_r(k + \tau|k) = F(k) \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k),$$

其中 $F(k)$ 为鲁棒预测控制增益矩阵, 不妨令 $F(k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i(k) F_i$, 则对 $\tau \geq 0$:

$$V(\tau + 1, k) - V(\tau, k) =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k) \\ \tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \end{bmatrix}^T A_1(k) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k) \\ \tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中:

$$A_1(k) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{cl}^T(\tau, k)P(\tau + 1, k)\bar{A}_{cl}(\tau, k) - P(\tau, k) \\ \bar{B}_r^T(\tau, k)P(\tau + 1, k)\bar{A}_{cl}(\tau, k) \\ \bar{B}_r^T(\tau, k)P(\tau + 1, k)\bar{B}_r(\tau, k) \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{cl}(\tau, k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i(k + \tau) (\bar{A}_i + \bar{B}_{v,i}F(k)),$$

$$P(\tau + 1, k) = \sum_{l=1}^L \varsigma_l(k + \tau + 1)P_l, P_l \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}.$$

在增广系统最终稳定到 $(\bar{\mathbf{x}}_{ss}, \tilde{\mathbf{v}}_{r,ss})$ 时, $\bar{\mathbf{x}}(\infty|k) = 0, V(\infty, k) = 0$. 将式(19)从 $\tau = 0$ 叠加到 $\tau = \infty$, 可得

$$-V(k) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k) \\ \tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \end{bmatrix}^T A_1(k) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k) \\ \tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

由 $\tilde{\mathbf{v}}_r(k + \tau|k) = F(k)\bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k)$ 知, 式(8)可转化为

$$\tilde{\mathbf{z}}(k + \tau|k) = (C_{\tilde{z},\bar{x}} + D_{\tilde{z},\bar{v}}F(k))\bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k),$$

明显存在 $C_{\tilde{z},\bar{x}}^T D_{\tilde{z},\bar{v}} = 0$. 进而鲁棒预测性能指标

$$J_{\infty}(k) = \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{r}}^T(k + \tau + 1)\tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) + \sum_{\tau=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k) \\ \tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \end{bmatrix}^T A_2(k) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k) \\ \tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中

$$A_2(k) = \begin{bmatrix} C_{\tilde{z},\bar{x}}^T C_{\tilde{z},\bar{x}} + F^T D_{\tilde{z},\bar{v}}^T D_{\tilde{z},\bar{v}} F & * \\ 0 & -\mu I \end{bmatrix}.$$

将式(20)和式(21)相加, 得

$$J_{\infty}(k) = V(k) + \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{r}}^T(k + \tau + 1)\tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) + \sum_{\tau=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k) \\ \tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \end{bmatrix}^T \Lambda(k) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + \tau|k) \\ \tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中 $\Lambda(k) = A_1(k) + A_2(k)$.

结合引理2和假设2可知, 对 $\forall k \geq 0, \Lambda(k) \leq 0$ 时, 闭环系统满足 H_{∞} 鲁棒性能指标式(9). 进而结合式(22), 当满足

$$J_{\infty}(k) \leq V(k) + \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{r}}^T(k + \tau + 1)\tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) \quad (23)$$

时, 由注1可知最小化式(23)右侧的 $J_{\infty}(k)$ 上界既可使闭环系统满足 H_{∞} 鲁棒性能指标式(9), 也能实现鲁棒预测性能指标式(7)达到最优^[16].

在任意时刻 k , 给定 $\mathbf{r}(k), \tilde{\mathbf{r}}(k)$ 有界为常值, 即

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{r}}^T(k + \tau + 1)\tilde{\mathbf{r}}(k + \tau + 1) = \hat{r}^2 < \bar{r} < \infty.$$

从而 $V(k)$ 最小时即可保证优化指标 $J_{\infty}(k)$ 上界最小. 对于 $i \in \Xi$, 令

$$Z_i = P_i^{-1}, \quad (24)$$

则

$$Z(\tau, k) = \sum_{i=1}^L \varsigma_i(k + \tau)Z_i.$$

在 k 时刻, 若满足 $\bar{\mathbf{x}}^T(k)P(k)\bar{\mathbf{x}}(k) \leq \gamma$, 根据引理1知式(23)转化为

$$J_{\infty}(k) \leq \gamma + \mu \hat{r}^2,$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} \gamma & * \\ \bar{\mathbf{x}}(k|k) & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, i \in \Xi.$$

由于在任意 k 时刻 \hat{r}^2 为较大的常值, 则满足式(7)和式(9)的混合优化问题可转化为

$$\begin{cases} \min_{\mu, \gamma, F, P_i, Z_i} \gamma, \\ \text{s.t.} \Lambda \leq 0, \text{ 式(16)}. \end{cases} \quad (25)$$

进一步由引理1和 $\Lambda \leq 0$ 可以得到

$$\begin{bmatrix} -P(\tau, k) & * & * & * & * \\ 0 & -\mu I & * & * & * \\ C_{\tilde{z},\bar{x}} & 0 & -I & * & * \\ D_{\tilde{z},\bar{v}}F(k) & 0 & 0 & -I & * \\ \bar{A}_{cl}(\tau, k) & \bar{B}_r & 0 & 0 & -P^{-1}(\tau + 1, k) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (26)$$

