

四元数卡尔曼滤波组合导航算法性能分析

高显忠, 侯中喜[†], 王 波, 张俊韬

(国防科学技术大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 为分析四元数卡尔曼滤波组合导航算法在飞行器姿态估计中的性能, 在建立四元数卡尔曼滤波观测方程、状态方程和方差计算模型的基础上, 分别设计了陀螺/加速度计/磁强计组合导航仿真算例和陀螺/加速度计初始对准实验, 比较了四元数卡尔曼滤波组合导航算法相较于传统扩展卡尔曼滤波组合导航算法在计算量、收敛性、收敛速度、收敛精度方面的性能. 分析结果表明该滤波器无须扩展卡尔曼滤波器的线性化过程, 计算量小, 算法实现简单; 收敛性和收敛速度均优于扩展卡尔曼滤波器. 收敛精度较扩展卡尔曼滤波器高出约两个数量级, 但收敛过程中存在一个比扩展卡尔曼滤波器精度低的时间区间.

关键词: 卡尔曼滤波; 四元数; 姿态估计; 组合导航

中图分类号: V249 文献标识码: A

Quaternion-based Kalman filter and its performance analysis in integrated navigation

GAO Xian-zhong, HOU Zhong-xi[†], WANG Bo, ZHANG Jun-tao

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

Abstract: In order to take a systematic analysis for quaternion Kalman filter (QKF) performance in integrated navigation system for estimating attitude of aircraft, measurement equation, process equation and covariance computation model of QKF are established. A simulation sample about gyro/accelerator/magnetometer integrated navigation system and an experiment about gyro/accelerator initial alignment are developed. Performance of computation load, convergence, convergent rate and estimation precision are compared between QKF and extended Kalman filter (EKF). The results indicate that QKF is easier to be implemented and achieve convergence than EKF, QKF estimation precision is higher than that of EKF about two orders of magnitude; but there is a time interval in which QKF estimation precision is lower than that of EKF.

Key words: Kalman filter; quaternion; attitude estimation; integrated navigation

1 引言(Introduction)

对于飞行器姿态估计而言, 为解决单个导航器件误差随时间积累以及不同导航器件在不同工作环境下导航性能差异很大的问题, 通常是利用Kalman滤波算法将不同导航器件的量测信息和系统状态信息融合, 也就是组合导航^[1-2]. 从理论上可以证明, 对于线性的状态方程和观测方程, Kalman滤波算法的计算结果是最优无偏估计的. 也就是说, Kalman滤波算法是线性系统的最优信息融合方法. 但在实际的组合导航问题中, 利用四元数或方向余弦阵描述的观测方程关于姿态变量都是非线性的. 一个折衷的方法是采用线性化Kalman滤波方法, 也就是EKF (extend Kalman filter)算法. EKF算法不可避免的存在线性化误差, 并且EKF算法需要求解观测方程的

雅可比矩阵, 对于高维问题, 这是一个很繁琐的过程^[3], 并且线性化过程会导致一些不希望的结果出现, 比如对初始条件很敏感、误差漂移、收敛速度慢等问题^[4-6]. 另一种思路就是采用非线性滤波方法, 比如无迹滤波^[7]、粒子滤波^[8]等, 但非线性滤波方法本质上是一种近似方法, 且计算量大, 实际工程中应用较为困难^[8-10].

从Clifford代数的观点来看刚体在空间的转动实质上可表述为空间矢量与一个特定旋量群的乘积^[11]. 这说明空间转动本质上是一个线性映射的关系. 为解决EKF在姿态估计中存在的线性化误差问题, 文献[12]将四元数乘积表示成Clifford代数中Hamilton算子的形式, 得到了四元数矢量观测方程的线性形式. 文献[13]设计了线性滤波组合导航算

法,并将其命名为四元数卡尔曼滤波算法(quaternion Kalman filter, QKF). 不过,用这种方法,观测噪声将是与四元数相关的. 文献[14]描述了如何表达这一类状态相关噪声协方差矩阵的方法,分析了在滤波器的设计中如何估计它们近似值的问题.

为系统分析QKF组合导航算法在飞行器姿态估计中的性能,以便为该方法在实际工程上的应用提供指导,在总结QKF算法的基础上,本文设计了陀螺/加速度计/磁强计组合导航仿真算例和陀螺/加速度计初始对准实验,分别从计算量、收敛性、收敛速度、收敛精度4个方面比较了QKF组合导航算法相较于传统EKF组合导航算法的性能. 分析结果表明, QKF除了在收敛过程中存在一个比EKF精度低的时间区间外,其他各方面性能都优于EKF,在飞行器姿态估计中具有较大应用价值.

