

离散多智能体系统信息一致性的平衡点

李俊兵[†], 严卫生, 房新鹏

(西北工业大学 航海学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 研究了离散多智能体系统信息一致性的平衡点问题. 对于固定通信结构系统, 基于非负随机矩阵谱半径及其对应的左特征向量, 证明了在系统的通信拓扑所含的生成树中, 仅根节点对平衡点有作用. 对于时变通信结构系统, 根据同阶非负矩阵样式的有限性, 证明了在动态通信拓扑的联合中, 仅那些到任意节点都存在有向路径的顶点对平衡点有作用. 数值算例验证了理论结果的正确性.

关键词: 多智能体; 一致性; 平衡点; 左特征向量

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Equilibrium of consensus problems for discrete-time multi-agent systems

LI Jun-bing[†], YAN Wei-sheng, FANG Xin-peng

(College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi, 710072, China)

Abstract: The equilibrium of consensus problems for discrete-time multi-agent system is studied. For a fixed topology system, based on the spectrum of nonnegative stochastic matrix and its left eigenvector, it is proved that only the initial conditions of the root vertices contribute to the equilibrium value in interaction topology which contains a spanning tree. For a time-varying topology system, by the fitness of style of nonnegative matrices, it is proved that only the nodes that have directed paths to all the others in the union of switching interaction topology have contributions to the final value. Numerical examples are used to prove the correctness of the theorems.

Key words: multi-agent; consensus; equilibrium; left eigenvector

1 引言(Introduction)

近年来, 随着多智能体系统一致性问题的广泛应用, 如人工智能、自主水下航行器、自动高速公路系统、卫星的集群控制等, 多智能体系统受到众多国内外学者的关注^[1-8]. 在多智能体网络系统中, 随着时间的变化, 各主体之间通过通信协调使所有智能体的状态趋于一致, 称系统实现了信息一致性. 对于多智能体系统的研究取得了很多有意义的结果^[9-12].

Reynolds C提出了一个模仿动物集结的计算机模型, 并给出了群体行为的基本规则^[13]. Vicsek等通过对该规则的仿真实验得出, 所有智能体最终可以朝着同一个方向移动^[14]. 基于无向图理论, Jadbabaie等对Vicsek模型的提供了理论解释^[15]. Ren等将此结果推广到单向通信情况, 得到当且仅当系统通信拓扑的联合足够频繁的含有一个生成树, 则系统可以实现信息一致性^[16]. 由于通信时延的广泛存在性, 具有延时的多智能体系统信息一致性问题也受到了广泛的关注^[17-19]. 系统的平衡点决定着系统

最终状态和任务的目的性, 而上述文献仅考虑系统如何实现信息一致性的条件, 对于系统各个成员初始状态对最终平衡点的作用并未过多涉及. 一些文献证明了多智能体网络系统的平衡点将收敛于系统初始状态的平均值^[1,7,19], 但并未详细讨论该平均值具体和各单独智能体以及通信拓扑的直接关系. Ren等指出, 在系统的通信结构图中, 仅那些到其余节点均存在有向路径的节点对应的值对最终收敛值有作用^[20], 然而, 文章并没有给出相应的理论证明.

为此, 本文通过研究非负矩阵Perron向量的非负性, 得到了系统中各个成员初始值和平衡点之间的直接关系. 非负矩阵 A 的Perron定理仅指出, 若 A 是不可约的, 则 A 的左Perron向量为正; 若 A 为非不可约的, 则 A 的左Perron向量非负^[21], 并未指出其左Perron向量中各个分量何时为正, 何时为0. 研究结果表明, 若随机矩阵 A 非不可约, 对应的有向图表示为 $\Gamma(A)$, 在其谱半径所对应的左特征向量中, 仅 $\Gamma(A)$ 中所含生成树的根节点所对应的分量为正.

收稿日期: 2012-06-05; 收修改稿日期: 2012-10-18.