式(26)成立仅当 $P(\tau + 1, k)$ 的所有顶点满足

$$\begin{bmatrix} -P(\tau, k) & * & * & * & * \\ 0 & -\mu I & * & * & * \\ C_{\tilde{z},\bar{x}} & 0 & -I & * & * \\ D_{\tilde{z},\bar{v}}F(k) & 0 & 0 & -I & * \\ \bar{A}_{cl}(\tau, k) & \bar{B}_r & 0 & 0 & -P_l^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, l \in \Xi.$$

式(26)左、右乘 $\text{diag}\{P^{-1}(\tau, k), I, I, I, I\}$, 可得

$$\begin{bmatrix} -Z(\tau, k) & * & * & * & * \\ 0 & -\mu I & * & * & * \\ C_{\tilde{z},\bar{x}}Z(\tau, k) & 0 & -I & * & * \\ D_{\tilde{z},\bar{v}}F(k)Z(\tau, k) & 0 & 0 & -I & * \\ \bar{A}_{cl}(\tau, k)Z(\tau, k) & \bar{B}_r & 0 & 0 & -Z_l \end{bmatrix} \leq 0. \quad (27)$$

为约简矩阵不等式(27), 经参变量转换^[19-20]可将 $Z(\tau, k)$, $F(k)Z(\tau, k)$, $\bar{A}_{cl}(\tau, k)Z(\tau, k)$ 表示为

$$\begin{aligned} Z(\tau, k) &= \sum_{i=1}^L \varsigma_i(k + \tau) Z_i = \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{j \geq i}^L 2\varsigma_i(k + \tau) \varsigma_j(k + \tau) \frac{Z_i + Z_j}{2} = \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{j \geq i}^L \sum_{s \geq j}^L 4\varsigma_i(k + \tau) \varsigma_j(k + \tau) \varsigma_s(k + \tau) Z_z(i, j, s), \\ F(k)Z(\tau, k) &= \sum_{j=1}^L \varsigma_i(k) F_j \sum_{s=1}^L \varsigma_s(k + \tau) Z_s = \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{s=1}^L \varsigma_i(k) \varsigma_j(k) \varsigma_s(k + \tau) F_j Z_s = \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{j \geq i}^L \sum_{s \geq j}^L 4\varsigma_i(k) \varsigma_j(k) \varsigma_s(k + \tau) F_z(i, j, s), \\ \bar{A}_{cl}(\tau, k)Z(\tau, k) &= \\ & \sum_{i=1}^L \varsigma_i(k + \tau) \bar{A}_i \sum_{s=1}^L \varsigma_s(k + \tau) Z_s + \\ & \sum_{i=1}^L \varsigma_i(k + \tau) \bar{B}_{v,i} \sum_{j=1}^L \varsigma_j(k + \tau) F_j \sum_{s=1}^L \varsigma_s(k + \tau) Z_s = \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{j \geq i}^L \sum_{s \geq j}^L 4\varsigma_i(k + \tau) \varsigma_j(k + \tau) \varsigma_s(k + \tau) A_z(i, j, s), \end{aligned} \tag{28}$$

其中:

$$\begin{aligned} Z_z(i, j, s) &= \frac{2Z_i + Z_j + Z_s}{4}, \\ F_z(i, j, s) &= \frac{F_i Z_j + F_i Z_s + F_j Z_s + F_s Z_j}{4}, \\ A_z(i, j, s) &= \\ & \frac{\bar{A}_i Z_j + \bar{A}_i Z_s + \bar{A}_j Z_s + \bar{A}_s Z_j}{4} + \\ & \frac{\bar{B}_{v,i} F_j Z_s + \bar{B}_{v,i} F_s Z_j + \bar{B}_{v,j} F_i Z_s + \bar{B}_{v,s} F_i Z_j}{4}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \sum_{j \geq i}^L \sum_{s \geq j}^L 4\varsigma_i(k + \tau) \varsigma_j(k + \tau) \varsigma_s(k + \tau) &= 1, \\ \sum_{i=1}^L \sum_{j \geq i}^L \sum_{s \geq j}^L 4\varsigma_i(k) \varsigma_j(k) \varsigma_s(k + \tau) &= 1, \end{aligned}$$

则满足下述不等式的情况下, 式(27)成立:

$$\begin{bmatrix} -Z_z(i, j, s) & * & * & * & * \\ 0 & -\mu I & * & * & * \\ C_{\bar{z}, \bar{x}} Z_z(i, j, s) & 0 & -I & * & * \\ D_{\bar{z}, \bar{v}} F_z(i, j, s) & 0 & 0 & -I & * \\ A_z(i, j, s) & \bar{B}_r & 0 & 0 & -Z_l \end{bmatrix} \leq 0, \tag{29}$$

$l \in \Xi, i \in \Xi, j = i, \dots, L, s = j, \dots, L.$

令 $Y_{i,j} = F_i Z_j$, 则存在

$$F_i = Y_{i,1} Z_1^{-1} = Y_{i,2} Z_2^{-1} = \dots = Y_{i,L} Z_L^{-1}.$$

由式(29)知式(17)成立, 得到控制律(18). 证毕.

注 2 通过式(28)变量转换, LPV式(27)对应的线性矩阵不等式数由 L^3 减少至 $(L^3 + 3L^2 + 2L)/6 \ll L^3$.

