

## 多智能体系统最优持久编队自动生成

罗小元<sup>1†</sup>, 邵士凯<sup>1</sup>, 关新平<sup>1,2</sup>, 赵渊洁<sup>3</sup>

(1. 燕山大学 电气工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 上海交通大学 电子信息与电气工程学院, 上海 200240;

3. 天津理工大学 计算机与通信工程学院, 天津 300384)

**摘要:** 在最优刚性编队基础上, 本文研究了多智能体系统的最优持久编队自动生成算法, 所得算法能最大限度地减少维持编队结构稳定所需的信息交互量. 首先, 对于任意的最小刚性图, 提出了缩减其范围的两种刚性逆操作; 然后, 设计了将包含于此两种操作中的无向边增加方向的规则, 以使对应顶点的出度不大于2; 并且在此基础上得到了任意最小持久图的生成算法, 保证了最优持久编队的生成. 最后, 进行仿真研究, 验证了提出算法的有效性.

**关键词:** 多智能体; 最优持久编队; 最小持久图; 刚性逆操作

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Automatic generation of optimal persistent formation for multi-agent systems

LUO Xiao-yuan<sup>1†</sup>, SHAO Shi-kai<sup>1</sup>, GUAN Xin-ping<sup>1,2</sup>, ZHAO Yuan-jie<sup>3</sup>

(1. Department of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China;

2. School of Electronic, Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

3. School of Computer and Communication Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

**Abstract:** Based on the optimal rigid formation, an algorithm for automatic generation of optimal persistent formation for multi-agent systems is presented. The amount of information interaction for maintaining the stabilization of the formation configurations can be maximally decreased by using the algorithm. First, for any minimal rigid graph, two rigid reverse operations are presented to curtail them; then, the rules for adding directions for undirected edges contained in the two operations are designed to make the protrusion degrees of the corresponding vertices less than 2. Based on the rules, the algorithm of generating any minimal persistent graph is obtained, and the generation of optimal persistent formation is guaranteed. Finally, simulation results are presented to show the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** multi-agent system; optimal persistent formation; minimal persistent graph; rigid reverse operation

### 1 引言(Introduction)

近10年来, 多智能体协调控制已成为国内外控制与通讯领域研究者的关注热点, 多智能体协调控制问题有着广泛的研究方向, 如多机器人编队控制<sup>[1-2]</sup>、多智能体群集运动<sup>[3-4]</sup>、一致性<sup>[5-6]</sup>等. 这些研究有着共同的特点: 单个智能体缺乏对整个智能体系统的全局信息了解, 但能通过与其邻居交换信息来完成一定的全局行为.

作为多智能体协调控制中的基本研究方向之一, 智能体编队控制是指多个智能体相互交流信息、协调控制, 用以完成单个智能体难以完成的特定任务. 图论已经广泛应用于编队控制中, Olfati-Saber在文献[7]中提出了设计和分析分布式群集算法的理

论框架, 但其研究的是无向图, 且每个智能体都与邻居智能体进行通信, 当智能体数目较多时, 将导致智能体间的通信复杂度很高. 一些学者对如何降低通信复杂度进行了研究, 并提出了最小刚性编队和最小持久编队概念<sup>[8-11]</sup>. 最小刚性编队和最小持久编队是一类特殊的编队结构, 用来保持编队结构稳定, 同时减少通信边数, 以减少通信复杂度. 在过去几年, Smith等<sup>[12]</sup>研究了通过有向图中增加顶点的操作来生成最小持久编队的算法, 并提出了基于PebbleGame的分布式策略. Hendrickx等在文献[13-14]中主要从图论的角度分析研究了最小刚性图和最小持久图中关于顶点和边的具体操作, 但没有给出最小持久编队生成算法.

收稿日期: 2012-05-21; 收修改稿日期: 2012-08-27.

†通信作者. Tel.: +86 13643361077.

基金项目: 国家重点基础研究(973计划)资助项目(2010CB731800); 国家自然科学基金资助项目(61074065); 河北省自然科学基金资助项目(F2012203119).

文献[12-14]中的方法减少了维持编队结构稳定所需的通信边数,但最小刚性编队和最小持久编队不是唯一的,在最小刚性编队和最小持久编队基础上还可进行优化,以降低通信复杂度,减少通信能量消耗.文献[15]考虑了通信边的权值,利用分布式方法研究了最优刚性编队的生成,但编队内部通信是双向的.文献[16]提出了最优持久编队生成算法,但算法只适用于特殊结构的编队.

基于最小持久图中的图形操作和分布式最优刚性编队生成,本文提出了一种新的最优持久编队生成算法.所提算法能够在维持编队结构稳定的同时,最大限度的减少编队内部的信息交互量,降低通信复杂度,减少通信能量消耗;同时任何最小刚性编队均可利用本文算法得到对应的最小持久编队,应用范围更加广泛.

## 2 图论基础(Graph theory basis)

### 2.1 编队形状和结构保持(Frameworks of formations and shape maintenance)

多智能体编队包括移动智能体和智能体之间的通信链接. $G(V, E)$ 表示平面中多智能体编队对应的基础图, $V$ 表示图中各个顶点集合,对应于编队中智能体; $E$ 表示图中各条连线集合,对应于智能体之间的通信链接,所有边 $E$ 的加权和表示编队的通信复杂度.为了简单,将含有 $n$ 个顶点的图记为 $G_n$ .编队中每个智能体通信能力有限,只能在其通信范围内与其他智能体进行通信,称能够通信的两个智能体互为邻居.在基础图 $G(V, E)$ 中,顶点 $i$ 的邻居集表示为 $N_i = \{j : (i, j) \in E\}$ ,与其相连的邻居个数称为顶点 $i$ 的连通度,记为 $d(i)$ .顶点 $i, j$ 之间的距离记为 $d_{ij}$ ,邻接矩阵记为 $[A_{ij}]$ ( $a_{ii} = 0$ ,当 $(i, j) \in E$ , $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ,否则 $a_{ij} = 0$ ),其中边 $(i, j)$ 表示智能体 $i, j$ 之间有通信链路.