[†]通信作者. Tel.: +86 13689250906.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60875071, 51209175); 高等学校博士点基金资助项目(200806990008).

2 预备知识和通信协议(Preliminaries and protocols)

下面给出图论和矩阵论相关基础知识, 详细内容可以参看文献 [21–24].

一个赋权有向图用 $G = (V, E, D)$ 表示, 其中: 顶点集合为 $V = \{v_i : i \in \mathcal{N}\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 表示 G 中的有向边, 其集合为 $E \subseteq V \times V$. 若顶点 $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 存在一条从自身到自身的有向边, 称顶点 v_i 具有一个自伴环. 下文若无特殊说明, 假设全部顶点具有自伴环. 若 $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in E, j = 1, 2, \dots, k$, 则顶点序列 $\{(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots, (v_{i_{k-1}}, v_{i_k})\}$ 称为 V 中长度为 k 的有向路径; 若 $v_{i_1} = v_{i_k}$, 则称此有向路径为长度为 k 的回路. $D = [d_{ij}]$ 是 $G = (V, E, D)$ 的赋权邻接矩阵, 邻接元素和图中边的有无相关, 若 $e_{ij} \in E, \forall i, j \in \mathcal{N}$, 则 $d_{ij} \neq 0$. 顶点 v_i 的邻居集合表示为 $N_i = \{v_j \in V : (v_j, v_i) \in E\}$. 若 $V(G)$ 中任意两个不同的顶点 v_i 和 v_j 之间都存在一条路径, 则称 G 是强连通的.

有向图 $G(t)$ 用来表示系统的通信结构图, 顶点 v_i 表示第 i 个智能体, 顶点 v_i 和 v_j 之间的有向边表示智能体 i 和智能体 j 之间的通信.

非负矩阵是指矩阵的所有元素均是非负的, 若 A 是非负的, 用 $A \geq 0$ 表示. 用 M_n 表示全部 n 阶非负矩阵的集合. 关于非负矩阵特征值和特征向量有以下结论.

引理 1^[21] 若 $A \in M_n$ 并且 $A \geq 0$, 则谱半径 $\rho(A)$ 是 A 的特征值, 存在非负向量 $x \geq 0, x \neq 0$, 使得 $Ax = \rho(A)x$. 若 A 有唯一模最大特征值, 则有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\rho(A)^{-1}A]^m = L, \quad (1)$$

其中: $L \equiv xy^T, Ax = \rho(A)x, A^T y = \rho(A)y, x \geq 0, y \geq 0$.

各个行和为 +1 的非负方阵称作随机矩阵. 若有 $A - B \geq 0$, 则 $A \geq B$. 若存在非零向量 ν 使得随机矩阵 M 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = \mathbf{1}\nu^T$, 则称 M 是随机遍历矩阵 (indecomposable and aperiodic, SIA). 对 $A \in M_n (n \geq 2)$, 若存在置换矩阵 $P \in M_n$ 使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

其中: $1 \leq r < n, B \in M_r, D \in D_{n-r}, C \in M_{r, n-r}, 0 \in M_{n-r, r}$ 是零矩阵, 那么称 A 是可约的, 否则称其不是可约的. 当且仅当非负矩阵 $A \in M_n$ 对应的有向图 $\Gamma(A)$ 强连通时, A 是不可约的. 若不可约矩阵 $A \in M_n$ 有唯一模最大特征值, 则称作素矩阵. 不可约随机矩阵 P 若具有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \mathbf{1}y^T$ 性质, 则称 P

为 SIA^[16] 矩阵, 其中 y 为列向量. 素矩阵具有以下性质:

引理 2 若 $A \in M_n$ 是素矩阵, 则存在常数向量 ν 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\rho(A)^{-1}A]^m = L, \quad (2)$$

其中: $L \equiv xy^T, Ax = \rho(A)x, A^T y = \rho(A)y, x > 0, y > 0$; 若 $A \in M_n$ 是随机矩阵, 则 $A \in M_n$ 是 SIA 矩阵.