推论 1 对于多面体LPV增广系统, 如果存在最优鲁棒预测控制器使得 $J_\infty(k)$ 最小, 则

$$V(\tau + 1, k) \leq V(\tau, k).$$

证 由 $J_\infty(k)$ 最小可知 $V(\tau, k)$ 最小, 根据 $\Lambda(k) \leq 0$ 得增广系统状态满足

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{cl}^T(\tau, k) P(\tau + 1, k) \bar{A}_{cl}(\tau, k) - P(\tau, k) \\ \bar{B}_r^T(\tau, k) P(\tau + 1, k) \bar{A}_{cl}(\tau, k) \\ 0 \\ C_{\bar{z}, \bar{x}} \\ D_{\bar{z}, \bar{v}} F(k) \\ * \\ \bar{B}_r^T(\tau, k) P(\tau + 1, k) \bar{B}_r(\tau, k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ -\mu I & * & * & * \\ 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & -I & * \end{bmatrix} \leq 0,$$

显然 $\Lambda_1(k) \leq 0$. 结合式(19)知推论1成立. 证毕.

推论 2 问题(14)的控制器在 k 时刻的解在 $k + 1$ 时刻依然是可行解.

证 参考文献[13, 19], 由推论1可以直接得到推论2成立. 证毕.

推论 3 考虑多面体LPV增广系统(5), 假设最优优化问题式(15)–(18)在 k 时刻存在最优解 γ , $Y_{i,j}$ 及 Z_i , 则集合 $\varepsilon = \{z | z^T P(0) z \leq \gamma(0)\}$ 是LPV系统预测增广状态的椭球不变集.

证 若定理1的优化问题有解, 则满足

$$\bar{x}^T(k) P(k) \bar{x}(k) \leq \gamma(k).$$

根据推论1知 $V(\tau, k)$ 随 k 递减, 因此在 $k + 1$ 时刻:

$$\begin{aligned} \bar{x}^T(k + 1) P(k + 1) \bar{x}(k + 1) &\leq \bar{x}^T(k) P(k) \bar{x}(k) \leq \\ \dots &\leq \bar{x}^T(0) P(0) \bar{x}(0) \leq \gamma(0). \end{aligned}$$

即推论3成立. 证毕.

主环控制律的设计过程需要反馈控制矩阵的在线计算, 具有较大计算量, 很难在单个采样周期 T 中实现. 由推论2可知, 在所有工作点 $[\bar{A}, \bar{B}_v, \bar{B}_r, \bar{C}] \in \bar{\Omega}$ 覆盖的包线内, 可按实际计算周期 T_s ($T_s > T$)进行控制器设计, 用当前状态下计算得到的飞行控制律直接在下一个计算周期中控制飞机, 满足飞控系统实时性要求的同时实现控制律的滚动优化计算.

4 动态控制分配器设计(Dynamic control allocation design)

控制分配方法通常考虑的控制优化性能指标包括操纵面偏转能量最低、虚拟指令跟踪误差最小、执行器动态性能最优等^[24]。其中考虑执行器动态性能的方法称为动态控制分配方法,能够根据执行器的偏转速率协调实现指令合理分配。为此,本文针对操纵面带约束的情形,提出一种综合考虑操纵面偏转、跟踪误差和动态性能的动态控制分配器设计方法。

4.1 无约束动态控制分配器(Unconstrained dynamic control allocation)

根据主环设计的鲁棒预测虚拟控制律式(18),以 $\tilde{v}_r(k)$ 为执行器控制的虚拟指令增量,建立无约束动态控制分配模型为

$$\min_{\mathbf{u}(k)} J = \|W_1(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_d(k))\|^2 + \|W_2(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1))\|^2, \quad (30)$$

$$\text{s.t. } \tilde{v}_r(k) = B(\mathbf{s}_k)\mathbf{u}(k) - \mathbf{v}_r(k-1), \quad (31)$$

其中: $\mathbf{u}_d(k)$ 为执行器期望控制指令, $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为非奇异对称加权矩阵。

定理 2 动态控制分配问题(30)–(31)通解为

$$\mathbf{u}(k) = (I - G(k)B(\mathbf{s}_k))W^{-2}W_1^2\mathbf{u}_d(k) + (I - G(k)B(\mathbf{s}_k))W^{-2}W_2^2\mathbf{u}(k-1) + G(k)(\tilde{v}_r(k) + \mathbf{v}_r(k-1)), \quad (32)$$

其中:

$$G(k) = W^{-2}B^T(\mathbf{s}_k)(B(\mathbf{s}_k)W^{-2}B^T(\mathbf{s}_k))^{-1},$$

$$W = (W_1^2 + W_2^2)^{0.5}.$$

证 混合优化目标 J 可转化为

$$\begin{aligned} J &= \|W_1(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_d(k))\|^2 + \|W_2(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1))\|^2 = \\ &(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_d(k))^T W_1^2 (\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_d(k)) + \\ &(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1))^T W_2^2 (\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)) = \\ &\mathbf{u}^T(k)(W_1^2 + W_2^2)\mathbf{u}(k) + \\ &\mathbf{u}^T(k-1)W_2^2\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{u}_d^T(k)W_1^2\mathbf{u}_d(k) - \\ &2\mathbf{u}^T(k)(W_1^2\mathbf{u}_d(k) + W_2^2\mathbf{u}(k-1)). \end{aligned} \quad (33)$$