2 四元数卡尔曼滤波算法(Quaternion-based Kalman filter)

2.1 问题描述(Problem formulation)

在飞行器姿态估计问题中,导航器件的观测方程可写成如下形式:

$$b = b^\circ + \delta b, \quad (1)$$

其中:

$$b^\circ = C_r^b(\mathbf{q})r, \quad (2)$$

b° 和 r 为 3×1 的矢量,分别是物理矢量在体轴系 B 和参考坐标系 R 上的投影, b 是安装在载体坐标系上的传感器输出, r 可通过查表求得,比如当地重力加速度值,当地磁场方位等, δb 为传感器的加性噪声, $C_r^b(\mathbf{q})$ 为 3×3 的姿态矩阵,它将 B 系的坐标轴转到 R 系. \mathbf{q} 为对应于 C_r^b 的四元数. 姿态矩阵和四元数的关系如下:

$$C_r^b(\mathbf{q}) = (s^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{v})I_3 + 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T - 2s[\mathbf{v} \times] \quad (3)$$

其中: s 和 \mathbf{v} 是姿态四元数 \mathbf{q} 的标量部分和矢量部分,矩阵 $[\mathbf{v} \times] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为矢量 \mathbf{v} 的反对称形式. 将式(3)代入式(2)和式(1),可以看出,观测方程是关于 \mathbf{q} 的二次函数,将该方程线性化之后,可用于EKF的滤波模型. QKF则是将式(1)化成与姿态四元数 \mathbf{q} 成线性关系的形式,并代入Kalman滤波方程进行滤波,从而避免线性化方法造成的误差^[4-6].

2.2 QKF 观测方程(Measurement equation of QKF)

将空间矢量在 B 系和 R 系的投影 b° 和 r 表示成四元数的形式

$$b_q^\circ \triangleq [0 \ b^\circ]^T, \quad r_q \triangleq [0 \ r]^T, \quad (4)$$

则 b_q° 与 r_q 的关系可由旋转四元数 \mathbf{q} 表示如下:

$$b_q^\circ = \mathbf{q}^{-1} \otimes r_q \otimes \mathbf{q}, \quad (5)$$

其中: \otimes 表示四元数乘积, \mathbf{q}^{-1} 为四元数 \mathbf{q} 的逆. 文献[12]利用Clifford代数中Hamilton算子的形式做出如下定义:

$$\overset{+}{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} s & -\mathbf{v}^T \\ \mathbf{v} & s + [\mathbf{v} \times] \end{bmatrix}, \quad \overset{-}{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} s & -\mathbf{v}^T \\ \mathbf{v} & s - [\mathbf{v} \times] \end{bmatrix}. \quad (6)$$

则四元数乘积可表示如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \otimes b_q^\circ &= \overset{-}{H}(b_q^\circ)\mathbf{q}, \\ r_q \otimes \mathbf{q} &= \overset{+}{H}(r_q)\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (7)$$

对式(5)左乘 \mathbf{q} 代入式(7)可得如下矢量方程:

$$\begin{aligned} [\overset{-}{H}(b_q^\circ) - \overset{+}{H}(r_q)]\mathbf{q} = \\ \begin{bmatrix} 0 & -(b^\circ - r)^T \\ b^\circ - r & -[b^\circ + r] \times \end{bmatrix} \mathbf{q} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

采用文献[14]的方式,定义观测矩阵 H° :

$$s^\circ \triangleq \frac{1}{2}(b^\circ + r), \quad (9a)$$

$$d^\circ \triangleq \frac{1}{2}(b^\circ - r), \quad (9b)$$

$$H^\circ \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -d^{\circ T} \\ d^\circ & -[s^\circ \times] \end{bmatrix}. \quad (9c)$$

将式(9)代入式(8)式可得

$$H^\circ \mathbf{q} = 0. \quad (10)$$

该方程为关于 \mathbf{q} 的线性方程,也就是所要推导的线性观测模型. 经过上述推导,关于 \mathbf{q} 的非线性不含噪声项观测方程(2)转换成了方程(10)的线性形式, H° 成为观测数据 b° 和 r 函数.

下面推导式(1)中噪声项的表达形式. 将式(1)写成如下形式:

$$b^\circ = b - \delta b. \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)可得

$$\begin{aligned} H^\circ \mathbf{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(b^\circ - r)^T \\ b^\circ - r & -[b^\circ + r] \times \end{bmatrix} \mathbf{q} = \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(b - r)^T \\ b - r & -[b + r] \times \end{bmatrix} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\delta b^T \\ \delta b & -[\delta b \times] \end{bmatrix} \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (12)$$

