

## 非线性切换广义系统的输入-状态稳定性

高在瑞<sup>1,2</sup>, 沈艳霞<sup>1</sup>, 纪志成<sup>1†</sup>

(1. 江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122; 2. 潍坊学院 信息与控制工程学院, 山东 潍坊 261061)

**摘要:** 针对一类非线性切换广义系统, 分两种情况对其输入-状态稳定性问题进行了研究. 采用平均驻留时间方法, 通过设计适当的切换规则, 给出了非线性切换广义系统整体输入-状态稳定的充分条件. 相较于已有的控制方法, 该方法无需构造输入-状态稳定的Lyapunov函数以及无需设计控制器的具体结构, 这在一定程度上方便了控制器的设计. 最后, 两个仿真算例表明了所提方法的有效性.

**关键词:** 非线性广义系统; 切换系统; 平均驻留时间方法; 输入-状态稳定

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Input-to-state stability analysis for nonlinear switched descriptor systems

GAO Zai-ru<sup>1,2</sup>, SHEN Yan-xia<sup>1</sup>, JI Zhi-cheng<sup>1†</sup>

(1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry, Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

2. College of Information and Control Engineering, Weifang University, Weifang Shandong 261061, China)

**Abstract:** The input-to-state stability for a class of nonlinear switched descriptor systems is considered for two cases. Based on the average dwell time approach, sufficient conditions are derived to guarantee that the whole system is input-to-state stable through designing an appropriate switching rule. Compared with the existing methods, it is more convenient to design the controller for each subsystem, because it does not require to construct the input-to-state stable control Lyapunov function and to design the specific structure of the control inputs. Finally, two numerical examples show that the results obtained in this paper are feasible and effective.

**Key words:** nonlinear descriptor systems; switched systems; average dwell time approach; input-to-state stability

### 1 引言(Introduction)

切换系统作为一类特殊的混杂控制系统, 它是由一族微分或差分方程描述的子系统及一个切换规则组成, 该切换规则协调各子系统之间的运行<sup>[1]</sup>. 目前, 切换系统已经在化工、电力、交通、经济等领域有着广泛应用. 由于切换系统在改善系统性能方面的作用以及满足智能控制飞速发展的需要, 近年来, 对切换系统的研究取得了丰富的研究成果<sup>[1-6]</sup>.

广义系统又称为奇异系统, 是一类比正常系统更一般化、能更好的描述实际系统的动态系统, 近些年来受到广泛关注<sup>[7-9]</sup>. 在实际的控制系统中, 广义系统的切换现象普遍存在, 例如, 升压斩波电路等可以进行切换广义系统建模<sup>[10]</sup>. 因此, 对切换广义系统的研究具有重要的理论意义和实际意义. 切换广义系统的研究才刚刚起步, 还未形成一套完整的理论体系. 近几年来, 对切换广义系统的研究得到了越来越多的关注, 主要集中在稳定性分析与综合<sup>[11-18]</sup>,

$H_\infty$ 控制和保成本控制<sup>[19-22]</sup>,  $H_\infty$ 滤波控制<sup>[23-24]</sup>, 可控性和能达性<sup>[25]</sup>等, 所采用的研究方法主要有公共Lyapunov函数方法<sup>[11-13, 19-21]</sup>、多Lyapunov函数方法<sup>[14-16, 22]</sup>、驻留时间和平均驻留时间方法<sup>[17-18]</sup>等. 相对而言, 对驻留时间和平均驻留时间方法的研究还较少.

输入-状态稳定性的概念由Sontag等<sup>[26]</sup>于1989提出, 是研究非线性系统稳定性的有力工具, 已经取得了丰富的研究成果<sup>[4-6, 8, 26-27]</sup>, 采用的主要方法是Lyapunov函数方法. 由于寻求合适的Lyapunov函数具有一定的难度, 因此Lyapunov函数方法具有较大的保守性.

稳定是一切控制系统正常工作的前提条件, 因此稳定性研究是系统理论研究的一个重要方面. 虽然切换广义系统稳定性方面的研究已经取得了一些研究成果, 但关于这类系统的输入-状态稳定性研究还未见相关报导.

本文以输入-状态稳定性的定义为基础,利用驻留时间和平均驻留时间方法,结合Gronwall-Bellman不等式,分两类情况讨论了非线性切换广义系统的输入-状态稳定性问题.通过设计适当的切换规则,只需设计的控制输入有界,就可以保证系统整体输入-状态稳定.该方法的优点在于,无需设计系统输入-状态稳定的Lyapunov函数,对各子系统的控制输入的结构也没有具体要求,这在很大程度上降低了控制器的设计难度.仿真算例验证了本文所提方法的有效性.

## 2 问题描述(Problem description)

考虑如下一类非线性切换广义系统:

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + h_{\sigma(t)}(t, x)u_{\sigma(t)}(t). \quad (1)$$

式中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  为系统状态,  $u_{\sigma(t)}(t) \in \mathbb{R}^p$  为连续控制输入, 满足  $\|u_{\sigma(t)}(t)\| \leq \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_{\sigma(t)}(\tau)\|$ ;  $\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{M} = \{1, 2, \dots, m\}$  为分段常值切换信号. 不失一般性, 通常假设右连续,  $\sigma(t) = i$  表示在时刻  $t$  时, 系统的第  $i$  个子系统被激活;  $E_i, A_i$  为适当维数的常数矩阵, 且  $\text{rank} E_i = r \leq n$ ;  $h_i(t, x)$  为可积函数, 满足  $\|h_i(t, x)\| \leq h_i$ ,  $h_i$  为已知常数. 由于广义系统的内在特性, 初始条件以  $E_{i_0}x(t_0) = E_{i_0}x_0$  的形式给出.

