DOI: 10.7641/CTA.2013.20583

带内生负债的不确定终止时间多期均值–方差资产–负债管理

姚海祥†, 马庆华, 姜灵敏

(广东外语外贸大学 思科信息学院, 广东 广州 510006)

摘要: 本文研究了带内生负债的不确定退出时间多期均值–方差资产–负债管理问题. 和外生负债不可控所不同的是, 内生负债可通过各种金融工具和投资者(机构)的决策来调控. 在本文的模型中, 投资者(机构)在考虑资产最优配置的同时, 还需要考虑负债的最优配置. 本文采用Lagrange对偶理论、矩阵Hadamard乘积技术和动态规划方法对模型进行分析性求解, 得到了模型的有效策略及有效边界的显式表达式.

关键词: 内生负债; 不确定终止时间; 多阶段均值–方差模型; 动态规划; 资产–负债管理

中图分类号: O221.3; F224 **文献标识码**: A

Multi-period mean-variance asset-liability management with endogenous liabilities and uncertain exit time

YAO Hai-xiang†, MA Qing-hua, JIANG Ling-min

(Cisco School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong 510006, China)

Abstract: This paper investigates a multi-period mean-variance asset-liability management problem with endogenous liabilities and uncertain exit time. Being different from exogenous liability that cannot be controlled, endogenous liabilities can be controlled by various financial instruments and investors (institutions)'s decisions making. In our model, investors (institutions) optimize allocation not only for their assets, but also for their liabilities. Firstly, by using the Lagrange duality theory, matrix Hadamard product technique and dynamic programming approach, we solve the model analytically. Then, explicit expressions for the efficient strategy and the mean-variance efficient frontier are derived.

Key words: endogenous liabilities; uncertain exit time; multi-period mean-variance model; dynamic programming; asset-liability management

1 引言(Introduction)

1952年, Markowitz在他开创性的论文[1]中建立了著名的均值–方差模型, 奠定了现代投资组合选择理论的基石, 使金融研究由定性描述走向定量分析. 经典的Markowitz模型只考虑了单期静态情形, 后来学者们致力于把它推广到更符合实际的多期及连续时间情形. 其中文献[2–3]利用嵌入法技术分别给出了多期和连续时间情形下均值–方差投资组合选择模型的解析解. 随后, 关于动态均值–方差投资组合选择的研究得到蓬勃的发展, 如文献[4–7].

但上述文献中均假定投资退出时间是预先确定的. 而现实中, 投资的终止时间通常是不确定的. 因为有很多无法预测的随机因素会导致投资者中途退出市场. 从而很多学者研究了不确定退出时间的投资组合选择问题, 如文献[8–12].

另外一方面, 资产–负债管理在理论研究与实务应用中都具有重要的意义, 吸引了不少学者的关注. 其中, 文献[13]最早使用静态均值–方差模型研究了资产–负债管理问题. 文献[14–16]基于多期均值–方差模型研究了带外生负债(不受投资者控制)的投资组合选择问题. 文献[17–20]考虑了连续时间均值–方差目标下的资产–负债管理问题.

但上述关于资产–负债管理的文献均假定负债是外生的、不可控的. 但现实中, 很多公司或金融机构可通过各种金融工具及自身的决策来控制负债的类型与数量. 例如当一个公司发行公司债进行融资时, 其债务的类型与数量可由公司自身控制. 笔者称这类可控的负债为内生负债. 在考虑内生负债时, 投资者或机构不仅需要考虑如何优化配置其资产, 还需要考虑如何优化配置其负债. 据笔者所知, 目前除文献[21], 尚无其他文献研究动态情形下带内生负债的资产–负债管理问题. 然而, 虽文献[21]在多期均

收稿日期: 2012−05−18; 收修改稿日期: 2012−08−15.

†通信作者. Tel.: +86 020-39358577.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71003110, 71271061); 广东省自然科学基金资助项目(S2011010005503); 教育部人文社会科学研究基金青年资助项目(10YJC790339); 广东省高等院校(学科建设专项资金)科技创新资助项目(2012KJCX0050); 广东省科技计划资助项目(2011B040400015).

值–方差框架下研究了带内生负债的资产–负债管理问题, 但他们只考虑了确定性退出时间的情形.