实际中许多情况要求多智能体编队保持队形.例如,一组无人驾驶飞机(UAV)在飞行中保持队形,同时每个UAV和其余UAV需要保持约束间距.令 $d_{ij}$ 表示第 $i$ 个和第 $j$ 个UAV间的距离, $d$ 表示他们间的约束间距.如果 $\|d_{ij} - d\| < \varepsilon$ , $\varepsilon$ 是允许误差,那么认为两个UAV保持约束间距.如果任意两个UAV都保持约束间距的话,那么编队队形将保持不变.

### 2.2 刚性图和刚度矩阵(Rigid graph and rigidity matrix)

在编队基础图中, $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$ 表示 $G(V, E)$ 中的各个点的坐标, $p_i(t)$ ( $t \geq 0$ )表示第 $i$ 个点的运动轨迹.边长恒定轨迹(edge-consistent trajectory)定义为 $\|p_i(t) - p_j(t)\| = a$ ( $a$ 为常量且 $(i, j) \in E$ ).刚性轨迹(rigid trajectory)指编队在运动过程中所有对应点 $p_i(t)$ 和 $p_j(t)$ 的距离保持恒定.一个编队对应

的基础图是刚性图(rigid graph),当且仅当所有的边长恒定的轨迹全是刚性轨迹;当基础图不是刚性图时,称其为可变形图(flexible graph).如图1所示,图1(a)和图1(b)为可变形图,图1(c)为刚性图.

最小刚性图<sup>[13]</sup>是刚性图中的一类特殊的图.是指能够维持刚性且具有最少边数的一类刚性图.在 $\mathbb{R}^2$ 中,含有 $n$ ( $n \geq 2$ )个顶点的刚性图是最小刚性图,当且仅当其边数为 $e = 2n - 3$ , $e$ 为边数.如图1(c)所示刚性图即为最小刚性图.对无向图中每条边加权,可以得到最优刚性图,最优刚性图是一类特殊的最小刚性图,由文献[15]得其定义如下:

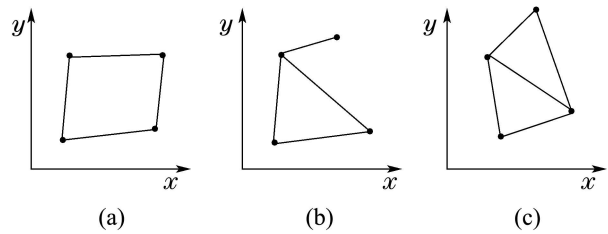


图1 可变形图和刚性图

Fig. 1 Flexible graph and rigid graph

**定义1** 一个无向图是最优刚性图,如果满足以下条件:

- 1) 对应的图是无穷小刚性的(infinitesimally rigid);
- 2) 在所有相同顶点数的刚性图中,其各边边长加权和最小.

无穷小刚性是有关刚性图的一种特殊属性,对于给定的刚性图,可以利用刚度矩阵来判断其是否为无穷小刚性的,刚度矩阵定义如下:

一个结构有 $n$ 个顶点,每个顶点是 $p_i \in \mathbb{R}^r$ ,其坐标按顺序排为 $\{p_1^1, \dots, p_1^r, p_2^1, \dots, p_n^1, \dots, p_n^r\}$ ,可以建立一个矩阵 $M \in \mathbb{R}^{|E| \times nr}$ ,其行和列分别对应此结构的边和对应顶点的坐标差值.这样建立的矩阵就称为刚度矩阵(rigidity matrix).关于刚度矩阵,由文献[17]有如下两个引理.

**引理1**  $M$ 是 $r$ 维空间中有 $n$ 个顶点的一般结构的刚度矩阵.在有 $n$ ( $n \geq 3$ )个顶点的二维空间中,这个结构是无穷小刚性的当且仅当 $\text{rank}(M) = 2n - 3$ .

由引理1知道,若一个无向结构为无穷小刚性的,则它含有的无向边数目为 $e \geq 2n - 3$ .

**引理2** 无穷小刚性属于刚性.

由引理1和2容易知道,若一个无向图为无穷小刚性图并且含有的边数为 $e = 2n - 3$ ,则此无向图为最小刚性图,可将此作为判断最小刚性图的依据.

### 2.3 持久图(Persistent graph)

持久图是有向图,持久图中各边皆为有向边,其方向性用顶点出度表示,顶点 $i$ 的出度记为 $d^-(i)$ ,有

向边 $(i, j)$ 中,  $d^-(i) = 1, d^-(j) = 0$ . 文献[13]给出了持久图和最小持久图概念, 如定义2和3所示.

**定义 2** 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 如果一个有向图中每个顶点的出度 $d^-(i) \leq 2$ , 且其对应的无向图是刚性图, 则这个有向图是持久图.