在引理 2 中, 若 A 是随机矩阵, 则 $\rho(A) = 1$, 且对应于特征值 $\lambda = \rho(A) = 1$ 的特征向量为 $\mathbf{1}$, 易见 A 是 SIA 矩阵. 引理 2 表明, 若非负矩阵 $A \in M_n$ 是不可约的, 即其对应的有向图是强连通的, 则矩阵 A 谱半径所对应的左特征向量为正, 即, 左 Perron 向量为正. 后面将用其研究矩阵非不可约情况下谱半径对应的左特征向量中各个分量的非负情况. Wolfowitz 在文献 [25] 中给出下面极限定理, 其用于证明双向和单向通信结构动态系统的一致性问:

引理 3 令 M_1, M_2, \dots, M_k 是有限的 SIA 矩阵, 若任意此种矩阵的乘积 $M_{i_j}, M_{i_{j-1}}, \dots, M_{i_1}$ 是 SIA 矩阵, 则对于无限 SIA 矩阵乘积存在一个列向量 c 使

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M_{i_j} M_{i_{j-1}} \cdots M_{i_1} = \mathbf{1}c^T. \quad (3)$$

文献 [16] 等基于最近邻居法则, 给出下面形式的通信协议:

$$x_i[k+1] = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k] \delta_{ij}[k]} \times \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k] \delta_{ij}[k] x_j[k], \quad (4)$$

其中: $\alpha_{ij}[k] > 0 \in \bar{\alpha}$ 是智能体之间的时变权值, $\bar{\alpha}$ 是任意正数集合. 在 $[t_k, t_{k+1})$ 时间段内, $\delta_{ii}[k] \triangleq 1$, 当第 j 个智能体收到第 i 个智能体的信息时, $\delta_{ij}[k] = 1$, 否则 $\delta_{ij}[k] = 0, \forall j \neq i$. 式 (4) 可写成如下矩阵形式:

$$x[k+1] = F[k]x[k], \quad (5)$$

其中:

$$x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T, F[k] = [f_{ij}] \in M_n(\mathbf{R}),$$

$$(i, j) \in \mathcal{I}, f_{ij} = \frac{\alpha_{ij}[k] \delta_{ij}[k]}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k] \delta_{ij}[k]}.$$

$F[k]$ 是系统通信结构图 $G(k)$ 的邻接矩阵. 易见, 全部 $F[k]$ 是随机矩阵.

系统是否可以渐进实现信息一致性, 取决于矩阵 $F[k]$ 是否具有 SIA 性质. 文献 [16] 证明了若 $F[k]$ 对应的有向图含有一个生成树, 且全部对角元素为正, 则传递矩阵 $F[k]$ 具有 SIA 性质. 其结果为:

引理 4^[16] 令 $G[k] \in G$ 是使用通信协议 (4) 的多

智能体系统在 $t = kT$ 的通信拓扑图, 其中时变权重 $\alpha_{ij}[k] \in \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ 是任意有界正实数集合. 若存在一致有界互不相交时间区间 $[k_j T, (k_j + l_j) T)$, $j = 1, 2, \dots, k_1 = 0$, 且在每个一致有界时间区间 $[(k_j + l_j) T, k_{j+1} T)$ 上, 系统通信拓扑的联合含有一个生成树, 则系统可以渐进实现信息一致性.

引理4给出了多智能体系统可以实现信息一致性的条件. 本文还需下面两个引理.

引理 5^[16] 若一个非负矩阵 $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$ 的行和为常数 $\mu > 0$, 即 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \mu, i = 1, 2, \dots, n$, 则 μ 是 A 的特征值, 对应的特征向量为 $\mathbf{1}$, 并且 A 的谱半径为 $\rho(A) = \mu$; 当且仅当 A 对应的有向图 $\Gamma(A)$ 含有一个生成树, 则特征值 μ 的代数重数为 1; 若 $\Gamma(A)$ 含有一个生成树且

$$a_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

则 μ 是唯一模最大的特征值.