本文将在文献[21]的基础上, 研究退出时间不确定的情形. 本文采用了新的更为有效的方法, 即采用Lagrange对偶理论、矩阵Hadamard乘积技术和动态规划相结合的方法对模型进行求解, 并得到了原模型的有效策略及有效边界的解析式.

2 模型的建立(Model formulation)

假设投资者(机构)可在两种资产(可含有或不含有无风险资产)上进行投资, 而且还可在两种金融工具(如债券)上配置其负债. 为表达方便, 下面本文称配置负债的这两种金融工具为两种不同的债务. 设在第$k(k=0,1,\cdots,T-1)$期, 这两种资产和两种债务的收益率向量分别为$e_k=(e_k^1,e_k^2)'$和$b_k=(b_k^1,b_k^2)'$, 其中A'表示矩阵或向量A的转置. 投资者在时刻0进入市场, 计划进行T期的投资管理活动, 即预计退出时间为T. 设投资者初始总财富(即资产总价值)和初始总负债分别为x_0和l_0. 用x_k和l_k分别表示投资者在时刻k的总财富和总负债. 在本文模型, 投资者不仅要优化配置其资产, 还要优化配置其负债. 用u_k和v_k分别表示它在时刻k配置在第2种资产和第2种债务上的金额. 假定投资者是自融资的, 在每期期初都能进行交易且不考虑交易成本, 则它配置在第1种资产和第1种债务的金额分别为(x_k-u_k)和(l_k-v_k). 则此时总财富和总负债的动态过程分别为

$$x_{k+1}=(x_k-u_k)e_k^1+u_ke_k^2=x_ke_k^1+P_ku_k, \quad (1)$$

$$l_{k+1}=(l_k-v_k)b_k^1+v_kb_k^2=l_kb_k^1+Q_kv_k, \quad (2)$$

其中: $k=0,1,\cdots,T-1$, $P_k=e_k^2-e_k^1$, $Q_k=b_k^2-b_k^1$. 为表达方便, 下面本文引入一些符号:

$$\begin{cases} z_k=\begin{pmatrix}x_k\\ l_k\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ \pi_k=\begin{pmatrix}u_k\\ v_k\end{pmatrix},\\ \varUpsilon_k=\begin{pmatrix}P_k\\ Q_k\end{pmatrix},\ L_k=\begin{pmatrix}e_k^1\\ b_k^1\end{pmatrix},\ \eta_k=\begin{pmatrix}e_k\\ b_k\end{pmatrix},\\ A_k=\begin{pmatrix}e_k^1 & 0\\ 0 & b_k^1\end{pmatrix},\ B_k=\begin{pmatrix}P_k & 0\\ 0 & Q_k\end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3)$$

则式(1)和式(2)可结合在一起表示为

$$z_{k+1}=A_kz_k+B_k\pi_k,\ k=0,1,\cdots,T-1. \quad (4)$$

尽管投资者原来计划时刻T终止投资管理活动, 但因在投资管理过程中可能受到一些不可控因素的影响而退出市场. 设这个退出时刻为τ, 其中τ是一个大于0的外生随机变量, 设其概率分布为$\mathrm{P}(\tau=k)=\tilde{p}_k(k=1,2,\cdots)$, 分布函数为$F(t)$, 即$F(t)=\mathrm{P}(\tau\leqslant k)=\sum\limits_{k=1}^{t}\tilde{p}_k$. 则它实际退出时间$T\wedge\tau:=\min\{T,\tau\}$的概率分布为

$$p_k:=\mathrm{P}(T\wedge\tau=k)=\tilde{p}_k,\ k=1,2,\cdots,T-1,$$
$$p_T:=\mathrm{P}(T\wedge\tau=T)=1-F(T-1)=1-\sum_{k=1}^{T-1}\tilde{p}_k.$$

设M和N是同阶对称矩阵. 记$M>N(M\geqslant N)$当且仅当$M-N$为正定(半正定)矩阵; 若M为正定(半正定)矩阵, 记$M>0(M\geqslant 0)$. 和大多文献一样, 本文有如下假设:

假设 1 $\mathrm{E}[\eta_k\eta_k']>0, k=0,1,\cdots,T-1$.

假设 2 随机序列η_k是统计独立的, $k=0,1,\cdots,T-1$; 即当$i\neq j$时, η_i与η_j统计独立.

假设 3 $p_T>0$, 即以正概率在T退出市场.