**定义 3** 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 一个有向图是最小持久图, 当且仅当其各个顶点出度 $d^-(i) \leq 2$ 且其对应的无向图是最小刚性图.

由最小持久图可得到最优持久图, 定义如下:

**定义 4** 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 一个有向图是最优持久图, 当且仅当其各个顶点出度 $d^-(i) \leq 2$ 且其对应的无向图是最优刚性图.

一个智能体编队系统是最优持久编队, 当且仅当其对应的通信拓扑图为最优持久图. 在最优持久编队系统中, 维持编队结构稳定所需的通信复杂度最小, 智能体之间的通信能量消耗也最小.

### 3 最小刚性图的持久化(Persistence of minimally rigid graph)

#### 3.1 增加顶点与边分离(Vertex addition and edge splitting)

在图2(a)中,  $j, k$ 是已知最小刚性图中两个不同顶点, 增加顶点 $i$ 操作是指新增加顶点 $i$ 同时增加边 $(i, j)$ 和 $(i, k)$ . 若原最小刚性图含顶点 $n$ 个, 则易知新得到的含有 $n + 1$ 个顶点的图也是最小刚性图, 即增加顶点操作具有刚性特性. 在图2(b)中,  $j, k, l$ 是已知最小刚性图中3个不同顶点, 其中 $j, l$ 之间有边 $(j, l)$ , 边分离 $i$ 操作是指增加顶点 $i$ , 连接与其相关的边 $(i, j), (i, k), (i, l)$ , 同时去掉原边 $(j, l)$ . 若原最小刚性图含有 $n$ 个顶点, 则易知新得到的含有 $n + 1$ 个顶点的图也是最小刚性图, 即边分离操作也具有刚性特性.

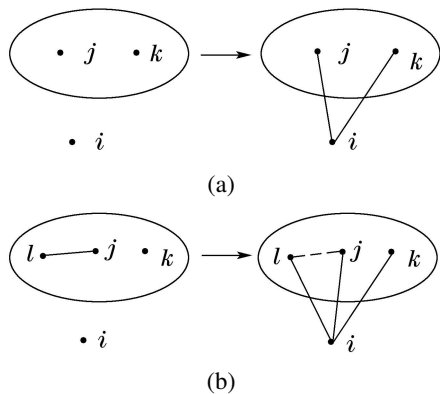


图 2 增加顶点与边分离

Fig. 2 Vertex addition and edge splitting

在边分离操作中, 边 $(j, l)$ 的作用是维持顶点 $j, l$ 之间的刚性, 将其删去后, 顶点 $j, l$ 之间所需刚

性由边 $(i, l), (i, j)$ 维持, 即边 $(j, l)$ 与边 $(i, l), (i, j)$ 作用相同, 称这样的两组边互为等效边.

利用增加顶点操作和边分离操作可以增加最小刚性图中顶点数目, 扩大最小刚性图范围, 下面介绍利用此两种操作扩展最小刚性图的理论.

哈尼伯格序列<sup>[13]</sup>(henneberg sequence)是关于图 $G_2, G_3, \dots, G_n$ 的一个序列, 其中 $G_2$ 是包含两个顶点的完全图,  $G_i (i \geq 3)$ 由 $G_{i-1}$ 通过增加顶点操作或边分离操作生成获得. 由于增加顶点操作和边分离操作保证了生成过程的最小刚性, 同时 $G_2$ 是最小刚性的, 所以序列中的每个图都是最小刚性图. 文献[13]还给出了关于此序列的如下定理.

**定理 1** 每个最小刚性图 $G_n (n \geq 2)$ 均可作为一个哈尼伯格序列的结果而获得.

定理1指出了任意最小刚性图均可利用两种顶点操作而获得. 根据定理1, 有如下推论:

**推论 1** 每个最小刚性图 $G_n (n \geq 3)$ 中, 至少包含一个连通度为2或3的顶点.

**证** 根据定理1, 每个最小刚性图都可以由进行增加顶点操作或边分离操作而获得. 而对每个顶点执行增加顶点操作和边分离操作后, 其连通度为2或3. 故每个最小刚性图中至少包含一个连通度为2或3的顶点. 证毕.

#### 3.2 增加顶点逆与边分离逆(Reverse vertex addition and reverse edge splitting)

增加顶点操作和边分离操作有可逆性, 分别对应增加顶点逆操作和边分离逆操作. 增加顶点逆操作如图3(a)所示, 是指去掉顶点 $i (d(i) = 2)$ 及与 $i$ 相关的边 $(i, j), (i, k)$ ; 边分离逆操作如图3(b)所示, 是指去掉顶点 $i (d(i) = 3)$ 及与顶点 $i$ 相关的边 $(i, j), (i, k), (i, l)$ , 同时在顶点 $l, k, j$ 之间新增加一条边, 如新增加边 $(l, j)$ . 容易知道, 最小刚性图中对顶点 $i$ 执行增加顶点逆操作和边分离逆操作的条件分别为 $d(i) = 2$ 和 $d(i) = 3$ .