定义:

$$W = (W_1^2 + W_2^2)^{0.5}, \quad (34)$$

$$\mathbf{u}_0(k) = W^{-2}(W_1^2\mathbf{u}_d(k) + W_2^2\mathbf{u}(k-1)), \quad (35)$$

则目标函数:

$$\begin{aligned} J_s &= \|W(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_0(k))\|^2 = \\ &(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_0(k))^T W^2 (\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_0(k)) = \\ &\mathbf{u}^T(k)W^2\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}_0^T(k)W^2\mathbf{u}_0(k) - \\ &2\mathbf{u}^T(k)(W_1^2\mathbf{u}_d(k) + W_2^2\mathbf{u}(k-1)). \end{aligned} \quad (36)$$

对比式(33)–(36)可知, J 和 J_s 仅相差一个常数项,即动态控制分配模型可转化为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(k)} J_s &= \|W(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_0(k))\|^2, \\ \text{s.t. } \tilde{v}_r(k) &= B(\mathbf{s}_k)\mathbf{u}(k) - \mathbf{v}_r(k-1). \end{aligned} \quad (37)$$

作变量替换,令 $\mathbf{e}(k) = W(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_0(k))$,则

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_0(k) + W^{-1}\mathbf{e}(k),$$

$$B(\mathbf{s}_k)(\mathbf{u}_0(k) + W^{-1}\mathbf{e}(k)) - \mathbf{v}_r(k-1) = \tilde{v}_r(k).$$

根据伪逆法的结论^[21,24],问题(37)的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k) &= (B(\mathbf{s}_k)W^{-1})^+ (\tilde{v}_r(k) - \\ &B(\mathbf{s}_k)\mathbf{u}_0(k) + \mathbf{v}_r(k-1)), \end{aligned}$$

其中上标“+”表示矩阵的Moore-Penrose逆。从而

$$\begin{cases} \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_0(k) + G(k)(\tilde{v}_r(k) - \\ B(\mathbf{s}_k)\mathbf{u}_0(k) + \mathbf{v}_r(k-1)), \\ G(k) = W^{-1}(B(\mathbf{s}_k)W^{-1})^+. \end{cases}$$

根据式(34)和式(35)可知定理2成立。证毕。

4.2 约束动态控制分配器(Constrained dynamic control allocation)

过驱动飞行器受到结构、载荷等物理约束,执行器的偏转范围是受限的^[26],其位置约束和速率约束可构成凸集

$$\Phi = \{\mathbf{u} | \mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{u}_{\max}, T\rho_{\min} \leq \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1) \leq T\rho_{\max}\},$$

其中: \mathbf{u}_{\max} 和 \mathbf{u}_{\min} 、 ρ_{\max} 和 ρ_{\min} 为执行器位置和速率的最大值和最小值, T 为采样周期。可转化为

$$\begin{cases} \Phi = \{\mathbf{u}(k) | \underline{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{u}(k) \leq \bar{\mathbf{u}}(k)\}, \\ \underline{\mathbf{u}}(k) = \max\{\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}(k-1) + T\rho_{\min}\}, \\ \bar{\mathbf{u}}(k) = \min\{\mathbf{u}_{\max}, \mathbf{u}(k-1) + T\rho_{\max}\}, \end{cases} \quad (38)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}(k)$ 和 $\underline{\mathbf{u}}(k)$ 为执行器当前时刻的上下限。

控制分配方法中处理执行器物理约束的算法主要分为两类,一类是采用有效集等优化算法,另一类就是级联广义逆、串接链等级联算法。由于后一类算法相比前一类实时性好得多^[30],本文借鉴级联广义逆^[1,30]解决部分执行器饱和问题的思想,在无约束动态控制分配器的基础上提出一种带约束的级联动态控制分配方法。其计算步骤如下:

步骤 1 对操纵面进行编号, 记为 κ .

步骤 2 根据式(32)计算 $\mathbf{u}(k)$, 记 $\mathbf{u}(k)$ 中饱和量为 $\mathbf{u}_{\text{sat}}(k)$, 未饱和量为 $\mathbf{u}_{\text{unsat}}(k)$, 相应的编号分别记为 $\kappa_{\text{sat}}(k)$ 和 $\kappa_{\text{unsat}}(k)$. 如果 $\mathbf{u}(k) \in \Phi$, 转步骤6, 否则转步骤3.

步骤 3 记 $\mathbf{u}_{\text{sat}}(k)$ 对应的效率矩阵为 $B_{\text{sat}}(k)$, 可得到使

$$\|\mathbf{v}_r(k) - B_{\text{sat},i}(\mathbf{s}_k)\mathbf{u}_{\text{sat},i}(k)\|_2^2 \quad (39)$$

最小的控制指令 $\mathbf{u}_{\text{sat},i}(k)$, 转步骤4.

步骤 4 如果所有操纵面均饱和, 则转步骤6, 否则转步骤5.