考虑线性连续广义系统  $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ , 引入如下基本定义.

**定义 1**<sup>[7]</sup> 若存在标量  $s$ , 使  $\det(sE_i - A_i)$  不等于零, 称  $(E_i, A_i)$  是正则的; 若  $\deg(\det(sE_i - A_i)) = \text{rank} E_i$ , 称  $(E_i, A_i)$  是无脉冲的.

**假设 1** 非线性切换广义系统(1)的初始状态  $E_{i_0}x(t_0) = E_{i_0}x_0$  为一致初始状态, 在切换时刻  $t_k$  处不存在状态跳跃.

**注 1** 在假设1下, 若系统的每个子系统都是正则、无脉冲的, 则切换广义系统是正则、无脉冲的.

**假设 2** 对矩阵对  $(E_i, A_i)$ ,  $\forall i \in \mathbf{M}$ , 存在非奇异矩阵  $M_i$  和一致非奇异矩阵  $N$ , 使得

$$M_i E_i N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_i A_i N = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix}.$$

**定义 2**<sup>[8]</sup> 若连续函数  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  严格递增, 且  $\alpha(0) = 0$ , 称  $\alpha$  属于  $\mathcal{K}$  类函数; 若  $\alpha$  属于  $\mathcal{K}$  类函数, 且  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) \rightarrow +\infty$ , 称  $\alpha$  属于  $\mathcal{K}_\infty$  类函数.

**定义 3**<sup>[8]</sup> 连续函数  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , 若对每个固定的  $t$ , 映射  $\beta(s, t)$  都是关于  $s$  的  $\mathcal{K}$  类函数, 且对每个固定的  $s$ , 映射  $\beta(s, t)$  是  $t$  的递减函数, 且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\beta(s, t) \rightarrow 0$ , 称  $\beta$  是  $\mathcal{KL}$  类函数.

**定义 4**<sup>[8]</sup> 若存在一个  $\mathcal{KL}$  类函数  $\beta$  和一个  $\mathcal{K}$  类函数  $\gamma$ , 使得对任意的初始状态  $E x(t_0) = E x_0$  和任

意的有界控制输入  $u(t)$ , 有

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|E x_0\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right).$$

称系统  $E\dot{x} = F(t, x, u)$  是输入-状态稳定的.

**定义 5**<sup>[17]</sup> 给定时间区间  $[t_0, t_f]$ , 若存在  $N_0 \geq 0$  和  $\tau_a > 0$ , 使得

$$N_{\sigma(t)}(t_0, t_f) \leq N_0 + (t_f - t_0)/\tau_a$$

成立, 称  $\tau_a$  为平均驻留时间. 其中:  $N_{\sigma(t)}(t_0, t_f)$  表示在区间  $[t_0, t_f]$  上系统切换的次数,  $N_0$  称为抖颤界.

**引理 1**(Gronwall-Bellman不等式<sup>[4]</sup>) 对于连续函数  $m : [a, b]$ , 连续非负函数  $n : [a, b]$ , 若连续非负函数  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $a \leq t \leq b$  时满足

$$y(t) \leq m(t) + \int_a^t n(s)y(s)ds,$$

那么在  $a \leq t \leq b$  上同时有

$$y(t) \leq m(t) + \int_a^t m(s)n(s)\exp\left(\int_s^t n(z)dz\right)ds.$$

## 3 主要结果(Main results)

根据假设2, 对非线性切换广义系统(1)作非奇异状态变换  $\bar{x}(t) = N^{-1}x(t)$ , 则对  $\forall i \in \mathbf{M}$ , 有

$$M_i E_i N N^{-1} \dot{\bar{x}}(t) = M_i A_i N N^{-1} \bar{x} + M_i h_i(t, \bar{x}) u_i(t).$$

令

$$M_i h_i(t, \bar{x}) = \begin{bmatrix} h_{i1}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ h_{i2}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix}.$$

若  $A_{i22}$  非奇异, 对  $\forall i \in \mathbf{M}$ , 则有

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_{i1} \bar{x}_1(t) + \bar{h}_{i1}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) u_i(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = -\bar{A}_{i2} \bar{x}_1(t) - \bar{h}_{i2}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) u_i(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{i1} &= A_{i11} - A_{i12} \bar{A}_{i2}, \quad \bar{A}_{i2} = A_{i22}^{-1} A_{i21}, \\ \bar{h}_{i1}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) &= h_{i1}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) - A_{i12} \bar{h}_{i2}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2), \\ \bar{h}_{i2}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) &= A_{i22}^{-1} h_{i2}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{aligned}$$

相应地,

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{10} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

非线性切换系统(2)的自治系统如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \bar{A}_{i1} \hat{x}_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = -\bar{A}_{i2} \hat{x}_1(t), \quad \forall i \in \mathbf{M}. \end{cases} \quad (4)$$

其中动态部分  $\hat{x}_1(t)$  的初始状态为  $\hat{x}_{10}$ .

首先, 考虑自治系统(4)的子系统全是指数稳定子系统的情况. 存在  $\lambda_i > 0$  和  $\mu_i > 0$ , 使得

$$\|\hat{x}_1(t)\| \leq \mu_i \exp(-\lambda_i(t - t_0)) \|\hat{x}_{10}\|. \quad (5)$$

对于非线性切换广义系统(1)的输入-状态稳定, 给出如下结论.