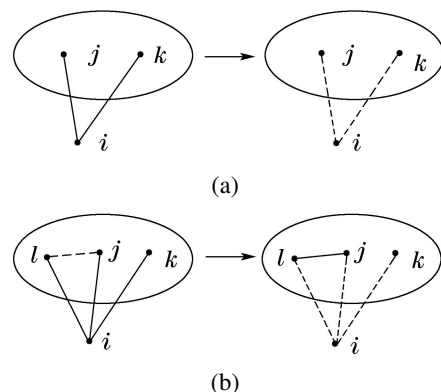


图 3 增加顶点逆与边分离逆

Fig. 3 Reverse vertex addition and reverse edge splitting

假设任意最小刚性图 $G_n$ ,  $i$ 为其中顶点, 若 $d(i) = 2$ , 对 $i$ 执行增加顶点逆操作, 易知剩余无向图 $G_{n-1}$ 为最小刚性图, 即增加顶点逆操作具有刚性特性; 若 $d(i) = 3$ , 对 $i$ 执行边分离逆操作, 则剩余无向图 $G_{n-1}$ 不一定是最小刚性图, 边分离逆操作不一定具有刚性特性. 如图4所示,  $d(i) = 3$ , 对顶点 $i$ 执行边分离逆操作, 则需在顶点 $j, k, l$ 之间新增一条边, 当新增边为 $(k, j)$ 或 $(k, l)$ 时, 如图4(b)所示, 剩余部分仍为最小刚性图, 此时边分离逆操作具有刚性特性; 当新增边为 $(j, l)$ 时, 如图4(c)所示, 剩余部分不是最小刚性图, 此时边分离逆操作不具有刚性特性.

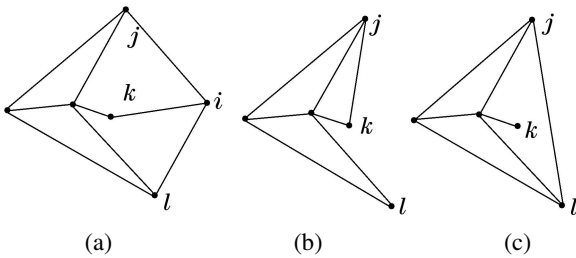


图4 边分离逆的刚性与非刚性特性  
Fig. 4 Rigid and nonrigid characteristics of reverse edge splitting

假设任意最小刚性图 $G_n$ 中,  $d(i) = 3$ , 与顶点 $i$ 相关的3顶点为 $l, j, k$ . 对顶点 $i$ 执行边分离逆操作, 则新增加边有3种可能性, 如图5所示. 对于其中的每一种情况, 其对应的边分离逆操作不一定具有刚性特性, 但在3种情况中, 至少有一种使对应的边分离逆操作具有刚性特性, 下面对此进行证明.

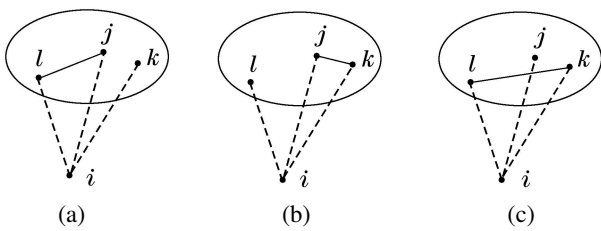


图5 边分离逆的3种情况  
Fig. 5 Three cases of reverse edge splitting

**定理2** 最小刚性图 $G_n$ 中, 若 $d(i) = 3$ ,  $N_i = \{j, k, l\}$ , 则去除顶点 $i$ 及与 $i$ 相关的边后, 至少存在一条边 $e \in \{(j, k), (j, l), (k, l)\}$ , 使包含边 $e$ 的剩余图为最小刚性图.

**证** 令 $V_{n-1}$ 为最小刚性图 $G_n$ 去掉 $i$ 后的顶点集合,  $G_{n-1}$ 为仅包含 $V_{n-1}$ 的最小刚性图. 分析可知, 在最小刚性图 $G_{n-1}$ 基础上, 当且仅当对顶点 $i$ 执行边分离操作后, 能够得到最小持久图 $G_n$ . 设 $V_{n-1}$ 中与顶点 $i$ 相关的顶点为 $j, k, l$ , 由边分离操作可知, 对顶点 $i$ 执行边分离操作, 则会删除一条边 $e \in \{(j, k), (j, l), (k, l)\}$ . 而在最小刚性图 $G_n$ 进行边分离逆操作, 去掉顶点 $i$ 的过程中, 需要在顶点 $j, k, l$ 之间增加新边, 新

边有3种可能性, 即可能为 $(j, k)$ 或 $(j, l)$ 或 $(k, l)$ . 由于 $e \in \{(j, k), (j, l), (k, l)\}$ , 故3种可能新增加的边中必定有一条即为 $e$ , 而 $e$ 是最小刚性图 $G_{n-1}$ 中的边, 故包含边 $e$ 的剩余图 $G_{n-1}$ 为最小刚性图. 证毕.

定理2说明, 执行边分离逆操作后, 在可能生成的3种无向图中, 至少有一种对应为最小刚性图. 在此基础上定义刚性边分离逆操作, 如图5所示,  $j, k, l, i$ 是最小刚性图 $G_n$ 的顶点, 其中 $d(i) = 3$ , 顶点之间存在边 $(i, j), (i, k), (i, l)$ . 对 $G_n$ 执行以下操作:

- 1) 去掉顶点 $i$ 及边 $(i, j), (i, k), (i, l)$ ;
- 2) 新增加边 $(k, j)$ 或 $(k, l)$ 或 $(l, j)$ .

若2)中新增加边使得剩余无向图 $G_{n-1}$ 为最小刚性图, 则称1)和2)组成的操作为刚性边分离逆操作.

增加顶点逆操作具有刚性特性, 对顶点执行此操作, 能够保证剩余无向图的刚性特性; 而边分离逆操作中, 只有刚性逆操作能保证剩余无向图的刚性特性, 下面研究确定刚性边分离逆操作的方法.