步骤 5 令

$$\mathbf{v}_r(k) = \mathbf{v}_r(k) - B_{\text{sat},i}(\mathbf{s}_k)\mathbf{u}_{\text{sat},i}(k),$$

剔除第 i 副操纵面, 并加入已剔除操纵面组成的向量 $\mathbf{u}_{\text{rej}}(k)$, 更新其对应的编号集 κ_{rej} , 转步骤2.

步骤 6 将编号 κ_{rej} , κ_{sat} 和 κ_{unsat} 与 κ 进行匹配, 重组 $\mathbf{u}_{\text{rej}}(k)$, $\mathbf{u}_{\text{sat}}(k)$ 和 $\mathbf{u}_{\text{unsat}}(k)$, 从而得到操纵面对应的控制指令 $\mathbf{u}(k)$, 计算终止.

注 3 若虚拟控制指令超出了可达集, 则级联动态控制分配器逐次分配控制指令给当前控制性能最好的执行器, 算法至多计算 $m-1$ 次即可终止. 若虚拟控制指令没有超出可达集, 则级联动态控制分配器与无约束动态控制分配器的分配效果一致.

注 4 约束动态控制分配器将执行器动态引入优化目标, 与文献[1, 21, 25]中的静态控制分配器相比, 能够更好地保证系统的动态性能^[30].

5 仿真验证(Simulation experiment)

5.1 仿真模型(Simulation model)

以某多操纵面战斗机仿真模型^[21, 30-31]为对象, 采用图1所示的模块化级联控制结构, 对提出的LPV变增益鲁棒预测跟踪控制方案的有效性进行验证. 控制量 $\mathbf{u}^T = (u_c, u_{le}, u_{re}, u_r)$ 分别表示飞机的鸭翼、左升降副翼、右升降副翼和方向舵, 相应的偏转速率记为 $\boldsymbol{\rho}^T = (\rho_c, \rho_{le}, \rho_{re}, \rho_r)$. 操纵面相互独立, 位置约束为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{max}}^T &= (25, 30, 30, 30), \\ \mathbf{u}_{\text{min}}^T &= -1 \times (55, 30, 30, 30). \end{aligned}$$

相应的速率约束为

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{max}}^T = -\boldsymbol{\rho}_{\text{min}}^T = (50, 150, 150, 100).$$

选择虚拟控制 $\mathbf{v}^T = (v_1, v_2, v_3)$ 分别表示滚转、俯仰和偏航角加速度, 迎角 α 、侧滑角 β 、滚转角速

度 p 、俯仰角速度 q 和偏航角速度 r 为状态量, 参考指令(REF)为 $\mathbf{r}^T = (\alpha, \beta, p)$. 设计以下两种方案与传统增益调度控制方法进行对比仿真实验:

方案 1 LPV变增益控制(LPV control, LPVC)的情形: 根据定理1设计LPV变增益鲁棒预测虚拟控制指令, 再按带操纵面约束的级联动态控制分配方法进行指令分配.

方案 2 传统增益调度(gain-scheduling, GS)的情形: 根据文献[1, 32]在工作点处设计标称飞行控制律和控制分配器, 通过工作点控制参数的拟合直接进行增益调度^[9].

5.2 闭环仿真(Closed-loop simulation)

假设飞机从工作点马赫数 $\text{Ma} = 0.25$, 高度 $H = 3000$ m加速爬升至工作点 $\text{Ma} = 0.35$, $H = 4000$ m, 参数 \mathbf{s}_k 通过线性插值获取, 设计控制器涉及的飞机模型根据实际飞行状态线性化得到, 仿真则采用实际飞机. 在任意时刻 k , 通过构建多面体线性参变增广模型, 根据定理1设计主环虚拟控制律 $\tilde{\mathbf{v}}_r(k)$, 代入定理2求解无约束的控制指令 $\mathbf{u}(k)$, 进而按照约束动态控制分配器即可得到操纵面指令 $\mathbf{u}(k)$.

在 $t = 2 \sim 8$ s时给定最大幅值分别为 25° 的迎角和 $150^\circ/\text{s}$ 的滚转角速度指令. 本文选择鲁棒预测性能加权 $Q_{\tilde{\mathbf{x}}} = I_8$, $R_{\tilde{\mathbf{v}}} = 10^{-4}I_3$, 控制分配权值 $W_1 = I_4$, $W_2 = \text{diag}\{2, 3, 3, 5\}$. 以中间工作点 $\text{Ma} = 0.30$, $H = 3500$ m为参考状态, 按照文献[25]构造虚拟控制指令可达集, 从幅值上定性考察方案1和方案2控制分配器生成的虚拟控制指令与可达集的立体几何关系, 分别如图2-3所示.

对比图2-3可以看出, 两种方案生成的虚拟控制指令与参考可达集边界的幅值相当, 基本没有大范围超出参考可达集的情况, 其中方案1的实际虚拟控制指令分布比较集中.