**定理 1** 对非线性切换广义系统(1), 若存在非奇异矩阵  $X_i$ , 满足

$$E_i^T X_i = X_i^T E_i \geq 0, \quad (6)$$

$$A_i^T X_i + X_i^T A_i < 0. \quad (7)$$

假设2成立, 自治系统(4)的每个子系统满足(5), 平均驻留时间满足

$$\begin{aligned} \tau_a &\geq \ln \mu / \lambda^*, \\ \text{s.t. } \mu &= \max\{\mu_i\}, \lambda = \min\{\lambda_i\}, 0 < \lambda^* < \lambda, \end{aligned}$$

则非线性切换广义系统(1)是输入-状态稳定的.

**证** 由式(6)和式(7)可知,  $(E_i, A_i)$ 是正则、无脉冲的. 根据文献[11]知, 在假设2下,  $A_{i22}$ 是非奇异的. 因此, 系统(1)可经非奇异变换  $\bar{x}(t) = N^{-1}x(t)$  转化为系统(2). 对于系统(2)和系统(4)的任意子系统, 其动态部分的状态解分别为

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &= \bar{x}_{10} + \int_{t_0}^t (\bar{A}_{i1} \bar{x}_1(s) + \bar{h}_{i1}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) u_i(s)) ds, \\ \hat{x}_1(t) &= \hat{x}_{10} + \int_{t_0}^t (\bar{A}_{i1} \hat{x}_1(s)) ds. \end{aligned}$$

由于  $h_i(t, x)$  为可积函数, 且满足  $\|h_i(t, x)\| \leq h_i$ , 所以  $\|M_i h_i(t, x)\|$  有界. 不妨设

$$\|\bar{h}_{i1}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\| \leq \bar{h}_{i1}, \|\bar{h}_{i2}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\| \leq \bar{h}_{i2}.$$

对于系统(2)动态部分的状态  $\bar{x}_1(t)$ , 有

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_1(t)\| &\leq \\ \|\hat{x}_1(t)\| + \|\bar{x}_1(t) - \hat{x}_1(t)\| &= \\ \|\hat{x}_1(t)\| + \|(\bar{x}_{10} - \hat{x}_{10}) + & \\ \int_{t_0}^t (\bar{A}_{i1}(\bar{x}_1(s) - \hat{x}_1(s)) + \bar{h}_{i1}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) u_i(s)) ds\| &\leq \\ \|\hat{x}_1(t)\| + \|\bar{x}_{10} - \hat{x}_{10}\| + \|\bar{A}_{i1}\| \times & \\ \int_{t_0}^t \|\bar{x}_1(s) - \hat{x}_1(s)\| ds + \int_{t_0}^t \bar{h}_{i1} \|u_i(s)\| ds &\leq \\ \|\hat{x}_1(t)\| + \|\bar{x}_{10} - \hat{x}_{10}\| + & \\ \bar{h}_{i1} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\| (t - t_0) + & \\ \int_{t_0}^t \|\bar{A}_{i1}\| \|\bar{x}_1(s) - \hat{x}_1(s)\| ds. & \end{aligned}$$

定义如下函数:

$$m(t) = \|\bar{x}_{10} - \hat{x}_{10}\| + \bar{h}_{i1} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\| (t - t_0),$$

$$n(t) = \|\bar{A}_{i1}\|, y(t) = \|\bar{x}_1(t) - \hat{x}_1(t)\|.$$

由引理1结合分部积分法, 有

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_1(t)\| &\leq \\ \|\hat{x}_1(t)\| + \|\bar{x}_{10} - \hat{x}_{10}\| \exp(\|\bar{A}_{i1}\| (t - t_0)) + & \\ (\exp(\|\bar{A}_{i1}\| (t - t_0)) - 1) \frac{\bar{h}_{i1}}{\|\bar{A}_{i1}\|} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|. & \end{aligned}$$

令  $\bar{x}_{10} = \hat{x}_{10}$ , 由式(5), 得

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_1(t)\| &\leq \mu_i \exp(-\lambda_i(t - t_0)) \|\bar{x}_{10}\| + \\ &\frac{(\exp(\|\bar{A}_{i1}\| (t - t_0)) - 1) \bar{h}_{i1}}{\|\bar{A}_{i1}\|} \times \\ &\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|. \end{aligned} \quad (8)$$

对于系统(2)静态部分的状态  $\bar{x}_2(t)$ , 有

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_2(t)\| &\leq \\ \|\bar{A}_{i2}\| \|\bar{x}_1\| + \bar{h}_{i2} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|. \end{aligned} \quad (9)$$

由式(8)和式(9), 有

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \|\bar{x}_1(t)\| + \|\bar{x}_2(t)\| \leq \\ (1 + \|\bar{A}_{i2}\|) \mu_i \exp(-\lambda_i(t - t_0)) \|\bar{x}_{10}\| + & \\ \left( \frac{(1 + \|\bar{A}_{i2}\|)(\exp(\|\bar{A}_{i1}\| (t - t_0)) - 1) \bar{h}_{i1}}{\|\bar{A}_{i1}\|} + \right. & \\ \left. \bar{h}_{i2} \right) \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|. & \end{aligned}$$

由  $\|x(t)\| \leq \|N\| \|\bar{x}(t)\|$ , 得

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|E_{i_{t_0}} x_0\|, t - t_0) + \gamma \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\| \right),$$

其中:

$$\begin{aligned} \beta(\|E_{i_{t_0}} x_0\|, t - t_0) &= \\ \|N\| (1 + \|\bar{A}_{i2}\|) \mu_i \exp(-\lambda_i(t - t_0)) \|\bar{x}_1(t_0)\|, & \\ \gamma \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\| \right) &= \\ \|N\| \left( \frac{(1 + \|\bar{A}_{i2}\|)(\exp(\|\bar{A}_{i1}\| (t - t_0)) - 1) \bar{h}_{i1}}{\|\bar{A}_{i1}\|} + \right. & \\ \left. \bar{h}_{i2} \right) \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|. & \end{aligned}$$

由定义2和定义3易知,  $\beta(\|E_{i_{t_0}} x_0\|, t - t_0)$  是  $\mathcal{KL}$  函数,  $\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|)$  是  $\mathcal{K}$  类函数. 所以, 由定义4知, 系统(1)的每个子系统都是输入-状态稳定的.