对任意顶点 $i(d(i) = 3)$ 执行边分离逆操作, 通过剩余无向图的刚度矩阵的秩判断此逆操作是否为刚性逆操作. 文献[15]给出了利用分布式策略生成最优刚性图的方法, 本文利用其给出的分布式方法得到剩余无向图的刚度矩阵. 若 $\text{rank}(M_{n-1}) = 2(n-1) - 3$ , 其中 $M_{n-1}$ 为剩余无向图的刚度矩阵, 则此逆操作为刚性边分离逆操作; 若 $\text{rank}(M_{n-1}) < 2(n-1) - 3$ , 则此逆操作不是刚性边分离逆操作. 利用剩余无向图的刚度矩阵的秩判断刚性边分离逆操作后, 得到的剩余无向图为最小刚性图.

对于已知的最小刚性图, 对其执行增加顶点逆操作和刚性边分离逆操作, 能不断缩小最小刚性图范围, 可得到如下结论.

**定理3** 对任意最小刚性图 $G_n(n \geq 3)$ , 执行增加顶点逆操作和刚性边分离逆操作, 最终得到含有两个顶点的完全图 $G_2$ .

**证** 由推论1可知, 最小刚性图中至少存在一个连通度为2或3的顶点, 对此顶点执行增加顶点逆操作或刚性边分离逆操作, 可知得到含 $n-1$ 个顶点的图 $G_{n-1}$ . 由于对应逆操作的刚性特性, 可知 $G_{n-1}$ 为最小刚性图. 再对 $G_{n-1}$ 进行增加顶点逆操作或边分离逆操作, 得到最小刚性图 $G_{n-2}$ , 依此类推, 进行增加顶点逆操作或刚性边分离逆操作, 不断减少最小刚性图中的顶点数目. 当最小刚性图为 $G_3$ 时, 对其执行增加顶点逆操作, 得到含有两个顶点的完全图 $G_2$ , 对 $G_2$ 无法进行增加顶点逆操作或刚性边分离逆操作, 故最终得到的剩余图为完全图 $G_2$ . 证毕.

定理3证明了在最小刚性图 $G_n(n \geq 3)$ 减少顶点数目和缩小刚性图范围的过程中, 所需执行的操作仅为增加顶点逆操作或刚性边分离逆操作.

### 3.3 逆操作的有向化(Direction assigning of reverse operations)

此节设计了增加顶点逆操作和刚性边分离逆操作的有向化,对任意最小刚性图应用逆操作的有向化,可以不断将最小刚性图的无向边实现有向化.根据有向图与无向图的关系,总有如下结论.

**引理3** 对于给定的最小刚性图 $G_n$ ,对其中的每条无向边进行合适有向化,则可以使每个顶点满足 $d^-(i) \leq 2$ ,能得到 $G_n$ 对应的最小持久图.

**证** 最小刚性图 $G_n$ 中,顶点为了满足持久图中顶点出度要求,即 $d^-(i) \leq 2$ ,能具有的最大总出度为 $\sum_{\max} d^-(i) = 2n$ ,而最小持久图系统的总出度为 $\sum_{pst} d^-(i) = 2n$ .最小刚性图系统中顶点能具有的最大总出度数大于最小持久图系统总出度数,故对最小刚性图无向边进行合适有向化,总能使每个顶点满足 $d^-(i) \leq 2$ ,总能得到对应的最小持久图.

证毕.

引理3证明了每个最小刚性图总有对应的最小持久图.下面设计逆操作的有向化,通过逆操作的有向化,对最小刚性图中的每条无向边进行有向化,同时确保顶点出度不大于2.

所设计的逆操作有向化包括增加顶点逆操作的有向化和刚性边分离逆操作的有向化.增加顶点逆操作的有向化如图6(a)所示,是指对顶点 $i$ 执行增加顶点逆操作,并将操作过程中对应于最小刚性图 $G_n$ 的无向边 $(i, j)$ ,  $(i, k)$ 有向化为 $(\vec{i, j})$ ,  $(\vec{i, k})$ ,以使顶点 $i$ 出度 $d^-(i) = 2$ ;刚性边分离逆操作的有向化如图6(b)–6(d)所示,是指先对顶点 $i$ 执行刚性边分离逆操作(假设 $(l, j)$ 为新增加的边),再将对应于 $G_n$ 中的无向边 $(i, j)$ ,  $(i, k)$ ,  $(i, l)$ 进行有向化,3条无向边有向化后方向为

1) 无向边 $(i, k)$ 有向化后为 $(\vec{i, k})$ ;

2) 无向边 $(i, j)$ ,  $(i, l)$ 的方向取决于新增加边 $(l, j)$ 有向化后的方向.若 $(l, j)$ 有向化后为 $(\vec{j, l})$ ,如图6(c)所示,则 $(i, j)$ ,  $(i, l)$ 对应的有向边为 $(\vec{j, i})$ ,  $(\vec{i, l})$ ;若 $(l, j)$ 有向化后为 $(\vec{l, j})$ ,如图6(d),则 $(i, j)$ ,  $(i, l)$ 对应的有向边为 $(\vec{l, i})$ ,  $(\vec{i, j})$ .

对顶点 $i$ 执行刚性边分离逆操作有向化后,顶点 $i$ 出度为 $d^-(i) = 2$ ,满足了持久图中顶点的出度要求.新增加边 $(l, j)$ 与 $G_n$ 中边 $(i, j)$ ,  $(i, l)$ 互为等效边,  $(l, j)$ 有向化后的边与 $(i, j)$ ,  $(i, l)$ 对应的有向边互为等效边.