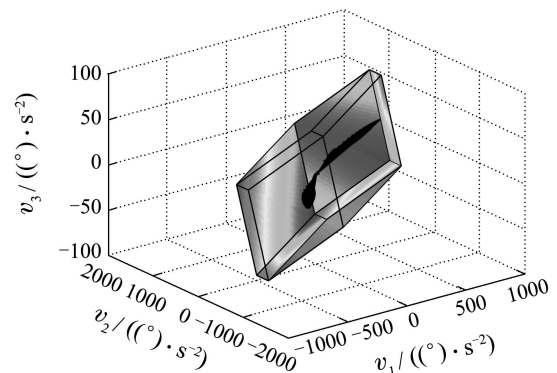


图2 可达集中方案1的虚拟控制指令

Fig. 2 The virtual control of scheme 1 in attainable subset

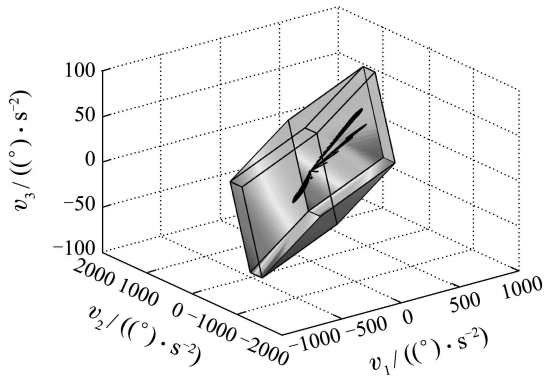


图3 可达集中方案2的虚拟控制指令

Fig. 3 The virtual control of scheme II in attainable subset

图4-6所示分别为方案1和方案2控制作用下飞机的状态响应曲线、操纵面位置以及速率响应曲线. 需要指出的是, 传统增益调度控制不能保证整个工作区间内的鲁棒稳定性、鲁棒性能^[12], 在实际调参过程中不可避免地出现了响应慢、超调量大、跟踪不准确等问题, 必须经过反复的数值调参实验^[9].

图4-6中方案2的仿真则是反复实验得到的一组较好的结果.