按照方程(6)的方式定义如下符号:

$$\Delta H \triangleq \frac{1}{2} \overset{-}{H}(\delta b_q), \quad (13)$$

δb_q 为 δb 的四元数表示形式,则式(12)可写为

$$H^\circ \mathbf{q} = H\mathbf{q} - \Delta H\mathbf{q} = 0, \quad (14)$$

其中 H 为观测数据构成的观测方程. 上式中观测误差 δb 表示在 ΔH 内,这对误差的处理造成了不便. 更

希望得到是关于 δb 的显式误差表达形式, 为此可将方程(14)写为如下形式, 具体定义方式见文献[13]:

$$0 = H\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{X}(\mathbf{q})\delta b. \quad (15)$$

在 t_{k+1} 时刻对方程(15)进行离散化, 得到

$$0 = H_{k+1}\mathbf{q}_{k+1} - \frac{1}{2}\mathbf{X}(\mathbf{q}_{k+1})\delta b_{k+1}. \quad (16)$$

假设 δb_{k+1} 为零均值的Gauss白噪声, 协方差为 R_{k+1} , 即

$$E[\delta b_{k+1}] = 0, E[\delta b_{k+1}\delta b_{k+1}^T] = R_{k+1}. \quad (17)$$

方程(16)–(17)即为所需推导的线性观测模型.

2.3 QKF状态方程(State equation of QKF)

考虑如下形式的离散姿态运动学方程:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \Phi_{k+1/k}^o \mathbf{q}_k, \quad (18)$$

\mathbf{q}_k 为 t_k 时刻将矢量在 R 系中的投影转到 B° 中的姿态四元数, $\Phi_{k+1/k}^o$ 为姿态转移矩阵. 定义 t_k 时刻 B° 系相对于 R 系的角速度在 B° 系的投影为 $\omega_k^{B^\circ}$, 定义

$$\Omega_k^{B^\circ} = \bar{H}(\omega_k^{B^\circ}). \quad (19)$$

在短时间间隔 $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ 期间, $\Phi_{k+1/k}^o$ 可表示为

$$\Phi_{k+1/k}^o = \exp\left\{\frac{1}{2}\Omega_k^{B^\circ}\Delta t\right\}. \quad (20)$$

定义角速度增量 $\theta_k^{B^\circ}$ 及相应的矩阵 $\Theta_k^{B^\circ}$ 如下:

$$\theta_k^{B^\circ} = \omega_k^{B^\circ}\Delta t, \Theta_k^{B^\circ} = \bar{H}(\theta_k^{B^\circ}). \quad (21)$$

方程(18)可写为

$$\mathbf{q}_{k+1} = \Phi_{k+1/k}^o \mathbf{q}_k = \exp\left\{\frac{1}{2}\Theta_k^{B^\circ}\right\} \mathbf{q}_k. \quad (22)$$

$\theta_k^{B^\circ}$ 是未知的, 但陀螺的输出 θ_k^B 可建立为具有加性噪声 $\delta\theta_k$ 的形式, 即

$$\theta_k^B = \theta_k^{B^\circ} + \delta\theta_k. \quad (23)$$

将式(23)代入式(21)得

$$\begin{aligned} \Theta_k^{B^\circ} &= \bar{H}(\theta_k^{B^\circ}) = \bar{H}(\theta_k^B - \delta\theta_k) = \\ &\bar{H}(\theta_k^B) - \bar{H}(\delta\theta_k) = \Theta_k^B - \Delta\Theta_k. \end{aligned} \quad (24)$$

将式(24)代入式(22)得

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{k+1} &= \Phi_{k+1/k}^o \mathbf{q}_k = \exp\left\{\frac{1}{2}\Theta_k^B - \frac{1}{2}\Delta\Theta_k\right\} \mathbf{q}_k = \\ &\exp\left\{\frac{1}{2}\Theta_k^B\right\} \left(1 - \frac{1}{2}\Delta\Theta_k\right) \mathbf{q}_k = \\ &\Phi_{k+1/k} \mathbf{q}_k - \frac{1}{2}\Phi_{k+1/k} \Delta\Theta_k \mathbf{q}_k. \end{aligned} \quad (25)$$

同样, 也希望得到关于 $\delta\theta_k$ 的显式误差表达形式, 仿照方程(15)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{k+1} &= \Phi_{k+1/k} \mathbf{q}_k - \frac{1}{2}\Phi_{k+1/k} \Delta\Theta_k \mathbf{q}_k = \\ &\Phi_{k+1/k} \mathbf{q}_k - \frac{1}{2}\Phi_{k+1/k} \mathbf{X}(\mathbf{q}_k) \delta\theta_k. \end{aligned} \quad (26)$$

假设 $\delta\theta_k$ 也为零均值的Gauss白噪声, 协方差为 Q_k , 即

$$E[\delta\theta_k] = 0, E[\delta\theta_k\delta\theta_k^T] = Q_k, \quad (27)$$

式(26)–(27)即为所需的状态方程.