在2)中无向边 $(i, j)$ ,  $(i, l)$ 的方向取决于 $(l, j)$ 有向化后的方向,是由于 $(l, j)$ 对应的有向边与 $(i, j)$ ,  $(i, l)$ 对应的有向边互为等效边,两组有向边对有向图中顶点 $i$ 和 $j$ 的出度的作用相同,而 $(l, j)$ 对应的有向边又可以通过后文设计的其他操作进行确定.需

要注意的是,新增边 $(l, j)$ 不是最小刚性图 $G_n$ 中的边,只是图 $G_n$ 有向化过程中的辅助边,故在 $G_n$ 对应的有向图中不包含 $(l, j)$ 对应的有向边,同时 $(l, j)$ 的有向边不会改变顶点 $l$ 或 $j$ 的出度.

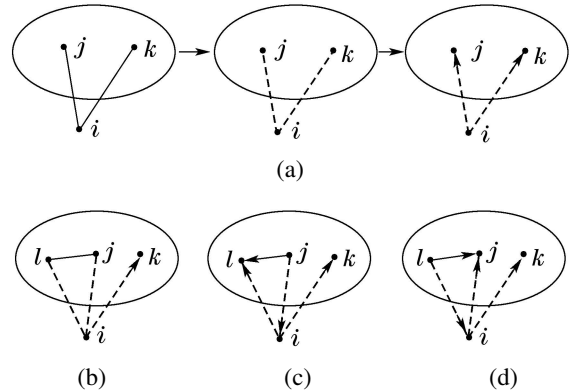


图6 两种逆的有向化

Fig. 6 Direction assigning of the two reverse operations

**定理4** 对于给定的任意最小刚性图 $G_n$  ( $n \geq 3$ ),执行增加顶点逆操作和刚性边分离逆操作,并将逆操作进行有向化,则最终将剩余一条无向边,将此无向边进行有向化,最终生成 $G_n$  ( $n \geq 3$ )对应的最小持久图.

**证** 由定理3可知,对最小刚性图 $G_n$  ( $n \geq 3$ )进行增加顶点逆操作和刚性边分离逆操作,则最终剩余一条无向边,设剩余无向边为 $(l, j)$ .易知由图 $G_n$ 得到图 $(l, j)$ 时,总共执行逆操作次数为 $n - 2$ 次.对 $n - 2$ 次逆操作进行有向化,则除去无向边 $(l, j)$ , $G_n$ 中剩余的 $2n - 4$ 条无向边都实现了有向化,并且使对应的 $n - 2$ 个顶点的出度皆为2.再对剩余无向边 $(l, j)$ 进行有向化,可知顶点 $l$ 和 $j$ 出度小于2,最小刚性图 $G_n$ 中所有无向边实现了有向化,设此有向图为 $\vec{G}_n$ ,则在有向图 $\vec{G}_n$ 中,对任意顶点都有 $d^-(i) \leq 2$ ,且无向图 $G_n$ 为最小刚性图,故 $\vec{G}_n$ 为 $G_n$ 对应的最小持久图. 证毕.

**注1** 本文通过定理1–4将最小刚性图进行刚性分解并逐步进行有向化,所给定理不仅将应用范围扩展至任意最小刚性图,同时还首次提出了刚性逆操作,保证了每次执行逆操作后剩余无向图的刚性特性,解决了任意最小持久图的生成问题.

## 4 生成算法(Generation algorithm)

文献[15]给出了分布式最优刚性编队生成算法,本文在此基础上,考虑到最优刚性编队中邻居智能体之间的通信链路,利用设计的增加顶点逆操作有向化和刚性边分离逆操作有向化,对无向通信链路进行有向化,再利用文献[15]中的分布式策略获得刚度矩阵来判断剩余无向图的最小刚性,最终生成了最优持久编队,进一步降低了编队的通信复杂度,减少了通信能量消耗.图7给出了最优持久编队生成算法.