引理 6^[15] 令 $m \geq 2$ 是一个正整数, P_1, P_2, \dots, P_m 一列对角元素为正的 $n \times n$ 非负矩阵, 则有

$$P_1 P_2 \cdots P_m \geq \gamma (P_1 + P_2 + \cdots + P_m),$$

其中 $\gamma > 0$ 由矩阵 $P_i (i = 1, \dots, m)$ 确定.

3 系统的平衡点(Equilibrium for the system)

在系统(4)实现一致性后, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x[k]$ 将收敛到 $\sum_{i=1}^n (c_i x_i(0))$, 其中 $\sum_{i=1}^n c_i = 1, c_i \geq 0$. 自然会有这样问题, 是否全部的 $x_i(0)$ 将对最后平衡点有作用. 文献[20]指出, 当且仅当在系统的通信结构图中, 那些到其余节点均有有向路径的节点对应的值才会对最终收敛值有作用. 然而, 文章并没有给出相应证明. 对此, 首先给出下面引理.

引理 7 令 $A \in M_n$ 是具有相同行和 $\mu > 0$ 的非负矩阵, 若其对应的有向图含有一个生成树, 可以为根节点的顶点构成一个回路, 如图1所示, 则在对应于特征值 μ 的左特征向量 $y \geq 0$ 中, 仅对应于回路中顶点的分量为正, 其余为零.

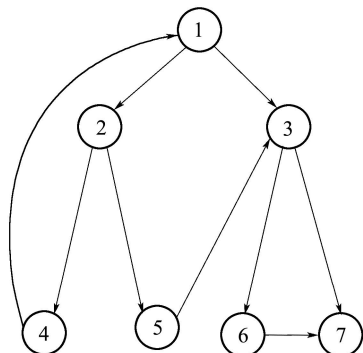


图1 根节点包含在回路中的有向图
Fig. 1 Directed graph that the root vertex is involved in a cycle

证 行和为 μ 的非负矩阵, 其谱半径为 μ 且其为 A 的一个特征值. 若有全部对角元素为正, 则 μ 是其唯一模最大的特征值(引理5).

由于 A^T 和 A 具有相同的特征值和谱半径, 则 μ 是 A^T 的一个特征值和谱半径. $A \geq 0$, 则 $A^T \geq 0$, 由引理1, 存在非负向量 $y \geq 0, y \neq 0$ 使得下式成立:

$$A^T \cdot y = \mu \cdot y. \quad (7)$$

若在 $\Gamma(A)$ 中存在一个回路, 表示为 ϕ , 假定 ϕ 包含存在自伴环的根节点(此回路可能仅仅含有一个根节点, 由于根节点存在环, 此时, ϕ 为长度为1的平凡回路, 如图2所示), 假定 ϕ 中的顶点为 $\phi = \{v_{r_1}, v_{r_2}, \dots, v_{r_k}\}, 1 \leq r_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$. ϕ 中顶点构成一个强连通的子图, 重新标号为 v_1, v_2, \dots, v_k , 该子图表示为 $\Gamma(A'_k)$, 相应邻接矩阵表示为 A'_k . 则通过初等行变换, A 一定是下面形式:

$$\begin{bmatrix} A'_k & O_{k \times (n-k)} \\ & A'_{(k+1) \times n} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中: A'_k 是 $k \times k$ 方阵, O 是 $k \times (n - k)$ 的零块. 若在 O 中存在非零元, 假定为 $a_{i,p}, 1 \leq i \leq k, k < p \leq n$, 则意味着存在一条从 v_p 到 v_i 的有向路径. 另一方面, 由于在 $\Gamma(A)$ 中存在一个生成树, 则一定存在一条从 v_i 到 v_p 的有向路径, 即 v_p 是回路中的顶点. 显然, A'_k 满足引理5的条件, 因此有 $\rho(A'_k) = \mu$.