2.4 QKF模型与方差计算(The model of QKF and the method to compute variance)

QKF模型可总结如下:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \Phi_{k+1/k} \mathbf{q}_k + \Gamma_{k+1/k} \delta\theta_k, \quad (28)$$

$$0 = H_{k+1}x_{k+1} - \frac{1}{2}\mathbf{X}(\mathbf{q}_{k+1})\delta b_{k+1}, \quad (29)$$

其中:

$$\Gamma_{k+1/k} = -\frac{1}{2}\Phi_{k+1/k} \mathbf{X}(\mathbf{q}_k). \quad (30)$$

矩阵 $\Phi_{k+1/k}$ 由陀螺输出的角位移 θ_k 计算得到; 观测矩阵 H_{k+1} 由在 t_{k+1} 时刻的矢量观测值 (b_{k+1}, r_{k+1}) 得到; 过程噪声 $\delta\theta_k$ 和观测噪声 δb_{k+1} 均为 3×1 的零均值白噪声序列, 方差分别为 Q_{k+1} 和 R_{k+1} . 噪声相互独立且与初始状态不相关. 根据文献[6, 15], 状态协方差可按如下方法计算:

$$\begin{aligned} P_{k+1/k}^q &\triangleq \text{cov}\{\Gamma_k \theta_k\} = \\ &\Phi_{k+1/k} P_{k/k}^q \Phi_{k+1/k}^T + \\ &\frac{1}{4}[\text{tr}(\hat{M}_{k+1/k})I_4 - \hat{M}_{k+1/k}]Q_k, \end{aligned} \quad (31)$$

其中:

$$\hat{M}_{k+1/k} = \hat{\mathbf{q}}_{k+1/k} \hat{\mathbf{q}}_{k+1/k}^T + P_k^q, \quad (32)$$

$\hat{\mathbf{q}}_{k+1/k}$ 和 P_k^q 分别代表状态量 \mathbf{q}_k 的递推估计值和协方差矩阵. 方程(31)中 $P_{k+1/k}^q$ 的表达式是设计Kalman滤波器预估阶段协方差的基础.

令 $B_{k+1} = \bar{H}(b_{k+1})$, $R_{k+1} = \rho_{k+1}I_3$ 则观测协方差矩阵计算公式如下:

$$\begin{aligned} P_{k+1/k}^v &= \frac{1}{4}\rho_{k+1}[\text{tr}(\hat{M}_{k+1/k})I_4 - \\ &\hat{M}_{k+1/k} - B_{k+1}\hat{M}_{k+1/k}B_{k+1}^T]. \end{aligned} \quad (33)$$

2.5 QKF实施步骤(The implementation steps of QKF)

记 $\hat{\mathbf{q}}_{k+1/k+1}$ 是递推四元数估计, 为保证四元数在运算过程中始终为单位四元数, 在每次计算完成后都对它进行归一化:

$$\mathbf{q}_{k+1/k+1}^* = \frac{\hat{\mathbf{q}}_{k+1/k+1}}{\|\hat{\mathbf{q}}_{k+1/k+1}\|}. \quad (34)$$

由此, 状态方程和观测方程都化成了解析的线性形式, 状态协方差矩阵按式(31)计算, 观测协方差矩阵按式(33)计算. 按照Kalman滤波公式的框架, 四元数Kalman滤波算法可按如下步骤实施:

Step 1 滤波器初始化.

对 Q 和 R 选择合适的值, R 表示成 $R = \rho I_3$ 的形式. 对状态矢量的初始估计选择近似值, 若没有合适的初始值可供选择, 则选择零姿态四元数, 即 $\hat{q}_{0/0}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 和 $P_{0/0}^q = I_4$, 因为四元数每个元素的最大值为1, 此方差表明对初值完全不信任.

Step 2 状态方程传播.

给定 $\hat{q}_{k/k}$, $P_{k/k}^q$ 、陀螺的输出值 θ_k 以及 Q_k , 状态方程按如下形式传播:

$$\Theta_k = \bar{H}(\theta_k), \quad (35a)$$

$$\Phi_{k+1/k} = \exp\left\{\frac{1}{2}\Theta_k\right\}, \quad (35b)$$

$$\hat{q}_{k+1/k} = \Phi_{k+1/k}\hat{q}_{k/k}, \quad (35c)$$

$$\hat{M}_{k+1/k} = \hat{q}_{k+1/k}\hat{q}_{k+1/k}^T + P_{k/k}^q, \quad (35d)$$

$$P_{k+1/k}^q = \Phi_{k+1/k}P_{k/k}^q\Phi_{k+1/k}^T + \frac{1}{4}[\text{tr}(\hat{M}_{k+1/k})I_4 - \hat{M}_{k+1/k}]Q_k. \quad (35e)$$

Step 3 观测方程更新.