假设 4 $\mathrm{E}[\varUpsilon_k]\neq\vec{0}$, 其中$\vec{0}$为2维零向量, $k=0,1,\cdots,T-1$.

设$\{\wp_k\}$为域流或信息流, 其中$\wp_k$表示到时刻k为止可获得的所有市场信息所构成的集合. 如果π_k是$\wp_k$可测的, 本文称策略$\pi=\{\pi_k;k=0,1,\cdots,T-1\}$是可行的. 令$\varTheta(z_k)$表示从时刻$k$开始及初始状态$z_k$下的所有可行策略组成的集合. 本文定义在时刻$k$投资者的盈余为$S_k=x_k-l_k$. 不确定终止时间多期均值–方差资产–负债管理问题就是对给定终端盈余$S_{T\wedge\tau}$的期望为d, 寻找最优的可行策略, 使得终端盈余的方差最小, 即

$$\begin{cases}\min\limits_{\pi\in\varTheta(z_0)}\ \mathrm{var}[S_{T\wedge\tau}]=\mathrm{E}[(S_{T\wedge\tau}-d)^2],\\ \text{s.t. }\mathrm{E}[S_{T\wedge\tau}]=d,\ \text{式}(1)-(2).\end{cases} \quad (5)$$

本文把优化问题(5)的最优解$\pi^*=\{\pi_k^*;\ k=0,1,\cdots,T-1\}$称为有效策略. 有效策略相应于方差–期望var–E坐标平面上的点$(\mathrm{var}[S_{T\wedge\tau}],\ d)$为有效点, 所有有效点构成的集合为有效边界.

3 问题的转化及求解(Transformation and solution of the problem)

注意到$\mathrm{E}[S_{T\wedge\tau}]=d$等价于$\mathrm{E}[S_{T\wedge\tau}-d]=0$. 为表达式方便, 本文规定$p_0=0$. 则由概率理论或参考文献[12], 优化问题(5)等价于如下优化问题:

$$\begin{cases}\min\limits_{\pi\in\varTheta(z_0)}\ \mathrm{var}[S_{T\wedge\tau}]=\mathrm{E}[\sum\limits_{s=0}^{T}p_s(S_s-d)^2],\\ \text{s.t. }\mathrm{E}[\sum\limits_{s=0}^{T}p_s(S_s-d)]=0,\ \text{式}(1)-(2).\end{cases} \quad (6)$$

由Lagrange对偶理论(详见Luenberger(1968))知, 本文可先固定Lagrange乘子γ, 求解如下优化问题:

$$\begin{cases}\min\limits_{\pi\in\varTheta(z_0)}\ \mathrm{E}[\sum\limits_{s=0}^{T}p_s(S_s-d)^2]+2\gamma\mathrm{E}[\sum\limits_{s=0}^{T}p_s(S_s-d)],\\ \text{s.t. 式}(1)-(2).\end{cases} \quad (7)$$

接下来先求解优化问题(7). 由于$S_s=c'z_s$, 故

$$\mathrm{E}[\sum_{s=0}^{T}p_s(S_s-d)^2]+\mathrm{E}[2\gamma\sum_{s=0}^{T}p_s(S_s-d)]=$$

$$\mathrm{E}[\sum_{s=0}^{T} p_s(z_s'cc'z_s + 2ac'z_s)] - d^2 - 2ad,$$

其中: $a = \gamma - d$, c由式(3)给出. 由于$(-d^2 - 2ad)$为固定, 所以优化问题(7)等价于

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi\in\Theta(z_0)} \mathrm{E}[\sum\limits_{s=0}^{T} p_s(z_s'cc'z_s + 2ac'z_s)], \\ \text{s.t. 式}(4). \end{cases} \tag{8}$$

下面本文采用动态规划的方法求解优化问题(8).

令$f_k(z_k)$表示优化问题(8)从第k期的状态z_k出发的剩余过程的最优值函数, 即

$$\begin{cases} f_k(z_k) = \min\limits_{\pi\in\Theta(z_k)} \mathrm{E}[\sum\limits_{s=k}^{T} p_s(z_s'cc'z_s + 2ac'z_s)], \\ \text{s.t. 式}(4). \end{cases} \tag{9}$$

则由动态规划的原理可得优化问题(8)的Bellman方程为

$$\begin{cases} f_k(z_k) = \min\limits_{\pi_k}\{p_k(z_k'cc'z_k + 2ac'z_k) + \\ \qquad \mathrm{E}[f_{k+1}(A_kz_k + B_k\pi_k)]\}, \\ f_T(z_T) = p_T(z_T'cc'z_T + 2ac'z_T). \end{cases} \tag{10}$$

于是, $f_0(z_0)$即为优化问题(8)的最优值.