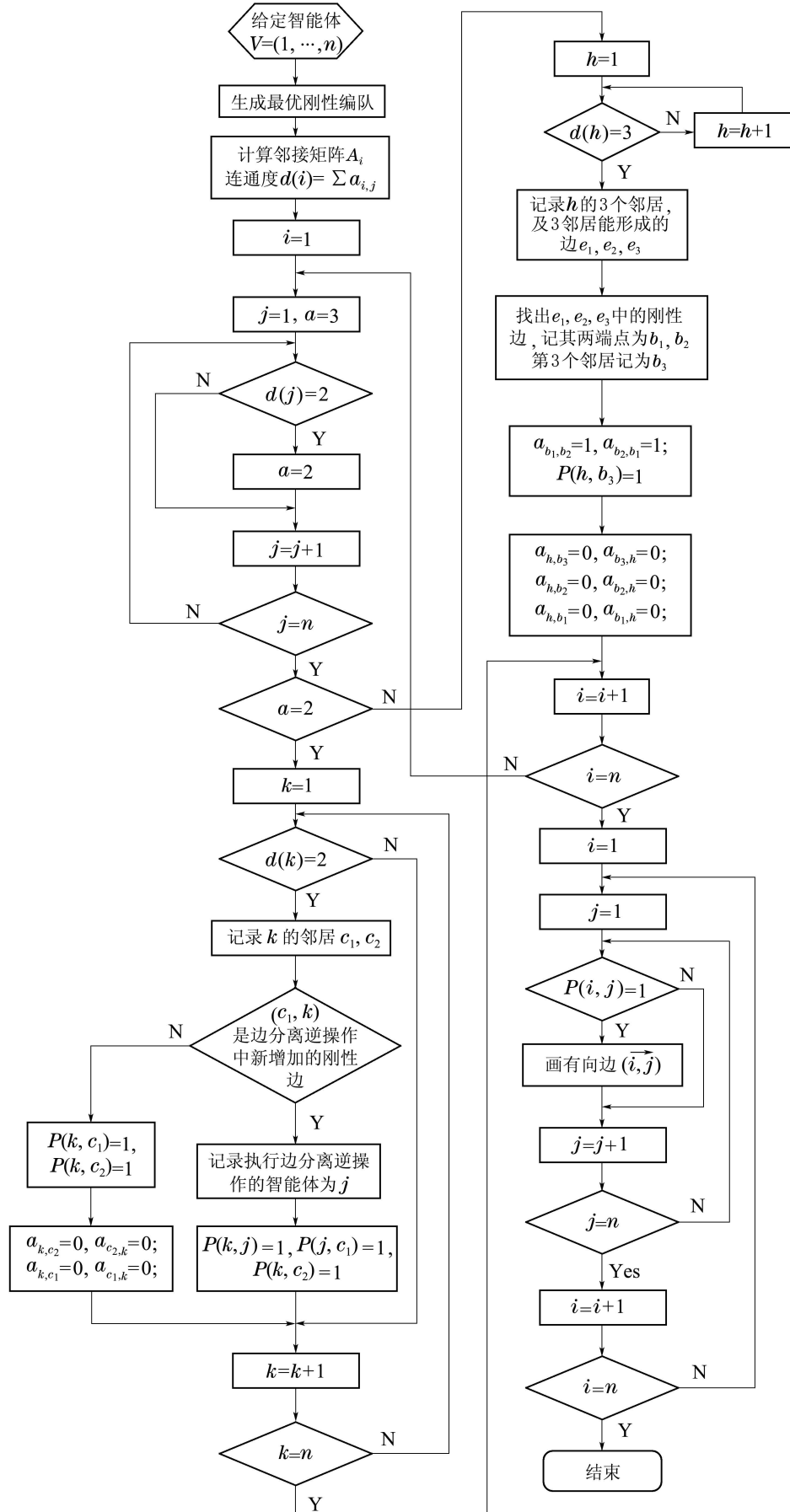


图7 最优持久编队生成算法

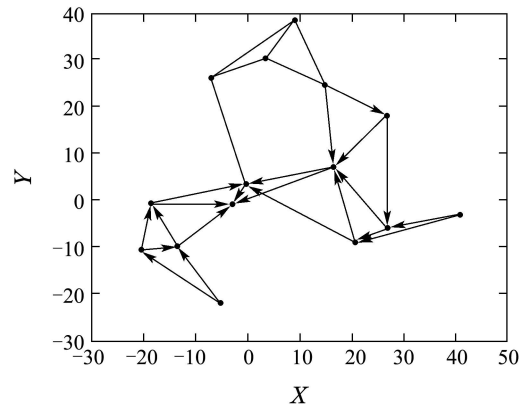
Fig. 7 Generation algorithm of optimal persistent formation

算法中 $P(i, j)$ 为有向边 $(i, j)$ 的矩阵表示, 若存在有向边 $(i, j)$ , 则 $P(i, j) = 1$ , 否则 $P(i, j) = 0$ . 通过算法实现了生成的最优刚性编队通信拓扑的有向化, 编队中的所有通信边为有向边, 并且保证了每个智能体的通信邻居个数小于等于2, 算法实现的有向编队即为最优持久编队.

### 5 仿真研究(Simulation study)

本节通过实例仿真来验证算法的有效性. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 列举包含15个智能体的编队, 每个智能体由对应黑点表示, 智能体的通信半径 $\Delta = 30$ .

仿真结果如图8-9所示, 图8(a)为对给定的智能体采用文献[7]中的方法得到的编队通信拓扑, 其中每个智能体与通信范围内的邻居进行通信; 图8(b)为由文献[15]得到的最优刚性通信拓扑; 图8(c)为采用文献[16]的有向化方法得到的通信拓扑, 可知其中只有部分通信边实现了有向化. 图9为本文设计的算法生成的最优持久通信拓扑图, 其是在图8(b)的基础上进行无向通信拓扑逆的有向化, 使所有无向通信边实现有向化, 进而生成最优持久通信拓扑, 其中两条虚线表示边分离逆操作中的两条新增辅助边.