给定 $\hat{q}_{k+1/k}$ 、观测量 (b_{k+1}, r_{k+1}) 以及观测误差 $R_k = \rho_k I_3$, 则观测方程可按如下形式更新:

$$s_{k+1} = \frac{1}{2}(b_{k+1} + r_{k+1}), \quad (36a)$$

$$d_{k+1} = \frac{1}{2}(b_{k+1} - r_{k+1}), \quad (36b)$$

$$H_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -d_{k+1}^T \\ d_{k+1} & -[s_{k+1} \times] \end{bmatrix}, \quad (36c)$$

$$B_{k+1} = \bar{H}(b_{k+1}), \quad (36d)$$

$$P_{k+1/k}^v = \frac{1}{4}\rho_{k+1}[\text{tr}(\hat{M}_{k+1/k})I_4 - \hat{M}_{k+1/k} - B_{k+1}\hat{M}_{k+1/k}B_{k+1}^T], \quad (36e)$$

$$S_{k+1/k} = H_{k+1}P_{k+1/k}^qH_{k+1}^T + P_{k+1/k}^v, \quad (36f)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}^vS_{k+1/k}^{-1}, \quad (36g)$$

$$\hat{q}_{k+1/k+1} = (I_4 - K_{k+1}H_{k+1})\hat{q}_{k+1/k}, \quad (36h)$$

$$\hat{q}_{k+1/k+1}^b = \frac{\hat{q}_{k+1/k+1}}{\|\hat{q}_{k+1/k+1}\|}, \quad (36i)$$

$$P_{k+1/k+1}^q = (I_4 - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1/k}^q(I_4 - K_{k+1}H_{k+1})^T + K_{k+1}P_{k+1/k}^vK_{k+1}^T. \quad (36j)$$

3 算法仿真(Simulation)

为系统分析QKF算法的性能, 设计如下仿真场景: 假设飞行器初始体坐标系与当地北东地坐标系重合. 飞行器按照3-2-1的转动顺序, 以偏航、俯仰、滚动角的角速度为 $[1 \ 2 \ 3]^T$ (°)/s转动. 机体上放有加表、陀螺和磁强计. 加表精度为0.005g, 陀螺精度0.01. 现从加表、陀螺和磁强计的输出数据, 推算飞行器各时刻的姿态. 初始俯仰、偏航和滚动角的真值为 $[0 \ 0 \ 0]^T$ 度. 仿真计算时假设存在大的初始偏差,

初始欧拉角分别为 $[15 \ 15 \ 15]^T$ (°).

首先建立Simulink仿真程序, 生成加表、陀螺和磁强计的输出数据. 由于Simulink自带的惯组是平台式惯性器件, 将导航系中的重力转换到体坐标系, 然后将其输入到惯组的重力项, 这样可将平台式惯性器件转换为捷联式惯性器件.

仿真的姿态变化真值如图1所示.

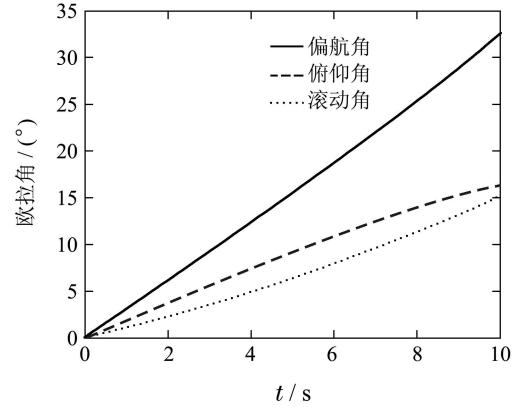


图1 仿真姿态变化真值

Fig. 1 The true attitude in simulation

已知加表所测的重力矢量在导航系的值为 g^n , 当地磁场方向为 m^n , 因此希望在利用陀螺数据对姿态四元数更新之后, 可以用估计的姿态矩阵将 g^n , m^n 的值转换到体坐标系, 然后与加表和磁强计测得的重力与磁强线方向相比较, 从而对姿态计算进行校正, 以期在大初始偏差和噪声的条件下获得好的计算效果. 滤波器的设计思路如图2所示.