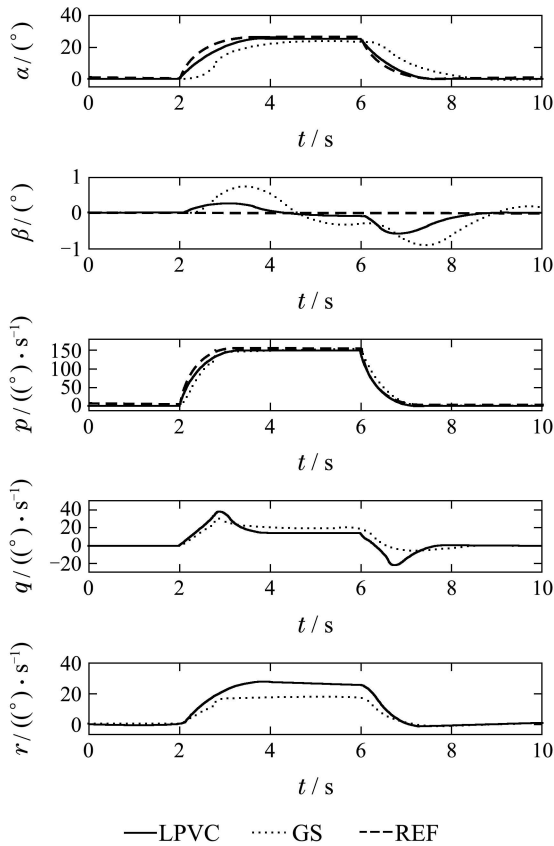


图4 状态的动态响应过程
Fig. 4 The response of states

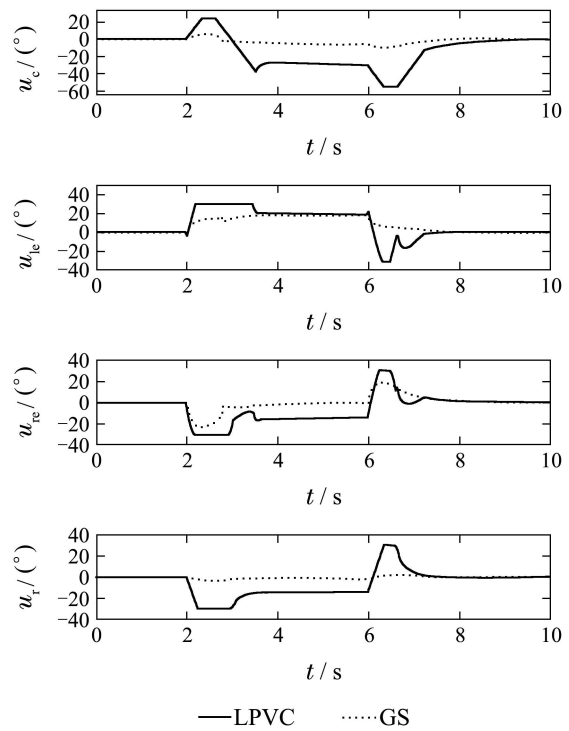


图5 操纵面的动态响应过程
Fig. 5 The response of effectors

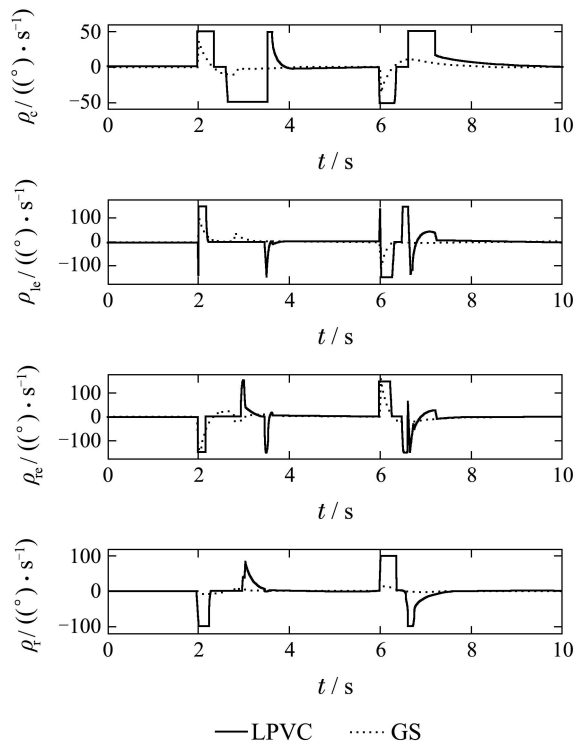


图6 操纵面偏转速率的动态响应过程
Fig. 6 The response of effector rates

由图4-5可以看出, 方案2虽然实现了参考指令的跟踪, 但对迎角和侧滑角的控制性能比较差, 明显地出现了滞后和稳态误差, 俯仰角速度和侧滑角都有一定的超调量. 相比而言, 方案1能

使LPV过驱动飞行控制系统闭环稳定,较好地实现了对参考指令的快速跟踪,并通过考虑冗余执行器的物理特性和动态性能,所有操纵面指令分配协调合理.结合图5-6可知,操纵面指令均未超出偏转的位置约束和速率约束范围,表明了控制分配策略的有效性,其中方案1的动态过程波动比方案2较大.这说明:在参考指令变化较大时鲁棒预测控制器生成了较大的控制指令,控制分配器能够考虑所有操纵面的控制效能,在物理约束范围内使操纵面最快地变化至最大的可达偏转角,以尽可能实现期望虚拟指令,但对参考指令的跟踪仍稍有滞后.值得注意的是,方案1可生成更小的侧滑角,有利于实现飞机的协调转弯.

从总体来看,考虑飞行时变参数设计的方案1不用反复调参,能够更好地发挥冗余操纵面的控制效能,整体优于传统增益调度方案2.

6 结论(Conclusions)

本文针对过驱动飞行器在包线内飞行参数时变的特点,基于鲁棒预测控制理论研究了变增益跟踪控制器的设计问题.在建立飞行器多面体LPV数学模型的基础上,构造了包含跟踪指令误差的增广系统模型.采用增广状态量和虚拟控制增量的二次型无限时域min-max函数为控制性能指标,结合 H_∞ 性能要求将鲁棒预测控制问题转化为线性矩阵不等式凸优化问题,并通过参变量形式转换减少了线性矩阵不等式的个数,设计了主环虚拟控制律.进一步建立了包含执行器动态特性的无约束控制分配模型,并考虑操纵面偏转约束设计了级联动态控制分配策略.在某多操纵面飞行器上的对比仿真表明,LPV变增益控制方案相比传统控制方案有更好的跟踪性能,实现了操纵面的合理分配,能够更好地发挥冗余操纵面的控制效能.但是,LPV变增益控制方案的虚拟控制律设计过程存在控制反馈矩阵的在线计算问题,为提高控制律计算效率、减小保守性,下一步值得从以下3方面展开研究:1)提高求解器运算速度;2)引入扩张(dilation)技术^[20];3)对飞行包线的工作点进行分块,逐块设计可行的虚拟控制律.

参考文献(References):

- [1] ZHANG Y, SURESH V S, JIANG B, et al. Reconfigurable control allocation against aircraft control effector failures [C] // *The 16th IEEE International Conference on Control Applications*. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 1197 – 1202.
- [2] 陈勇,董新民,薛建平,等.多操纵面飞控系统约束自适应控制分配策略[J].系统工程与电子技术,2011,33(5):1118 – 1123. (CHEN Yong, DONG Xinmin, XUE Jianping, et al. Constrained adaptive control allocation for multi-effectors flight control system [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, 33(5): 1118 – 1123.)
- [3] 张平,杨新颖,陈宗基.大飞行包线控制律的神经网络调参设计[J].北京航空航天大学学报,2005,31(6):604 – 608. (ZHANG Ping, YANG Xinying, CHEN Zongji. Neural network gain scheduling design for large envelope curve flight control law [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2005, 31(6): 604 – 608.)
- [4] 史忠科.飞行器模型簇描述及鲁棒控制器设计[J].控制与决策,2004,19(8):911 – 926. (SHI Zhongke. Aircraft manifold model description and robust controller design [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(8): 911 – 926.)
- [5] LI W Q, ZHENG Z Q. Robust gain-scheduling controller to LPV system using gap metric [C] // *Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Information and Automation*. Piscataway, NJ: IEEE, 2008: 514 – 518.
- [6] 张登峰,高金源.多操纵面飞机大包线控制律设计[J].飞行力学,2008,26(6):38 – 42. (ZHANG Dengfeng, GAO Jinyuan. Large-envelope control law design for airplane with multiple control surface [J]. *Flight Dynamics*, 2008, 26(6): 38 – 42.)
- [7] BEI L, FEN W, SUNG W K. Switching LPV control of an F-16 aircraft via controller state reset [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(2): 267 – 277.
- [8] 李中健.大包线飞行控制系统鲁棒设计研究[D].西安:西北工业大学,2000. (LI Zhongjian. *Robust design of large envelop flight control system* [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2000.)
- [9] 熊治国,董新民.程序调参飞行控制律的研究与展望[J].飞行力学,2003,21(4):9 – 13. (XIONG Zhiguo, DONG Xinmin. Study and outlook of gain scheduling flight control law [J]. *Flight Dynamics*, 2003, 21(4): 9 – 13.)
- [10] MEHRABIAN A, ROSHANIAN J. Design of gain-scheduled autopilot for a highly-agile missile [C] // *The 1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics*. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 144 – 149.
- [11] SOULEY H, BOUTAT L, BECIS Y, et al. H_∞ control of a SCARA robot using polytopic LPV approach [C] // *The 14th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 1 – 5.
- [12] 李文强. LPV系统鲁棒变增益控制研究及其应用[D].长沙:国防科技大学,2009. (LI Wenqiang. *Research and application of robust gain-scheduling based on LPV system* [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2009.)
- [13] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.
- [14] 李德伟,席裕庚.有界扰动高效鲁棒预测控制器设计[J].控制理论与应用,2009,26(5):535 – 539. (LI Dewei, XI Yugeng. Design of efficient robust model predictive controller for systems with bounded disturbances [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(5): 535 – 539.)
- [15] 丁宝苍,杨鹏.基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合[J].自动化学报,2006,32(2):304 – 310. (DING Baocang, YANG Peng. Synthesizing off-line robust model predictive controller based on nominal cost [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(2): 304 – 310.)
- [16] FENG L, WANG J, POH E. Multi-objective robust model predictive control: trajectory tracking problem through LMI formulation [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 5589 – 5594.