为了表达方便和研究需要, 下面介绍矩阵的一些相关概念及结果.

定义 1　设$M = (m_{ij})_{s\times t}$和$N = (n_{ij})_{s\times t}$为同阶矩阵. 则矩阵M和N的Hadamard乘积定义为这两个矩阵对应元素相乘[22], 即$M\circ N = (m_{ij}n_{ij})_{s\times t}$.

Hadamard乘积满足交换率和分配率, 即

$$M\circ N = N\circ M,\ (M+N)\circ C = M\circ C + N\circ C.$$

令M^+表示矩阵M的Moore-Penrose广义逆(有关定义和性质见文献[22]). 设M为一对称方阵, 且分块为$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}' & M_{22}\end{pmatrix}$, 其中$M_{11}$和$M_{22}$为对称方阵. 下面给出本文需要用到的关于矩阵的一些结果.

引理 1[23]　$M > 0$等价于$M_{22} > 0$且$M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}' > 0$.

引理 2[22]　若$N > 0$, $M \geqslant 0$且没有零对角元素, 则$M\circ N > 0$.

引理 3[22]　设$M > 0$, $N > 0$, 则$M\circ N > 0$.

引理 4[24]　设$M \geqslant 0$, $N \geqslant 0$, $C = MM^+C$和$D = NN^+D$, 则有

$$(C'\circ D')(M\circ N)^+(C\circ D) \leqslant (C'M^+C)\circ(D'N^+D).$$

为了给出最优值函数$f_k(z_k)$的表达式, 下面构造序列Ω_k, g_k和φ_k满足如下递推关系和边界条件(这里本文先假定并随后将证明$\mathrm{E}[B_k\Omega_{k+1}B_k]$的逆矩阵$\mathrm{E}^{-1}[B_k\Omega_{k+1}B_k]$存在):

$$\begin{cases} \Omega_k = \\ \mathrm{E}[A_k\Omega_{k+1}A_k] - \mathrm{E}[A_k\Omega_{k+1}B_k]\times \\ \mathrm{E}^{-1}[B_k\Omega_{k+1}B_k]\mathrm{E}[B_k\Omega_{k+1}A_k] + 2p_kc'c, \\ \Omega_T = 2p_Tcc', \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} g_k = \\ (\mathrm{E}[A_k] - \mathrm{E}[A_k\Omega_{k+1}B_k]\times \\ \mathrm{E}^{-1}[B_k'\Omega_{k+1}B_k]\mathrm{E}[B_k'])g_{k+1} + 2p_kc, \\ g_T = 2p_Tc, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \varphi_k = \varphi_{k+1} - \dfrac{1}{2}g_{k+1}'\mathrm{E}[B_k]\times \\ \qquad \mathrm{E}^{-1}[B_k\Omega_{k+1}B_k]\mathrm{E}[B_k]g_{k+1}, \\ \varphi_T = 0, \end{cases} \tag{13}$$

其中: Ω_k为2×2阶对称矩阵, g_k为2维列向量, φ_k为标量. 由于矩阵交换率不成立, 本文难以将Ω_{k+1}从如$\mathrm{E}[A_k\Omega_{k+1}A_k]$这些项中分离出来, 从而导致了计算和研究的不方便. 但基于A_k和B_k为对角矩阵的结构, 笔者发现利用矩阵Hadamard乘积表示方法, 可以克服这个难题. 具体结果如下.

引理 5　对所有$k = 0, 1, \cdots, T-1$, 有

$$\mathrm{E}[A_k\Omega_{k+1}A_k] = \mathrm{E}[L_kL_k']\circ\Omega_{k+1},$$
$$\mathrm{E}[B_k\Omega_{k+1}B_k] = \mathrm{E}[\Upsilon_k\Upsilon_k']\circ\Omega_{k+1},$$
$$\mathrm{E}[A_k\Omega_{k+1}B_k] = \mathrm{E}[L_k\Upsilon_k']\circ\Omega_{k+1},$$
$$\mathrm{E}[B_k'\Omega_{k+1}A_k] = \mathrm{E}[\Upsilon_kL_k']\circ\Omega_{k+1},$$

其中L_k和Υ_k由式(3)定义.