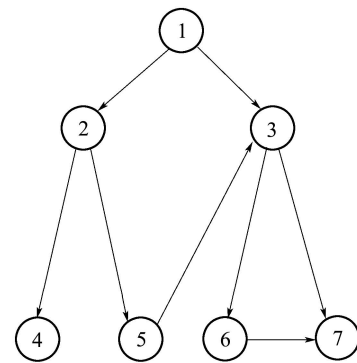


图2 不存在包含根节点回路的有向图
Fig. 2 Directed graph that the root vertex is not involved in a cycle

同时, 由于 A^T 和 A 互为对称矩阵, 因此包含相同顶点的强连通子图在 $\Gamma(A^T)$ 中存在, 表示为 $\Gamma(A_k)$, 对应的邻接矩阵表示为 A_k , 此时仅是回路中的方向相反. 因此有 $A_k^T = A'_k$. 由于 A_k 和 A'_k 有相同的特征值和谱半径, 因此 μ 是 A_k 的一个特征值并且为谱半径. 由文献[21]中的定理8.4.4: c可知, A_k 是不可约矩阵, 再由引理2, 对应于谱半径 $\rho(A_k) = \mu$ 的特征向量 $y^{(k)}$ 为正, 即 $y^{(k)} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_k], y_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$.

通过逐个增加不在回路中的顶点和相应的边到子图 $\Gamma(A_k)$ 中, 子图 $\Gamma(A_k)$ 最终为 $\Gamma(A^T)$. 当增加

第 $(k+1)$ 个顶点到 $\Gamma(A_k)$ 时,若 v_{k+1} 存在自伴环,则该自伴环和任意一条边同时增加,然后逐条增加其余的边.相应的子图列表表示为

$$\{\Gamma(A_{(k+1)_1}), \Gamma(A_{(k+1)_2}), \dots, \Gamma(A_{(k+1)_i}), \Gamma(A_{(k+2)_1}), \Gamma(A_{(k+2)_2}), \dots, \Gamma(A_{(k+2)_i}), \dots, \Gamma(A_{n_1}), \Gamma(A_{n_2}), \dots, \Gamma(A_{n_i})\},$$

其对应的邻接矩阵序列为

$$\{A_{(k+1)_1}, A_{(k+1)_2}, \dots, A_{(k+1)_i}, A_{(k+2)_1}, A_{(k+2)_2}, \dots, A_{(k+2)_i}, \dots, A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_i}\},$$

依题意有 $\Gamma(A_{n_i}) = \Gamma(A^T)$.在子图 $\Gamma(A_k)$ 最终为 $\Gamma(A^T)$ 之前,其相应的邻接矩阵的维数依次为 $k+1, k+2, \dots, n-1$.将各个矩阵扩至 n 维,增加的行列元素均为0,为了方便起见,扩围后的矩阵采用和原来相同的记号,且这些矩阵均为非负矩阵.显然有

$$A_k \leq A_{(k+1)_1} \leq A_{(k+1)_2} \leq \dots \leq A_{(k+1)_i} \leq \dots \leq A_{n_1} \leq \dots \leq A_{n_i} = A^T,$$

从而有

$$\mu = \rho(A_k) \leq \rho(A_{(k+1)_1}) \leq \rho(A_{(k+1)_2}) \leq \dots \leq \rho(A_{(k+1)_i}) \leq \dots \leq \rho(A_{n_1}) \leq \dots \leq \rho(A_{n_i}) = \rho(A^T) = \mu,$$

因此

$$\rho(A_k) = \rho(A_{(k+1)_1}) = \rho(A_{(k+1)_2}) = \dots = \rho(A_{(k+1)_i}) = \dots = \rho(A_{n_1}) = \rho(A_{n_i}) = \rho(A^T) = \mu.$$

由式(8)可知,矩阵 $A_{(k+1)_1}$ 一定是下面形式:

$$A_{(k+1)_1} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A_k & & a_{i,k+1} \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix},$$

其中 $1 \leq i \leq k$.若 v_{k+1} 有自伴环,则 $a_{k+1,k+1} > 0$,否则 $a_{k+1,k+1} = 0$.