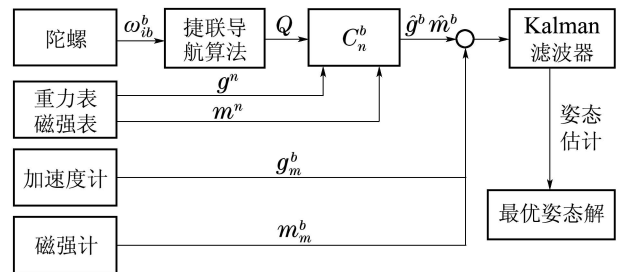


图2 滤波器设计框图

Fig. 2 The schematic diagram of filter

按照以上思路, 分别设计EKF算法和QKF算法, 其中EKF的过程模型和观测模型分别如下^[16]:

$$q_{k+1} = \Phi_{k+1/k}(\theta_k)q_k, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} g_{k+1}^b \\ m_{k+1}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n^b(q_k) & 0 \\ 0 & C_n^b(q_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{k+1}^n \\ m_{k+1}^n \end{bmatrix}. \quad (38)$$

对式(38)线性化, 式中假设 $g^n = [0 \ 0 \ g]^T$, $m^n = [m \ 0 \ 0]^T$. 观测矩阵 H 可以通过对转换矩阵中的 q 求偏导得到

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \nabla_q \left(\begin{bmatrix} C_n^b(\mathbf{q}_{k+1}) & 0 \\ 0 & C_n^b(\mathbf{q}_{k+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{k+1}^n \\ m_{k+1}^n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2gq_2 & 2gq_3 & -2gq_0 & 2gq_1 \\ 2gq_1 & 2gq_0 & 2gq_3 & 2gq_2 \\ 2gq_0 & -2gq_1 & -2gq_2 & 2gq_3 \\ 2mq_0 & 2mq_1 & -2mq_2 & -2mq_3 \\ -2mq_3 & 2mq_2 & 2mq_1 & -2mq_0 \\ 2mq_2 & 2mq_3 & 2mq_0 & 2mq_1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

由此, 方程(38)可写为如下线性化的形式:

$$\begin{bmatrix} g_{k+1}^b \\ m_{k+1}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n^b(\mathbf{q}_k) & 0 \\ 0 & C_n^b(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_k^n \\ m_k^n \end{bmatrix} + H(\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k), \quad (40)$$

移项得

$$\begin{bmatrix} g_{k+1}^b \\ m_{k+1}^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_n^b(\mathbf{q}_k) & 0 \\ 0 & C_n^b(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_k^n \\ m_k^n \end{bmatrix} + H\mathbf{q}_k = H\mathbf{q}_{k+1}. \quad (41)$$

利用式(37)和式(41)便可以设计出EKF滤波器.

QKF按照2.5节的流程进行设计. 为了简洁起见, 将状态噪声 Q 和量测噪声 R 分别设定为

$$Q = 0.001I_4, R = 0.001I_6. \quad (42)$$

由设计过程可以看出, QKF在计算过程中无须求解雅可比矩阵, 算法实现简单. 尤其对于观测方程需要实时重构的系统, QKF具有计算量方面的优势.

通过编程解算, EKF和QKF在 15° 的初始偏差下都跟踪到了姿态的真值变化, 但在初始滤波阶段, 两者的幅值收敛速度和收敛时间上有很大区别. 在初始1s内, EKF, QKF的输出结果如图3-5所示.

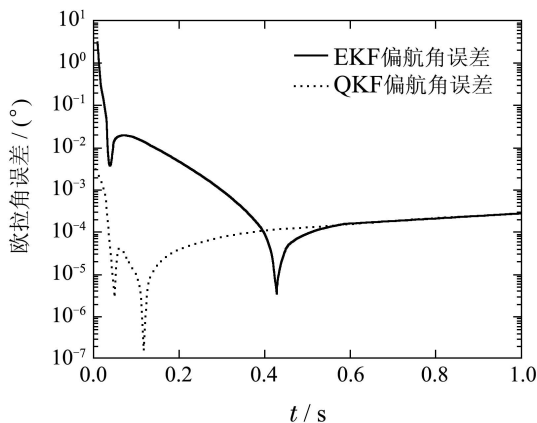


图3 EKF, QKF的偏航角误差收敛曲线
Fig. 3 The comparison of errors of yaw angle between EKF and QKF

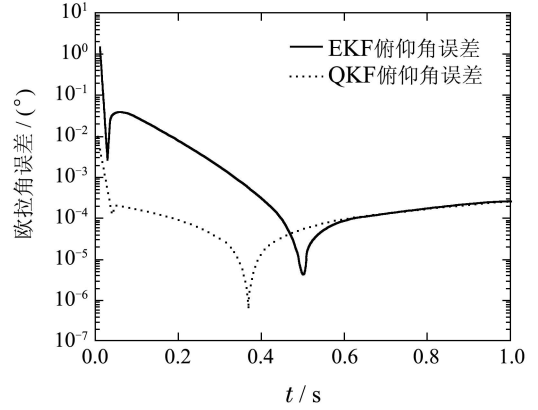


图4 EKF, QKF的俯仰角误差收敛曲线
Fig. 4 The comparison of errors of pitch angle between EKF and QKF