证　根据Hadamard乘积的定义容易验证.

为研究需要, 本文再给出相关引理.

引理 6　在本文假设下, 对任意$k = 0, 1, \cdots, T-1$, 都有

$$\mathrm{E}[\Upsilon_k\Upsilon_k'] > 0,$$
$$\mathrm{E}[L_kL_k'] - \mathrm{E}[L_k\Upsilon_k']\mathrm{E}^{-1}[\Upsilon_k\Upsilon_k']\mathrm{E}[\Upsilon_kL_k'] > 0.$$

证　首先证明如下不等式成立:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}[L_kL_k'] & \mathrm{E}[L_k\Upsilon_k'] \\ \mathrm{E}[\Upsilon_kL_k'] & \mathrm{E}[\Upsilon_k\Upsilon_k'] \end{pmatrix} > 0. \tag{14}$$

令$H_k = \begin{pmatrix} L_k \\ \Upsilon_k \end{pmatrix}$, 即要证明$\mathrm{E}[H_kH_k'] > 0$.

显然, $\mathrm{E}[H_kH_k'] \geqslant 0$, 若$\mathrm{E}[H_kH_k']$不是正定矩阵, 则$|\mathrm{E}[H_kH_k']| = 0$. 从而存在非零向量$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)'$, 使得$|\mathrm{E}[\beta'H_kH_k'\beta]| = 0$. 所以, 由概率论知识有

$$\begin{aligned} &\beta'H_k = \\ &\beta_1e_k^1 + \beta_2b_k^1 + \beta_3(e_k^2 - e_k^1) + \beta_4(b_k^2 - b_k^1) = \\ &(\beta_1 - \beta_3)e_k^1 + \beta_3e_k^2 + (\beta_2 - \beta_4)b_k^1 + \beta_4b_k^2 = 0 \end{aligned}$$

以概率1成立. 容易验证当$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$不全为零时,

$(\beta_1-\beta_2)$, $(\beta_2-\beta_4)$, β_3, β_4也不全零. 从而由概率论知识有, $|\mathrm{E}[\eta_k\eta_k']|=0$, 这与假设1中$\mathrm{E}[\eta_k\eta_k']>0$矛盾. 所以$\mathrm{E}[H_kH_k']>0$, 从而式(14)成立.

再根据式(14)和引理1可得本引理成立. 证毕.

引理 7 在本文假设下, 对任意$k=0,1,\cdots,T-1$, 都有$\mathrm{E}[B_k\varOmega_{k+1}B_k]>0$, $\varOmega_k>0$.

证 当$k=T-1$时. 由式(11)知

$$\varOmega_T=2p_Tc'c=\begin{pmatrix}\varOmega_T^{11} & \varOmega_T^{12}\\ \varOmega_T^{12} & \varOmega_T^{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p_T & -2p_T\\ -2p_T & 2p_T\end{pmatrix}\geqslant 0.$$

由假设3知$\varOmega_T^{11}(i)=\varOmega_T^{22}(i)=2p_T>0$. 且由引理6知$\mathrm{E}[\varUpsilon_{T-1}\varUpsilon_{T-1}']>0$. 所以由引理2有

$$\mathrm{E}[B_{T-1}'(i)\varOmega_TB_{T-1}]=\varOmega_T\circ\mathrm{E}[\varUpsilon_{T-1}\varUpsilon_{T-1}']>0.$$

由式(11)、引理4和引理5, 有

$$\begin{aligned}&\varOmega_{T-1}\geqslant\\&2p_{T-1}c'c+(\mathrm{E}[L_{T-1}L_{T-1}']-\\&\mathrm{E}[L_{T-1}\varUpsilon_{T-1}']\mathrm{E}^{-1}[\varUpsilon_{T-1}\varUpsilon_{T-1}']\mathrm{E}[\varUpsilon_{T-1}L_{T-1}'])\circ\varOmega_T.\end{aligned}$$

又根据引理2和引理6可得$\varOmega_{T-1}>2p_{T-1}c'c\geqslant 0$.