假设 $y^{(k+1)}$ 是对应特征值 μ 的特征向量,即有 $A_{(k+1)_1} \cdot y^{(k+1)} = \mu \cdot y^{(k+1)}$,即

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A_k & & a_{i,k+1} \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

由式(9)的第 $(k+1)$ 行可知,下面等式一定成立:

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \dots + 0 \cdot y_k + a_{k+1,k+1} \cdot y_{k+1} =$$

$$\mu \cdot y_{k+1}. \quad (10)$$

1) 若 v_{k+1} 没有自伴环,则 $a_{k+1,k+1} = 0$,式(10)为

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \dots + 0 \cdot y_k + 0 \cdot y_{k+1} = \mu \cdot y_{k+1}, \quad (11)$$

式(11)的左边为0,由于 $\mu > 0$,因此有 $y_{k+1} = 0$.

2) 若 v_{k+1} 存在一个自伴环,则 $a_{k+1,k+1} > 0$,则由式(10),有

$$a_{k+1,k+1} \cdot y_{k+1} = \mu \cdot y_{k+1}. \quad (12)$$

由于存在 $a_{k+1,i} > 0$ 且 A 有固定行和,则

$$a_{k+1,i} + a_{k+1,k+1} \leq \mu.$$

由于 $a_{k+1,i} > 0, a_{k+1,k+1} > 0$,则 $a_{k+1,k+1} < \mu$.由式(12),必有 $y_{k+1} = 0$.

可见,等式 $A_k \cdot y^{(k)} = \mu \cdot y^{(k)}$ 仍然成立.若存在异于 $a_{j,k+1}, 1 \leq j \leq k, j \neq i$ 非零元,则由 $y_{k+1} = 0$ 可知 $A_k \cdot y^{(k)} = \mu \cdot y^{(k)}$ 仍然成立.

当增加第 p 个顶点时, $k+2 \leq p \leq n$,令 $y^{(p)}$ 为对应于特征值 μ 的特征值,则其形式如下:

$$\begin{bmatrix} A_k & & & A_{k,p-k} \\ & a_{k+1,k+1} & a_{k+1,k+2} & \dots & a_{k+1,p} \\ & a_{k+2,k+1} & a_{k+2,k+2} & \vdots & a_{k+2,p} \\ O & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{p,k+1} & a_{p,k+2} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} \cdot y^{(p)} = \mu \cdot [y_1 \ \dots \ y_k \ y_{k+1} \ y_{k+2} \ \dots \ y_p]^T,$$

则由上式的第 $k+1$ 行至第 p 行依次有下面等式成立:

$$\begin{cases} a_{k+1,k+1} \cdot y_{k+1} + a_{k+1,k+2} \cdot y_{k+2} + \dots + a_{k+1,p} \cdot y_p = \mu \cdot y_{k+1}, \\ a_{k+2,k+1} \cdot y_{k+1} + a_{k+2,k+2} \cdot y_{k+2} + \dots + a_{k+2,p} \cdot y_p = \mu \cdot y_{k+2}, \\ \vdots \\ a_{p,k+1} \cdot y_{k+1} + a_{p,k+2} \cdot y_{k+2} + \dots + a_{pp} \cdot y_p = \mu \cdot y_p. \end{cases} \quad (13)$$

将式(13)的两端相加,则有

$$\begin{cases} [(a_{k+1,k+1} + a_{k+2,k+1} + \dots + a_{p,k+1}) - \mu] \cdot y_{k+1} = \\ [\mu - (a_{k+1,k+2} + a_{k+2,k+2} + \dots + a_{p,k+2})] \cdot y_{k+2} + \\ [\mu - (\dots)] \cdot y_{k+3} + \dots + [\mu - (\dots)] \cdot y_{p-1} \\ + [\mu - (a_{k+1,p} + a_{k+2,p} + \dots + a_{pp})] \cdot y_p. \end{cases} \quad (14)$$