下面讨论非线性切换广义系统(1)的整体输入-状态稳定性. 假设在系统运行区间  $[t_0, t]$  上, 共进行了  $k$  次切换, 则有  $N_{\sigma(t)}(t_0, t) = k$ , 那么系统(1)的状态轨迹满足

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \|N\| (1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \cdot & \\ \mu_{k+1} \exp(-\lambda_{k+1}(t - t_k)) \|\bar{x}_1(t_k)\| + & \\ \|N\| ((1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \alpha(t) + \bar{h}_{(k+1)2}) \cdot & \\ \sup_{t_k \leq \tau \leq t} \|u_{k+1}(\tau)\|. & \end{aligned}$$

其中

$$\alpha(t) = \frac{(\exp\|\bar{A}_{(k+1)1}\|(t - t_k) - 1) \bar{h}_{(k+1)1}}{\|\bar{A}_{(k+1)1}\|}.$$

将  $\bar{x}_1(t_k), \bar{x}_1(t_{k-1}), \dots, \bar{x}_1(t_1)$  依次代入, 令  $\mu =$

$\max\{\mu_i\}$ ,  $\lambda = \min\{\lambda_i\}$ , 经计算整理, 得

$$\begin{aligned} & \|x(t)\| \leq \\ & \|N\|(1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \times \\ & (\mu^{k+1} \exp(-\lambda(t-t_0)) \|\bar{x}_1(t_0)\| + \\ & \mu^k \exp(-\lambda(t-t_1)) \times \\ & \frac{(\exp(\|\bar{A}_{11}\|(t_1-t_0)) - 1) \bar{h}_{11}}{\|\bar{A}_{11}\|} \times \\ & \sup_{t_0 \leq \tau \leq t_1} \|u_1(\tau)\| + \dots + \mu \exp(-\lambda(t-t_k)) \times \\ & \frac{(\exp(\|\bar{A}_{k1}\|(t_k-t_{k-1})) - 1) \bar{h}_{k1}}{\|\bar{A}_{k1}\|} \times \\ & \sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_k} \|u_k(\tau)\|) + \|N\|((1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \times \\ & \frac{(\exp(\|\bar{A}_{(k+1)1}\|(t-t_k)) - 1) \bar{h}_{(k+1)1}}{\|\bar{A}_{(k+1)1}\|} + \\ & \bar{h}_{(k+1)2}) \sup_{t_k \leq \tau \leq t} \|u_{k+1}(\tau)\|. \end{aligned} \quad (10)$$

在初始时刻  $t_0$ , 有  $\|\bar{x}_1(t_0)\| \leq \|M_{1t_0}\| \|E_{1t_0} x_0\|$ . 另外, 由定义5知  $k = N_{\sigma(t)}(t_0, t) \leq N_0 + (t-t_0)/\tau_a$ . 由  $\tau_a \geq \ln \mu / \lambda_1$ , 得  $\mu^{k+1} \leq \mu^{N_0+1} \exp(\lambda^*(t-t_0))$ , 代入式(10), 得

$$\begin{aligned} & \|x(t)\| \leq \\ & \|N\|(1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \times \\ & (\mu^{N_0+1} \exp((\lambda^* - \lambda)(t-t_0)) \times \\ & \|M_{1t_0}\| \|E_{1t_0} x_0\| + \mu^k \exp(-\lambda(t-t_1)) \times \\ & \frac{(\exp(\|\bar{A}_{11}\|(t_1-t_0)) - 1) \bar{h}_{11}}{\|\bar{A}_{11}\|} \times \\ & \sup_{t_0 \leq \tau \leq t_1} \|u_1(\tau)\| + \dots + \mu \exp(-\lambda(t-t_k)) \times \\ & \frac{(\exp(\|\bar{A}_{k1}\|(t_k-t_{k-1})) - 1) \bar{h}_{k1}}{\|\bar{A}_{k1}\|} \times \\ & \sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_k} \|u_k(\tau)\|) + \|N\|((1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \times \\ & \frac{(\exp(\|\bar{A}_{(k+1)1}\|(t-t_k)) - 1) \bar{h}_{(k+1)1}}{\|\bar{A}_{(k+1)1}\|} + \\ & \bar{h}_{(k+1)2}) \sup_{t_k \leq \tau \leq t} \|u_{k+1}(\tau)\|. \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$\begin{aligned} & \beta(\|E_{1t_0} x_0\|, t-t_0) = \\ & \|N\|(1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \mu^{N_0+1} \times \\ & \exp((\lambda^* - \lambda)(t-t_0)) \|M_{1t_0}\| \|E_{1t_0} x_0\|, \end{aligned}$$

$\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|)$  为式(11)不等号右边去掉  $\beta(\|E_{1t_0} x_0\|, t-t_0)$  的部分. 由定义2和定义3易知,  $\beta(\|E_{1t_0} x_0\|, t-t_0)$  是  $\mathcal{KL}$  函数,  $\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|)$  是  $\mathcal{K}$  类函数. 故系统(1)是输入-状态稳定的.