现假设$\mathrm{E}[B_{k+1}\varOmega_{k+2}B_{k+1}]>0$, $\varOmega_{k+1}>0$. 又由引理6知$\mathrm{E}[\varUpsilon_k\varUpsilon_k']>0$. 所以由引理3有

$$\mathrm{E}[B_k\varOmega_{k+1}B_k]=\mathrm{E}[\varUpsilon_k\varUpsilon_k']\circ\varOmega_{k+1}>0.$$

类似前面$k=T-1$情形证明的步骤(只是将其中的引理2改成引理3), 可进一步证明$\varOmega_k>0$.

由数学归纳法知本引理得证. 证毕.

引理7表明$\mathrm{E}[B_k\varOmega_{k+1}B_k]$是可逆的, 从而满足前面所作假设. 有了以上的准备, 则$f_k(z_k)$的表达式可由如下定理1给出.

定理 1 对于$k=0,1,\cdots,T$, Bellman方程(10)的解, 即优化问题(9)的最优值函数为

$$f_k(z_k)=\frac{1}{2}z_k'\varOmega_kz_k+ag_k'z_k+\varphi_ka^2,\tag{15}$$

其中$\varOmega_k$, g_k和φ_k由式(11)–(13)确定.

证 用数学归纳法证明. 当$k=T$时. 由式(11)–(13)和式(10), 容易验证此时式(15)成立.

现假设对于$k+1$, 式(15)成立. 则由式(10)有

$$\begin{aligned}&f_k(z_k)=\\&\min_{\pi_k}\{p_k\,(z_k'cc'z_k+2ac'z_k)+\\&\mathrm{E}[\frac{1}{2}\,(A_kz_k+B_k\pi_k)'\,\varOmega_{k+1}\,(A_kz_k+B_k\pi_k)+\\&ag_{k+1}'\,(A_kz_k+B_k\pi_k)+\varphi_{k+1}a^2]\}=\\&p_k\,(z_k'cc'z_k+2ac'z_k)+\frac{1}{2}z_k'\mathrm{E}[A_k\varOmega_{k+1}A_k]z_k+\\&ag_{k+1}'\mathrm{E}[A_k]z_k+\varphi_{k+1}a^2+\\&\min_{\pi_k}\{\frac{1}{2}\pi_k'\mathrm{E}[B_k\varOmega_{k+1}B_k]\pi_k+(z_k'\mathrm{E}[A_k\varOmega_{k+1}B_k]+\\&ag_{k+1}'\mathrm{E}[B_k])\pi_k\}.\end{aligned}\tag{16}$$

由引理7知, $\mathrm{E}[B_k\varOmega_{k+1}B_k]>0$. 从而由上式关于$\pi_k$的一阶条件(也为充分条件)可得最优策略

$$\begin{aligned}\pi_k^*=&-\mathrm{E}^{-1}[B_k\varOmega_{k+1}B_k]\times(\mathrm{E}[B_k\varOmega_{k+1}A_k]z_k+\\&\mathrm{E}[B_k]g_{k+1}a).\end{aligned}\tag{17}$$

将式(17)代入式(16)整理计算, 并根据式(11)–(13)有

$$f_k(z_k)=\frac{1}{2}z_k'\varOmega_kz_k+ag_k'z_k+\varphi_ka^2.$$

由数学归纳法, 本定理得证. 证毕.

根据定理1的证明, 可得如下结论.

推论 1 优化问题(9)的最优策略由式(17)给出.

下面本文讨论序列$\varOmega_k$, g_k和φ_k的具体计算. 若给出所需市场参数的值, 根据式(11)–(13), 进行倒向迭代, 对所有k可以计算出$\varOmega_k$, g_k和φ_k的数值.

4 有效投资策略及有效边界(Efficient investment strategy and efficient frontier)

由前面分析知优化问题(7)的最优值为

$$F(z_0,\gamma):=f_0(z_0)-d^2-2ad.$$

由Lagrange对偶理论(详见文献[25])并结合定理1, 优化问题(5)(与优化问题(6)等价), 其最优值, 即最小方差可由$F(z_0,\gamma)$关于γ求最大值得到, 即

$$\begin{aligned}&\mathrm{var}^*[S_{T\wedge\tau}]=\max_{\gamma}F(z_0,\gamma)=\\&\max_{\gamma}\{\varphi_0\gamma^2+(g_0'z_0-2d\,(1+\varphi_0))\,\gamma+\\&\frac{1}{2}z_0'\varOmega_0z_0-g_0'z_0d+d^2(1+\varphi_0)\}.\end{aligned}\tag{18}$$

为了表明优化问题(18)的最优值存在, 本文先给出如下引理8.