由式(14)可见, $y_j (k+1 \leq j \leq p)$ 的前面的系数中,其列标分别相同,即这些元素均为 A 中相同行的元

素, 因此有

$$\begin{cases} a_{k+1,k+1} + a_{k+2,k+1} + \cdots + a_{p,k+1} \leq \mu, \\ a_{k+1,k+2} + a_{k+2,k+2} + \cdots + a_{p,k+2} \leq \mu, \\ \vdots \\ a_{k+1,p} + a_{k+2,p} + \cdots + a_{pp} \leq \mu, \end{cases}$$

故分别有

$$a_{k+1,k+1} + a_{k+2,k+1} + \cdots + a_{p,k+1} - \mu \leq 0 \quad (15)$$

和

$$\begin{cases} \mu - a_{k+1,k+2} + a_{k+2,k+2} + \cdots + a_{p,k+2} \geq 0, \\ \vdots \\ \mu - a_{k+1,p} + a_{k+2,p} + \cdots + a_{pp} \geq 0. \end{cases} \quad (16)$$

另一方面, 由于 $\Gamma(A)$ 含有一个生成树, 故存在某个顶点 $v_i, 1 \leq i \leq k$, 使得从 v_i 到 v_{k+1} 存在一条有向路径, 即存在某个 $a_{k+1,i} > 0$, 故式(15)为

$$a_{k+1,k+1} + a_{k+2,k+1} + \cdots + a_{p,k+1} - \mu < 0, \quad (17)$$

即式(14)的左端非正. 而由式(16)和 $y^{(p)} \geq 0$ 可知, 式(14)的右端非负, 因此有 $y_{k+1} = 0$. 此时, 式(13)形式如下:

$$\begin{cases} a_{k+2,k+2} \cdot y_{k+2} + \cdots + a_{k+2,p} \cdot y_p = \mu \cdot y_{k+2}, \\ \vdots \\ a_{p,k+2} \cdot y_{k+2} + \cdots + a_{pp} \cdot y_p = \mu \cdot y_p. \end{cases} \quad (18)$$

重复上述过程, 依次可以得到

$$y_{k+2} = 0, y_{k+3} = 0, \cdots, y_{k+p} = 0.$$

而此时仍有且均有 $A_k \cdot y^{(k)} = \mu \cdot y^{(k)}$ 成立. 即在式(7)中, y_1, y_2, \cdots, y_k 为正, $y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots, y_n$ 为零.

证毕.

注 1 由引理7的证明可知, 此处并没有要求全部对角元素为正, 即没有式(6)的假设, 因此有更加广泛的应用.

基于引理7, 对于固定通信结构的多智能体系统平衡点问题, 有如下结果:

定理 1 使用通信协议(4)的多智能体系统, 其通信拓扑 $G(k)$ 在各个时间区间上保持不变, 若其含有一个生成树, 则系统可以渐进实现信息一致性. 进一步, 仅那些信息可以被系统中全部成员收到的智能体的状态对系统最终平衡点有作用.

证 对于定理的第1部分, 为本文引理4的固定拓扑情况, 证明略去.

令 D 为对应于通信拓扑 G 的邻接矩阵, 系统的初始状态为 $x[0] = [x_1 \ x_1 \ \cdots \ x_n]$, 由引理4可知,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x[k+1] &= \lim_{k \rightarrow \infty} D^k \cdot x[0] = \\ \mathbf{1} \cdot \nu^T \cdot x[0] &= \sum_{i=1}^n \nu_i \cdot x_i, \end{aligned} \quad (19)$$

由于 $\mathbf{1} = [1 \ \cdots \ 1]$ 是对应于特征值1的特征向量, 由引理1可知, ν 为对应于特征值1的左特征向量. 若根节点包含在回路 $\phi = \{v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_k}\} (1 \leq r_i \leq n, i = 1, 2, \cdots, k)$ 中, 回路中全部顶点可以作为根节点, 即其对应的智能体状态信息可以被其余智能体收到, 由引理7可知, 在式(19)中, 仅回路 ϕ 中顶点对应的智能体对平衡点有作用. 证毕.