- [17] 丁宝苍, 邹涛. 约束时变不确定离散系统的输出反馈预测控制综合 [J]. 自动化学报, 2007, 33(1): 78 – 83.
(DING Baocang, ZOU Tao. Synthesizing output feedback predictive control for constrained uncertain time-varying discrete systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(1): 78 – 83.)
- [18] WADA N, SAITO K, SAEKI M. Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependent lyapunov function [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2006, 53(12): 1446 – 1450.
- [19] CASAVOLA A, FAMULARO D, FRANZE G, et al. An improved predictive control strategy for polytopic LPV linear systems [C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 5820 – 5826.
- [20] FRANZE G, FAMULARO D, GARONE E, et al. Dilated model predictive control strategy for linear parameter-varying systems with a time-varying terminal set [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2009, 3(1): 110 – 120.
- [21] ALWI H, EDWARDS C. Fault tolerant control using sliding modes with on-line control allocation [J]. *Automatica*, 2008, 44(4): 1859 – 1866.
- [22] BARKER J, BALAS G J. *Flight control of a tailless aircraft via linear parameter-varying techniques* [R]. American: AIAA, 1999: 941 – 950.
- [23] BUFFINGTON J M, SPARKS A G. Comparison of dynamic inversion and LPV tailless flight control law designs [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 1998: 1145 – 1149.
- [24] 陈勇, 董新民, 薛建平, 等. 飞行器不确定系统鲁棒D-稳定控制分配策略 [J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(1): 14 – 18.
(CHEN Yong, DONG Xinmin, XUE Jianping, et al. Robust D-stability control allocation of uncertain vehicle system [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, 33(1): 14 – 18.)
- [25] PERTERSEN J, BODSON M. Fast implementation of direct allocation with extension to coplanar controls [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, 25(3): 464 – 473.
- [26] 马建军, 郑志强, 胡德文. 包含执行器动力学的子空间预测动态控制分配方法 [J]. 自动化学报, 2010, 36(1): 130 – 138.
(MA Jianjun, ZHENG Zhiqiang, HU Dewen. Subspace predictive dynamic control allocation for overactuated system with actuator dynamics [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(1): 130 – 138.)
- [27] BOYD S, GHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: Studies in Applied Mathematics (SIAM), 1994: 148 – 153.
- [28] FURUTA K, PHOOJARUENCHANACHAIL S. An algebraic approach to discrete-time H_∞ control problems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 1990: 3067 – 3072.
- [29] CHU J, YU L, SU H Y. *Robust Control Theory and Applications* [M]. Zhejiang: Zhejiang University Press, 2005: 53 – 127.
- [30] OLA H. *Backstepping and control allocation with applications to flight control* [D]. Sweden: Linköping University, 2003.
- [31] FORSELL L, NILSSON U. *ADMIRE the aero-data model in a research environment version 4.0, model description* [R]. Sweden: Swedish Defence Agency, 2005: 25 – 34.
- [32] STEVENS B L, LEWIS F L. *Aircraft Control and Simulation* [M]. New York: John Wiley & Sons, 2003: 359 – 376.

作者简介:

陈勇 (1984–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为控制分配、故障诊断、容错控制, E-mail: chen_y043@163.com;

董新民 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为飞行器控制理论及应用, E-mail: dongxinmin@139.com;

薛建平 (1968–), 男, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为航空设备检测、智能故障诊断, E-mail: xue_jianping@163.com;

郭创 (1978–), 男, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为多操纵面飞机导航、制导与控制, E-mail: guochuang001@163.com.