引理 8 对$k=0,1,\cdots,T-1$, 都有$\varphi_k<0$.

证 对k进行数学归纳. 当$k=T-1$时. 令$\varLambda_{T-1}=\mathrm{E}[B_{T-1}]c=\begin{pmatrix}\mathrm{E}[P_{T-1}]\\-\mathrm{E}[Q_{T-1}]\end{pmatrix}$. 由假设4知$\varLambda_{T-1}\neq\vec{0}$(否则可得$\mathrm{E}[\varUpsilon_k]=\vec{0}$, 这与假设4矛盾); 由假设3知$p_T>0$, 再由引理7知$\mathrm{E}^{-1}[B_{T-1}\varOmega_TB_{T-1}]>0$. 所以由式(13)有

$$\varphi_{T-1}=-2p_T^2\varLambda_{T-1}'\mathrm{E}^{-1}[B_{T-1}\varOmega_TB_{T-1}]\varLambda_{T-1}<0.$$

现假定$\varphi_{k+1}<0$. 由引理7有$\mathrm{E}^{-1}[B_k'\varOmega_{k+1}B_k]>0$. 所以由式(13)有

$$\begin{aligned}\varphi_k=&\varphi_{k+1}-\frac{1}{2}g_{k+1}'\mathrm{E}[B_k]\times\\&\mathrm{E}^{-1}[B_k\varOmega_{k+1}B_k]\mathrm{E}[B_k]g_{k+1}\leqslant\varphi_{k+1}<0.\end{aligned}$$

根据数学归纳法, 本引理得证. 证毕.

引理8表明$\varphi_0<0$, 所以优化问题(18)最大值存在, 由一阶条件(也是充分条件)可得最大值点为

$$\gamma^*=\frac{2d(1+\varphi_0)-g_0'z_0}{2\varphi_0}.\tag{19}$$

代入式(18)得优化问题(5)的最优策略为

$$\pi_k^* = -\mathrm{E}^{-1}[B_k\Omega_{k+1}B_k](\mathrm{E}[B_k\Omega_{k+1}A_k]z_k + \frac{2d - g_0'z_0}{2\varphi_0}\mathrm{E}[B_k]g_{k+1}). \tag{20}$$

再将式(19)代入式(18)得优化问题(5)的最优值为

$$\mathrm{var}^*[S_{T\wedge\tau}] = -\frac{1+\varphi_0}{\varphi_0}(d - \frac{g_0'z_0}{2(1+\varphi_0)})^2 + \frac{1}{2}z_0'(\Omega_0 - \frac{g_0g_0'}{2(1+\varphi_0)})z_0. \tag{21}$$

由式(21)可知, 取$d = d_{\sigma_{\min}} := \frac{g_0'z_0}{2(1+\varphi_0)}$时, 可得全局最小方差. 显然, 投资者不会选择期望终端盈余水平小于$d_{\sigma_{\min}}$. 至此, 本文有如下结果.

定理 2　带内生负债不确定终止时间多期均值–方差模型(5), 对于给定期望终端盈余$d(\geqslant d_{\sigma_{\min}})$, 有效策略和有效边界分别由式(20)和式(21)给出.

5　结论(Conclusions)

本文从银行、保险公司、其他金融机构和个人投资者的实际需要出发, 基于多期均值–方差模型研究了带内生负债的不确定终止时间资产–负债管理问题. 采用Lagrange对偶理论、矩阵Hadamard乘积技术和动态规划相结合的方法得到了有效策略及有效边界的解析表达式. 未来还可以对本文模型作如下两方面的拓展: 1) 本文只是考虑了两种资产和两种债务的情形, 未来可以进一步考虑多资产和多债务的情形; 2) 本文假设市场环境是确定的, 以后可以考虑市场状态服从马尔可夫机制转移的情形.

参考文献(References):

[1] MARKOWITZ H. Portfolio selection [J]. *Journal of Finance*, 1952, 7(1): 77 – 91.