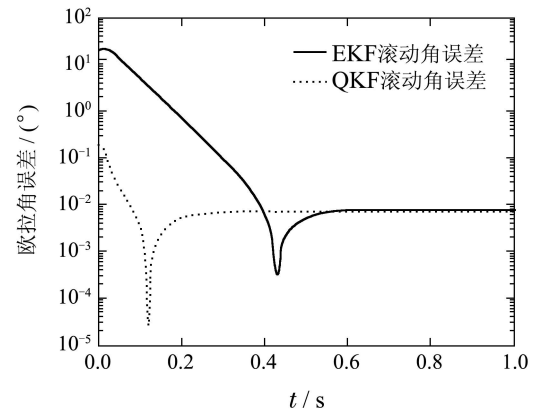


图5 EKF, QKF的滚动角误差收敛曲线
Fig. 5 The comparison of errors of roll angle between EKF and QKF

图3-5中误差取的是对数坐标, 从中可以看出, QKF的收敛速度快于EKF, 初始误差较EKF下降了约两个数量级. EKF和QKF在收敛过程中都存在一个迅速下降的峰值, 由于EKF的收敛峰值较QKF出现的晚, 因此QKF在收敛过程中存在一个比EKF精度低的时间区间.

4 试验测试(Experiment)

选择利用激光陀螺捷联惯导系统初始对准阶段的试验数据对QKF的性能进行测试. 数据采样率为100 Hz, 激光陀螺的精度为 $0.005^\circ/s$, 加速度计的精度为 $0.001g$. 初始对准的基本思路是: 在载体静止时, 利用陀螺测量的角速度值 ω^n 和加表测量值 g^n 与地球自转角速度和当地重力矢量进行对比, 解算出陀螺所安装的载体坐标系与当地北东地坐标系的相对姿态.

系统状态方程

$$\begin{cases} \theta_k = -C_n^b(\mathbf{q}_k)\omega_{ie}^n \Delta T, \\ \mathbf{q}_{k+1} = \Phi_{k+1/k}(\theta_k)\mathbf{q}_k. \end{cases} \quad (43)$$

观测方程

$$\begin{bmatrix} g_{k+1}^b \\ \omega_{k+1}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n^b(\mathbf{q}_k) & 0 \\ 0 & C_n^b(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{k+1}^n \\ \omega_{k+1}^n \end{bmatrix}. \quad (44)$$

过程误差和量测误差分别取为

$$Q = 0.01I_4, R = 0.01I_6. \quad (45)$$

俯仰、偏航、滚动角的初值取为 $[0 \ 0 \ 0]^T$, 方差为 $P_0 = I_4$.

与上一节的方法类似, 分别设计EKF滤波器和QKF滤波器对初始对准数据进行处理. 由于地球自转角速率的数量级相对于重力值很小, 其修正作用将被重力值淹没. 可以考虑将重力矢量和地球自转角速度矢量都用归一化的方法来设计观测模型. 由于陀螺观测角速度的漂移值相对于地球自转角速度比较大, 需要将角速度观测值的增益适当调小, 以抑制陀螺噪声干扰, 因此在EKF和QKF的角速度观测矩阵 H_2 前都乘一个系数, 文中取为0.005. EKF中 H_2 的求解方法如下, 其中角速度值 ω^n 在北东地坐标系中可表示为 $\omega^n = [\omega_N^n \ 0 \ \omega_D^n]^T$:

$$H_2 = \nabla_q(C_n^b(\mathbf{q})\omega^n) = \nabla_q(C_n^b(\mathbf{q})) \begin{pmatrix} \omega_N^n \\ 0 \\ \omega_D^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_0 & 2q_1 & -2q_2 & -2q_3 \\ -2q_3 & 2q_2 & 2q_1 & -2q_0 \\ 2q_2 & 2q_3 & 2q_0 & 2q_1 \\ -2q_2 & 2q_3 & -2q_0 & 2q_1 \\ 2q_1 & 2q_0 & 2q_3 & 2q_2 \\ 2q_0 & -2q_1 & -2q_2 & 2q_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_N^n \\ \omega_D^n \end{pmatrix}. \quad (46)$$

以静止初始对准的解析解作为初值, 分别绘制EKF和QKF初始对准时的偏航角误差曲线, 结果如图6所示. 可以看出, 由于试验所选用的陀螺和加表存在抖动噪声, 两种算法的估计值都存在一定的误差, 但都实现了对初始姿态的估计. 相较EKF而言, QKF的收敛速度快且估计结果更稳定, 收敛精度也得到了提高.