**注 2** 定理1是在假设自治系统(4)的子系统全是指数

稳定子系统, 进而得到系统(1)的子系统全是输入-状态稳定的情形下得到的, 对于系统(1)的子系统不全是输入-状态稳定的情况, 定理1并不适用.

下面讨论自治系统(4)的子系统不全是指数稳定的情况, 即系统(1)的所有子系统不全是输入-状态稳定的, 有如下结论.

**定理 2** 对非线性切换广义系统(1), 若存在非奇异矩阵  $X_i$  满足不等式(6)-(7), 假设2成立, 且对系统(4)的所有子系统, 存在  $\lambda_i > 0$  和  $\mu_i > 0$ , 当  $i \in I^-$  时, 满足

$$\begin{cases} \|\hat{x}_1(t)\| \leq \mu_i \exp(-\lambda_i(t-t_0)) \|\hat{x}_{10}\|, \\ \hat{x}_2(t) = -\bar{A}_{i2} \hat{x}_1(t). \end{cases} \quad (12)$$

当  $i \in I^+$  时, 满足

$$\begin{cases} \|\hat{x}_1(t)\| \leq \mu_i \exp(\lambda_i(t-t_0)) \|\hat{x}_{10}\|, \\ \hat{x}_2(t) = -\bar{A}_{i2} \hat{x}_1(t). \end{cases} \quad (13)$$

切换规则满足

$$T^-(t_0, t)/T^+(t_0, t) \geq (\lambda^+ + \lambda)/(\lambda^- - \lambda). \quad (14)$$

平均驻留时间满足

$$\tau_a \geq \ln \mu / \lambda. \quad (15)$$

则非线性切换广义系统(1)是输入-状态稳定的. 其中:  $I^-$  表示稳定子系统的集合,  $I^+$  表示非稳定子系统的集合,  $T^-(t_0, t)$  表示在区间  $[t_0, t]$  上所有稳定子系统运行时间的总和,  $T^+(t_0, t)$  表示在区间  $[t_0, t]$  上所有非稳定子系统运行时间的总和.  $\mu = \max\{\mu_i\}$ ,  $\lambda^- = \min_{i \in I^-} \{\lambda_i\}$ ,  $\lambda^+ = \max_{i \in I^+} \{\lambda_i\}$ ,  $0 < \lambda < \lambda^-$ .

**证** 根据定理1的证明过程, 当  $i \in I^-$  时, 结合式(12), 可得

$$\begin{aligned} & \|x(t)\| \leq \\ & \|N\|(1 + \|\bar{A}_{i2}\|) \mu_i \exp(-\lambda_i(t-t_0)) \|\bar{x}_{10}\| + \\ & \|N\|((1 + \|\bar{A}_{i2}\|) \times \\ & \frac{(\exp(\|A_{i1}\|(t-t_0)) - 1) \bar{h}_{i1}}{\|A_{i1}\|} + \bar{h}_{i2}) \times \\ & \sup_{\tau \in L_i^-} \|u_i(\tau)\|, \end{aligned}$$

其中  $L_i^-$  表示当  $i \in I^-$  时子系统的运行区间. 显然, 当  $i \in I^-$  时, 系统(1)的子系统是输入-状态稳定的.

当  $i \in I^+$  时, 结合式(13), 可得

$$\begin{aligned} & \|x(t)\| \leq \\ & \|N\|(1 + \|\bar{A}_{i2}\|) \mu_i \exp(\lambda_i(t-t_0)) \|\bar{x}_{10}\| + \\ & \|N\|((1 + \|\bar{A}_{i2}\|) \times \\ & \frac{(\exp(\|A_{i1}\|(t-t_0)) - 1) \bar{h}_{i1}}{\|A_{i1}\|} + \bar{h}_{i2}) \times \end{aligned}$$

$$\sup_{\tau \in L_i^-} \|u_i(\tau)\|,$$

其中  $L_i^+$  表示当  $i \in I^+$  时子系统的运行区间. 这表明当  $i \in I^+$  时, 系统(1)的子系统全不是输入-状态稳定的, 甚至是不稳定的.

下面讨论整个切换广义系统(1)的输入-状态稳定性. 假设在系统运行区间  $[t_0, t]$  上, 共进行了  $k$  次切换, 即  $N_{\sigma(t)}(t_0, t) = k$ . 由式(14), 得

$$\begin{aligned} &\lambda^+ T^+(t_0, t) - \lambda^- T^-(t_0, t) \leq \\ &-\lambda(T^+(t_0, t) + T^-(t_0, t)) = -\lambda(t - t_0). \end{aligned}$$

类似于定理1的推导过程, 经整理, 得系统(1)状态轨迹满足

$$\begin{aligned} &\|x(t)\| \leq \\ &\|N\|(1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \times \\ &(\mu^{N_0+1} \exp(-\lambda(t - t_0)) \|M_{1t_0}\| \|E_{1t_0} x_0\| + \\ &\mu^k \exp_1(\lambda^-, \lambda^+, t) \times \\ &\frac{(\exp(\|A_{11}\|(t_1 - t_0)) - 1) \bar{h}_{11}}{\|A_{11}\|} \times \\ &\sup_{t_0 \leq \tau \leq t_1} \|u_1(\tau)\| + \dots + \mu \exp_k(\lambda^-, \lambda^+, t) \times \\ &\frac{(\exp(\|A_{k1}\|(t_k - t_{k-1})) - 1) \bar{h}_{k1}}{\|A_{k1}\|} \times \\ &\sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_k} \|u_k(\tau)\|) + \|N\|((1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \times \\ &\frac{(\exp(\|A_{(k+1)1}\|(t - t_k)) - 1) \bar{h}_{(k+1)1}}{\|A_{(k+1)1}\|} + \\ &\bar{h}_{(k+1)2}) \sup_{t_k \leq \tau \leq t} \|u_{k+1}(\tau)\|, \end{aligned} \tag{16}$$