[2] LI D, NG W L. Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation [J]. *Mathematical Finance*, 2000, 10(3): 387 – 406.

[3] ZHOU X Y, LI D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework [J]. *Applied Mathematics Optimization*, 2000, 42(1): 19 – 33.

[4] BIELECKI T R, JIN H Q, PLISKA S R, et al. Continuous-time mean–variance portfolio selection with bankruptcy prohibition [J]. *Mathematical Finance*, 2005, 15(2): 213 – 244.

[5] 郭文旌. 跳跃扩散股价的最优投资组合选择 [J]. 控制理论与应用, 2005, 22(2): 171 – 176.
(GUO Wenjing. Optimal portfolio selection when stock prices follow jump-diffusion process [J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(2): 171 – 176.)

[6] COSTA O L V, OLIVEIRA A D. Optimal mean-variance control for discrete-time linear systems with Markovian jumps and multiplicative noises [J]. *Automatica*, 2012, 48(2): 304 – 315.

[7] WU H L, LI Z F. Multi-period mean-variance portfolio selection with regime switching and a stochastic cash flow [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 50(3): 371 – 384.

[8] CHRISTOPHETTE B S, NICOLE E K, MONIQUE J, et al. Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain [J]. *Journal of Mathematical Economics*, 2008, 44(11): 1100 – 1113.

[9] PLISKA S R, YE J C. Optimal life insurance purchase and consumption/investment under uncertain lifetime [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2007, 31(5): 1307 – 1319.

[10] MARTELLINI L, UROSEVIC B. Static mean-variance analysis with uncertain time horizon [J]. *Management Science*, 2006, 52(6): 955 – 964.

[11] 郭文旌, 胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优投资组合 [J]. 管理科学学报, 2005, 8(2): 13 – 19.
(GUO Wenjing, HU Qiying. Multi-period optimization when exit time is uncertain [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 8(2): 14 – 19.)

[12] WU H L, LI Z F. Multi-period mean-variance-portfolio selection with Markov regime switching and uncertain time-horizon [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2011, 24(1): 140 – 155.

[13] SHARPE W F, TINT L G. Liabilities a new approach [J]. *Journal of Portfolio Management*, 1990, 16(2): 5 – 10.

[14] LEIPPOLD M, TROJANI F, VANINI P. A geomeric approach to multiperiod mean vaiance optimization of assets and liabilities [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2004, 28(6): 1079 – 1113.

[15] YI L, LI Z F, LI D. Mutli-period portfolio selection for asset-liability management with uncertain investment horizon [J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2008, 4(3): 535 – 552.

[16] CHEN P, YANG H L. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: a multi-period model [J]. *Applied Mathematical Finance*, 2011, 18(2): 29 – 50.

[17] CHIU M C, LI D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2006, 39(3): 330 – 355.

[18] XIE S X, LI Z F, WANG S Y. Continuous-time portfolio selection with liability: mean–variance model and stochastic LQ approach [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(3): 943 – 953.

[19] CHEN P, YANG H L, YIN G. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: a continuous-time model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 43(3): 456 – 465.

[20] XIE S X. Continuous-time mean-variance portfolio selection with liability and regime switching [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 45(1): 148 – 155.

[21] LEIPPOLD M, TROJANI F, VANINI P. Multiperiod mean-variance efficient portfolios with endogenous liabilities [J]. *Quantitative Finance*, 2011, 11(10): 1535 – 1546.

[22] 方保镕, 周继东, 李继民．矩阵论 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004．
(FANG Baorong, ZHOU Jidong, LI Jimin. *Matrix Theory* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)

[23] KREINDLER E, JARESON A. Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, 17(1): 147 – 148.

[24] LIU S Z. Inequalities involving hadamard products of positive semidefinite matrices [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, 243(2): 458 – 463.

[25] LUENBERGER D G. *Optimization by Vector Space Methods* [M]. New York: Wiley, 1968.

作者简介:

姚海祥　(1978–), 男, 副教授, 博士, 目前研究方向为金融工程与风险控制, E-mail: yaohaixiang@mail.gdufs.edu.cn;

马庆华　(1963–), 男, 教授, 目前研究方向为微分方程与金融数学, E-mail: mqh@mail.gdufs.edu.cn;

姜灵敏　(1956–), 男, 教授, 博士, 目前研究方向为金融工程与风险控制, E-mail: jlingmin@gmail.com.