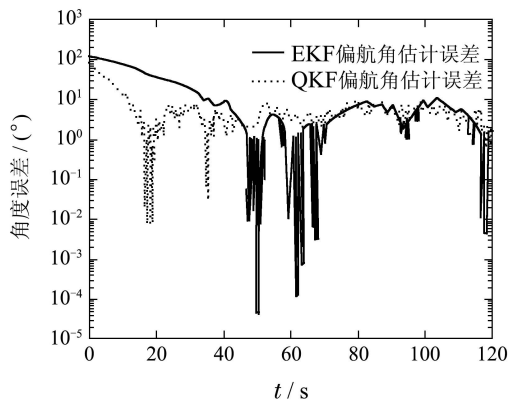


图6 EKF和QKF的初始对准结果对比

Fig. 6 The comparison of results of initial alignment between EKF and QKF

5 结论与展望(Conclusions and future work)

通过建立四元数卡尔曼滤波观测方程、状态方程和方差计算模型, 设计了陀螺/加速度计/磁强计组合导航仿真算例和陀螺/加速度计初始对准实验, 以比较QKF组合导航算法相较于传统EKF组合导航算法在计算量、收敛性、收敛速度、收敛精度方面的性能. 结果表明QKF算法相较EKF算法有更好的收敛速度和收敛精度且计算过程中不需要求解雅可比矩阵, 在算法实现比EKF简单.

QKF的推导过程说明, 通过四元数的表述方法, 可以将刚体空间运动的过程完全表述成线性运动的形式. 从而通过Kalman滤波方程, 就可以得到最优的组合导航信息融合算法. 现在的工作还主要集中于姿态估计, 如何将速度和航迹的信息统一的描述在滤波方程中从而得到最优的组合导航方法是今后的主要研究方向.

参考文献(References):

- [1] GAO S S, ZHONG Y M, ZHANG X Y. Multi-sensor optimal data fusion for INS/GPS/SAR integrated navigation system [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2009, 13(4/5): 232 – 237.
- [2] HWANG D H, OH S H, LEE S J. Design of a low-cost attitude determination GPS/INS integrated navigation system [J]. *GPS Solution*, 2005, 9(4): 294 – 311.
- [3] JULIER S J, UHLMANN J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems [C] // *Proceedings of Aerosense: the 11th International Symposium on Aerospace/Defence Sensing Simulation and Controls*. Orlando, FL: SPIE, 1997: 182 – 193.
- [4] XUE L, YUAN W, CHANG H. Application of quaternion-based extended Kalman filter for MAV attitude estimation using mems sensors [J]. *Nanotechnology and Precision Engineering*, 2009, 7 (3): 163 – 167.
- [5] SABATINI A M. Quaternion-based extended Kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2006, 53(7): 1346 – 1357.
- [6] ITZHACK I Y, OSHMAN J. Attitude determination from vector observation: quaternion estimation [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1985, 21(1): 128 – 136.
- [7] JULIER S J. The scaled unscented transformation [C] // *American Control Conference*. Jefferson City, MO: IEEE, 2002: 4555 – 4559.
- [8] ANDRIEU C, DOUCET A. Particle filtering for partially observed Gaussian state space models [J]. *Statist Society*, 2002, 64 (4): 827 – 836.
- [9] JULIER S J, UHLMANN J K, DURRANT H F. A new approach for filtering nonlinear systems [C] // *American Control Conference*. Seattle WA: IEEE, 1995: 1628 – 1632.
- [10] PITT M, SHEPHARD N. Filtering via simulation: auxiliary particle filters [J]. *Journal of American Statistical Association*, 1999, 94(446): 590 – 599.
- [11] GALLIER J. *Clifford algebras, clifford groups and a generalization of the quaternions: the pin and spin groups* [D]. Philadelphia, USA: University of Pennsylvania, 2009.

- [12] AKYAR B. Dual quaternions in spatial kinematics in an algebraic sense [J]. *Turkish Journal of Mathematics*, 2008, 32(4): 373 – 391.
- [13] CHOUKROUN D, BARITZHACK I Y, OSHMAN Y. Novel quaternion Kalman filter [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, 42(1): 174 – 190.
- [14] CHOUKROUN D, BARITZHACK I Y, OSHMAN Y. A novel quaternion kalman filter [R]. *Faculty of Aerospace Engineering*. Israel: Technion-Isreal Institute of Techn, 2004.
- [15] LEFFERTS E J, MARKLEY F L, SHUSTER M D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1982, 5(5): 417 – 429.
- [16] MARINS J L, YUN X P, BACHMANN E R. An extended Kalman Filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors [C] // *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2001: 2003 – 2011.

作者简介:

高显忠 (1985–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为飞行器导航、制导与控制, E-mail: gaoxianzhong2010@sina.com;

侯中喜 (1973–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行器设计, E-mail: cn_hzx@yahoo.com;

王波 (1985–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为无人飞行器技术, E-mail: nudtxiaowang@163.com;

张俊韬 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为飞行器设计, E-mail: zzt136@163.com