其中  $\exp_1(\lambda^-, \lambda^+, t), \dots, \exp_k(\lambda^-, \lambda^+, t)$  是以  $e$  为底数关于  $\lambda^-, \lambda^+, t$  的指数函数.

令

$$\begin{aligned} &\beta(\|E_{1t_0} x_0\|, t - t_0) = \\ &\|N\|(1 + \|\bar{A}_{(k+1)2}\|) \mu^{N_0+1} \times \\ &\exp(-\lambda(t - t_0)) \|M_{1t_0}\| \|E_{1t_0} x_0\|, \end{aligned}$$

$\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|)$  为式(16)不等号右边去掉  $\beta(\|E_{1t_0} x_0\|, t - t_0)$  的部分. 由定义2和定义3易知,  $\beta(\|E_{1t_0} x_0\|, t - t_0)$  是  $\mathcal{KL}$  类函数,  $\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|)$  是  $\mathcal{K}$  类函数. 故系统(1)是输入-状态稳定的.

**注3** 由定理2的证明过程可以看出, 当切换广义系统(1)的子系统不全是稳定子系统时, 通过设计适当的切换规则和驻留时间, 可以使系统整体是输入-状态稳定的. 在定理1和定理2的证明过程中, 并没有涉及到输入-状态稳定Lyapunov函数的构造问题, 所以不用考虑在切换时刻Lyapunov函数的变化情况; 同时也没有设计控制器的具体结构, 只需控制输入有界即可.

**注4**<sup>[4]</sup> 基于本节的讨论结果, 可以设计如下的状态反馈控制器  $u_i(t) = K_i(t)x(t)$ , 在系统运行的不同时刻, 即使同一个子系统,  $K_i(t)$  也可以是不同的. 只需满足

$$\|K_i(t)\| \leq \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|/\|x(t)\|,$$

就可以保证控制器的有界性. 同时, 把  $\|x(t)\|$  代入上式, 即可求得  $\|K_i(t)\|$  的上确界.  $\|K_i(t)\|$  的取值只需小于这个上确界, 就能保证系统(1)是输入-状态稳定的. 关于  $K_i(t)$  的具体结构, 根据实际情况确定. 相较于传统的控制器设计方法, 这在很大程度上降低了控制器的设计难度.

### 4 数值算例(Numerical examples)

**例1** 考虑如下—类连续非线性切换广义系统(1), 参数如下:

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \\ E_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ h_1(t, x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, h_2(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

子系统1和2在区间  $[0, 12]$  上交替切换, 取控制器

$$u_1(t) = u_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-0.5t} \sin(4t + 2) \\ \frac{1}{1 + t^2} \cos(2t) \end{bmatrix},$$

则在区间  $[0, 12]$  上,  $\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u_i(\tau)\|$  存在. 易验证  $(E_1, A_1)$  和  $(E_2, A_2)$  是正则、无脉冲的.  $\bar{A}_{11}$  的特征值为  $\{-2, -0.5\}$ ,  $\bar{A}_{21}$  的特征值为  $\{-2.1514, -0.3486\}$ , 对应的特征矩阵分别为

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} -0.8944 & -0.7071 \\ 0.4472 & -0.7071 \end{bmatrix}, \\ P_2 &= \begin{bmatrix} -0.6089 & -0.3983 \\ 0.7933 & -0.9172 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则有

$$\ln \mu_1 = \ln(\text{cond}(P_1)) = 0.3275,$$

$$\ln \mu_2 = \ln(\text{cond}(P_2)) = 0.5296.$$

这里  $\text{cond}(P_i)$  表示矩阵  $P_i$  的条件数. 取  $\lambda^* = 0.3$ . 由定理1,  $\tau_a$  满足  $\tau_a \geq \ln \mu / \lambda^* = 1.7653$ . 取  $\tau_a = 2$ .

由定义5知, 在区间  $[0, 12]$  上,  $N(0, 12) \leq 6$ , 这里, 取  $N_0 = 0$ . 取每个子系统的驻留时间为2s, 则系统整体输入-状态稳定, 如图1所示.