(c) 由文献[16]得到有向化后的拓扑

图 8 编队的3种拓扑结构

Fig. 8 Three topologies of the formation

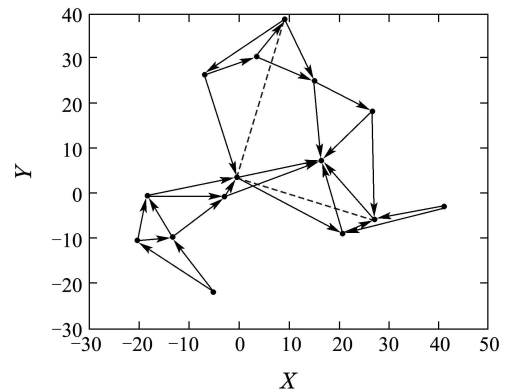


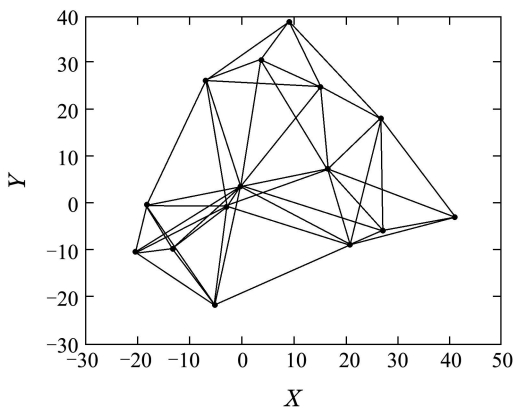
图 9 最优持久拓扑

Fig. 9 The optimal persistent topology

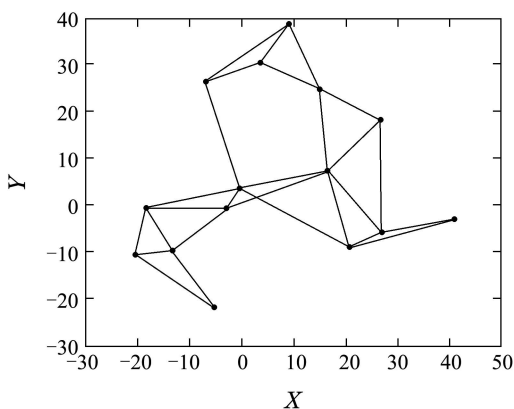
通信拓扑图中的无向边表示相邻智能体之间为双向通信, 有向边表示智能体之间为单向通信. 与图8(a)和图8(b)比较可知, 本文所得通信拓扑减少了编队间的通信边数, 将双向通信拓扑转变为单向通信拓扑, 降低了编队间的通信复杂度, 减少了通信能量消耗. 同时, 图8(c)说明文献[16]中的算法只能实现部分最小刚性拓扑的有向化, 而本文设计的持久通信拓扑生成算法能够实现任何最小刚性拓扑的有向化, 适用范围更广.

### 6 结论(Conclusions)

研究了二维空间中基于最优刚性编队的最优持久编队生成算法, 通过设计的两种刚性逆操作有向化实现了最优刚性编队中所有通信边的有向化, 保证了每个智能体的出度不大于2. 所得的最优持久编队使系统通信复杂度在最优刚性编队基础上降低了一半, 并且最大限度地减少了维持编队结构稳定所需的信息交互量. 同时, 提出的刚性图持久化算法对任何最小刚性图均适用, 都可以实现其对应的最小持久图的生成, 丰富了刚性图论的理论知识.



(a) 由文献[7]得到的编队拓扑



(b) 由文献[15]得到的最优刚性拓扑

下一步可以研究拓扑动态变化过程中的优化问题,也可以研究三维空间中最小刚性图的持久化理论.

### 参考文献(References):

- [1] LIN P, JIA Y. Distributed rotating formation control of multi-agent systems [J]. *Systems and Control Letters*, 2010, 59(10): 587 – 595.
- [2] HONG Y, GAO L, CHENG D, et al. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology [J]. *Automatica*, 2006, 42(7): 1177 – 1182.
- [3] LU X Q, AUSTIN F, CHEN S H. Flocking in multi-agent systems with active virtual leader and time-varying delays coupling [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(2): 1014 – 1026.
- [4] LUO X Y, LI S B, GUAN X P. Flocking algorithm with multi-target get tracking for multi-agent systems [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2010, 31(9): 800 – 805.
- [5] REN W. On Consensus algorithms for double-integrator dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1503 – 1509.
- [6] ZHANG S J, DUAN G R. Consensus seeking in multiagent cooperative control systems with bounded control input [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2011, 9(2): 210 – 214.
- [7] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [8] HENDRICKS J M, ANDERSON B D O, DELVENNE J C, et al. Directed graphs for the analysis of rigidity and persistence in autonomous agents systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10/11): 960 – 981.
- [9] YU C, ANDERSON B D O, DASGUPTA S, et al. Control of minimally persistent formations in the plane [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(1): 206 – 233.
- [10] ANDERSON B D O, YU C, FIDAN B, et al. Rigid graph control architectures for autonomous formations [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2008, 28(6): 48 – 63.
- [11] YU C, HENDRICKX J M, FIDAN B, et al. Three and higher dimensional autonomous formations: rigidity, persistence and structural persistence [J]. *Automatica*, 2007, 43(3): 387 – 402.
- [12] SMITH B, EGERSTEDT M, HOWARD A. Automatic generation of persistent formations for multi-agent networks under range constraints [J]. *Mobile Networks and Applications*, 2009, 14(3): 322 – 335.
- [13] HENDRICKX J M, FIDAN B, YU C, et al. Elementary operations for the reorganization of minimally persistent formations [C] // *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. Kyoto, Japan: IEEE, 2006: 859 – 873.
- [14] HENDRICKX J M, FIDAN B, YU C, et al. Formation reorganization by primitive operations on directed graphs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(4): 968 – 979.
- [15] REN R, ZHANG Y Y, LUO X Y, et al. Automatic generation of optimally rigid formations using decentralized method [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2010, 7(4): 557 – 564.
- [16] LUO X Y, LI S B, GUAN X P. Automatic generation of min-weighted persistent formations [J]. *Chinese Physics B*, 2009, 18(8): 3104 – 3114.
- [17] TAY T, WHITELEY W. Generating isostatic frameworks [J]. *Structural Topology*, 1985, 11(8): 21 – 69.

### 作者简介:

罗小元 (1976–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为多智能体协调控制、网络系统预测控制, E-mail: xyluo@ysu.edu.cn;

邵士凯 (1987–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体刚性编队与持久编队, E-mail: kdssk@126.com;

关新平 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为网络化系统控制、多智能体协调控制, E-mail: xpguan@ysu.edu.cn;

赵渊洁 (1986–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为图像处理和分布式控制, E-mail: yjzhao@sina.cn.