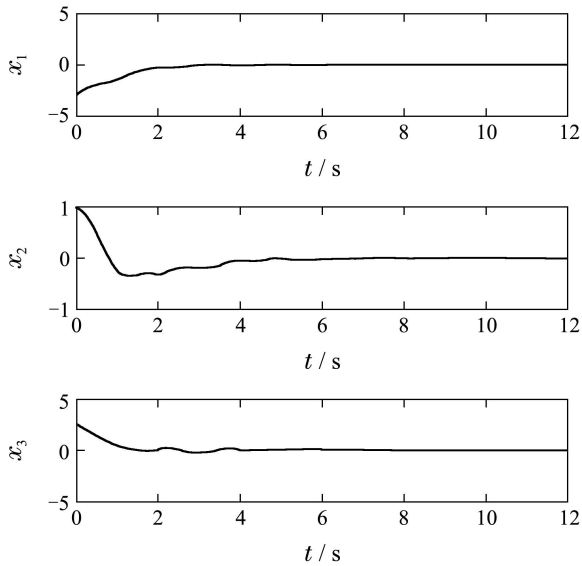


图1 闭环系统的状态轨迹

Fig. 1 State trajectory of the closed-loop system

**例 2** 考虑如下一类连续非线性切换广义系统(1), 参数如下:

$$E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -4.5 & 3.5 & -6 \\ -5 & 4.5 & -6.5 \\ -2.5 & 2.5 & -4.5 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 10.5 & -3.5 & 9.5 \\ -4.5 & 1.5 & -4.5 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$h_1(t, x) = \begin{bmatrix} e^{-0.5t}(1 - \cos t) \\ (1 + t^2)^{-1} \sin(3t) \\ e^{-0.3t} \sin t \end{bmatrix},$$

$$h_2(t, x) = \begin{bmatrix} (1 + |x_2|)e^{-0.1t} \\ (1 + x_2^2)^{-1} \cos(t + 1) \\ e^{-0.5t} \sin(3t + 1) \end{bmatrix}.$$

易验证 $(E_1, A_1), (E_2, A_2)$ 是正则、无脉冲的. 经计算, 矩阵 $\bar{A}_{11}$ 的特征值为 $\{-1.4771, 1.2271\}$ ,  $\bar{A}_{21}$ 的特征值为 $\{-1.5, -1\}$ , 对应的特征矩阵分别为

$$P_1 = \begin{bmatrix} -0.9802 & -0.4135 \\ 0.1979 & -0.9105 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2425 \\ 1.0000 & 0.9701 \end{bmatrix}.$$

子系统1的自治子系统不稳定, 子系统2的自治子系统稳定. 则有

$$\ln \mu_1 = \ln(\text{cond}(P_1)) = 0.2291,$$

$$\ln \mu_2 = \ln(\text{cond}(P_2)) = 2.0947.$$

取 $\lambda = 0.6$ , 由定理2,  $\tau_a$ 满足 $\tau_a \geq \ln \mu / \lambda = 3.4912$ , 取 $\tau_a = 3.5$ . 取 $u_1 = [-0.1 \ 0.1 \ -0.1]x$ ,  $u_2 = [0.1 \ -0.1 \ -0.1]x$ . 子系统1和子系统2在区间 $[0, 18]$ 上交替切换, 切换规则满足 $T^-(t_0, t)/T^+(t_0, t) = 5 \geq 4.5678$ . 子系统1的激活区间为 $[0, 1.5) \cup [9, 10.5)$ ,

子系统2的激活区间为 $[1.5, 9) \cup [10.5, 18]$ , 在该切换序列下, 系统输入-状态稳定, 如图2所示.

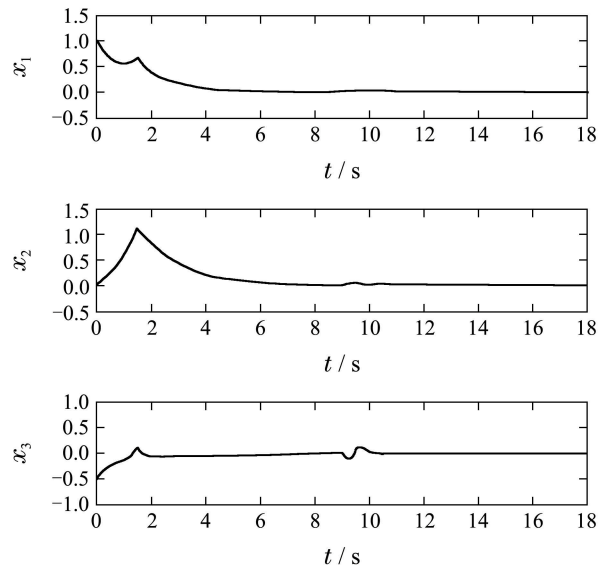


图2 闭环系统的状态轨迹

Fig. 2 State trajectory of the closed-loop system

### 5 结语(Conclusions)

本文针对一类非线性切换广义系统的输入-状态稳定性问题进行了研究. 分两类情况讨论: 一是所有广义子系统都是输入-状态稳定的情况, 二是允许部分广义子系统不是输入-状态稳定, 甚至是不稳定的情况. 采用平均驻留时间方法, 结合Gronwall-Bellman不等式, 得到了一类非线性切换广义系统整体输入-状态稳定的充分条件. 该方法的优点在于, 无需考虑输入-状态稳定的Lyapunov函数的构造问题, 无需设计各子系统控制输入的具体结构, 只需选取适当的切换规则, 即可实现系统整体的输入-状态稳定, 由注4知, 这在一定程度上大大降低了控制器设计的难度. 最后的仿真算例说明了所提方法的有效性.

### 参考文献(References):

- [1] SUN Z D, GE S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 181 - 195.
- [2] ZHANG W N, YU L. Stability analysis for discrete-time switched time-delay systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(10): 2265 - 2271.
- [3] CHIOU J S, CHENG C M. Stabilization analysis of the switched discrete-time systems using Lyapunov stability theorem and genetic algorithm [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 42(2): 751 - 759.
- [4] 方志明, 向嵘嵘, 陈庆伟. 一类时滞切换系统的输入-状态稳定性分析 [J]. *控制与决策*, 2011, 26(9): 1327 - 1332. (FANG Zhiming, XIANG Zhengrong, CHEN Qingwei. Input-to-state stability analysis for a class of switched systems with time delay [J]. *Control and Decision*, 2011, 26(9): 1327 - 1332.)
- [5] 郭荣伟, 王玉振. 一类多平衡点线性切换系统稳定区域的估计 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(4): 409 - 414. (GUO Rongwei, WANG Yuzhen. Estimation of stability region for a class of switched linear systems with multiple equilibrium points [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(4): 409 - 414.)

- [6] DING D W, YANG G H, LI X L. H-infinity filtering for discrete-time switched linear systems under arbitrary switching [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2011, 9(2): 261 – 266
- [7] FANF M. Delay-dependent robust  $H_\infty$  control for uncertain singular systems with state delay [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(1): 65 – 70.
- [8] ZHOU Z, YANG C, ZHANG Q, et al. Input-to-state stability for descriptor systems with non-linear perturbations [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(13): 1561 – 1567.
- [9] WANG C H. New delay-dependent stability criteria for descriptor systems with interval time delay [J]. *Asian Journal of Control*, 2012, 14(1): 197 – 206.
- [10] JOSEP C, JOSEP F, MAGRET M D. Switched singular linear systems [C] // *The 17th Mediterranean Conference on Control & Automation*. Makedonia Palace, Thessaloniki: IEEE, 2009: 1343 – 1347.
- [11] 尹玉娟, 刘玉忠, 赵军. 一类切换线性广义系统的稳定性 [J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 24 – 27.  
(YIN Yujuan, LIU Yuzhong, ZHAO Jun. Stability of a class of switched linear singular systems [J]. *Control and Decision*, 2006, 21(1): 24 – 27.)
- [12] DU Z P, ZHANG Q L, CHANG G S. State feedback stabilization for switched singular networked control systems with time-delay [C] // *The 21th Chinese Control and Decision Conference*. Zhengjiang: IEEE, 2009: 5587 – 5591.
- [13] 尹玉娟, 赵军. 一类混杂脉冲切换广义系统的二次稳定 [J]. 东北大学学报(自然科学版), 2007, 28(6): 769 – 772.  
(YIN Yujuan, ZHAO Jun. Quadratic stability of a class of hybrid impulsive and switched singular systems [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2007, 28(6): 769 – 772.)
- [14] 高在瑞, 纪志成. 一类切换广义系统的时滞相关稳定性准则 [J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 925 – 928.  
(GAO Zairui, JI Zhicheng. Delay-dependent stability criteria for a class of switched singular systems with time-delay [J]. *Control and Decision*, 2011, 26(6): 925 – 928.)
- [15] SHI S, ZHANG Q, YUAN Z, et al. Hybrid impulsive control for switched singular systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(1): 103 – 111.
- [16] CHADLI M, DAROUACH M. Robust admissibility of uncertain switched singular systems [J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(10): 1587 – 1600.
- [17] LIN J X, FEI S M. Robust exponential admissibility of uncertain switched singular time-delay systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(12): 1773 – 1779.
- [18] LIN J X, FAN C X. Exponential admissibility and dynamic output feedback control of switched singular systems with interval time-varying delay [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, 2010(2010): 1 – 21.
- [19] 付主木, 费树岷. 一类不确定切换奇异系统的动态输出反馈鲁棒 $H_\infty$ 控制 [J]. 自动化学报, 2008, 34(4): 482 – 487.  
(FU Zhumu, FEI Shumin. Robust  $H_\infty$  dynamic output feedback stabilization for a class of uncertain switched singular systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(4): 482 – 487.)
- [20] 顾则全, 刘贺平, 廖福成, 等. 基于LMI的不确定时滞切换广义系统的保成本控制 [J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(1): 147 – 151.  
(GU Zequan, LIU Heping, LIAO Fucheng, et al. Guaranteed cost control for uncertain time-delay switched singular systems based on LMI [J]. *Systems Engineering and Electronic*, 2010, 32(1): 147 – 151.)
- [21] 付主木, 费树岷. 一类切换线性奇异系统的 $H_\infty$ 控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(4): 693 – 698.  
(FU Zhumu, FEI Shumin. H-infinity control for a class of switched linear singular systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(4): 693 – 698.)
- [22] 高在瑞, 纪志成. 一类切换时滞奇异系统的最优保成本控制 [J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(6): 1358 – 1361.  
(GAO Zairui, JI Zhicheng. Optimal guaranteed cost control for a class of switched singular systems with time-delay [J]. *Systems Engineering and Electronic*, 2011, 33(6): 1358 – 1361.)
- [23] LIN J X, FEI S M, WU Q. Reliable  $H_\infty$  filtering for discrete-time switched singular systems with time-varying delay [J]. *Circuits System Signal Process*, 2012, 31(3): 1191 – 1214.
- [24] KOENIG D, MARX B.  $H_\infty$ -filtering and state feedback control for discrete-time switched descriptor systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2009, 3(6): 661 – 670.
- [25] MENG B, ZHANG J F. Reachability conditions for switched linear singular systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 482 – 488.
- [26] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 – 443.
- [27] SUN F L, GUAN Z H, ZHANG X H, et al. Exponential-weighted input-to-state stability of hybrid impulsive switched systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(3): 430 – 436.

### 作者简介:

**高在瑞** (1982–), 男, 博士, 目前研究方向为切换广义系统、鲁棒控制等, E-mail: gaozairui-110@163.com;

**沈艳霞** (1973–), 女, 教授, 目前研究方向为切换系统、风电系统等, E-mail: shenyx@jiangnan.edu.cn;

**纪志成** (1959–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为混杂系统、风电系统等, E-mail: zcji@jiangnan.edu.cn.