若回路中 ϕ 中仅含有一个顶点, 即根节点, 由引理7可知, 则全部智能体最终平衡点仅和该智能体相关, 显然, 其在多智能体系统中可作为领导者.

对于动态系统而言, 矩阵乘积是否为SIA矩阵取决于各个矩阵的样式, 此处所指的样式即矩阵中各个位置元素为零或大于零^[25]. REN W等^[16]已经证明, 当且仅当有向图的联合含有生成树, 则相应的矩阵乘积是SIA矩阵, 其他关于乘积矩阵的SIA性质参见文献[26–28]. 联合引理3, 5和6, 下面研究引理3式(3)中 \mathbf{c} 的性质.

引理 8 令 $A = [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_p]$ 是一列有限的随机矩阵, 且 A_i 的全部对角元为正. 若其相应的有向图 $\Gamma(A_i) (1 \leq i \leq p)$ 的联合含有一个生成树, 且根节点包含在一条联合回路中, 则 A 中任意矩阵乘积是SIA矩阵, 在其谱半径所对应的左特征向量中, 仅回路中顶点对应的分量为正.

证 由引理5, A 中全部矩阵对角元素为正, 不仅 A 中单个矩阵为SIA矩阵且其任意乘积是SIA矩阵. 当 n 是固定的, 在不考虑数值大小的情况下, n 阶矩阵的数量是有限的, 可知此类对角元素全部为正的 n 阶SIA矩阵是有限的, 其全部用集合 Θ_n 表示.

令 $B = A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdots A_{i_j}$ 为 A 中任意矩阵的乘积, $C = A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots + A_{i_j}$. 由 n 阶SIA矩阵的有限性, 则全部的SIA矩阵的组合是有限的, 随着式(3)中 j 的增大, 矩阵可以看成是某个单独SIA矩阵 D 的无限次幂, 且在 $j \rightarrow \infty$ 之前, $D \in \Theta_n$, 即式(3)可以看成某个单独SIA矩阵 D 的极限. 由引理6可知, D 中包含联合图 $\Gamma(C)$ 中的全部边, 若根节点包含在一个回路中, 则此回路在 $\Gamma(D)$ 中仍然存在. 因此有

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty} D^{k_j} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{c}^T,$$

其中 k_j 表示其与 k 相关, 则由引理7可知, \mathbf{c}^T 中仅回路中顶点对应的分量为正. 证毕.

若存在 $\Gamma(A_i)$ 是强连通的, 由引理6可知, $\Gamma(B)$ 是强连通的, 因此, 其极限左特征值的全部分量为正. 若不存在 $\Gamma(A_i)$ 是强连通的, 其图的联合仍然可能是强连通的.

对于动态多智能体系统的平衡点, 有下面结果:

定理 2 基于引理4, 在系统通信拓扑联合所含生成树中, 若根节点包含在一条联合回路中, 则仅此联合回路中的顶点对应的智能体对平衡点有作用.

证 令 $G(k_1), G(k_2), \dots, G(k_m)$ 为各个时间区间 $[k, k+1) (k = 1, 2, \dots)$ 上的通信拓扑的联合, 相应的邻接矩阵分别为 $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_m}$, 由引理5-6可知, 乘积 $A_k = A_{k_1} \cdot A_{k_2} \cdot \dots \cdot A_{k_m}$ 为SIA矩阵, 则系统可以实现信息一致性^[16], 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k+1] = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \cdot A_{k-1} \cdot A_1 \cdot x[0] = \mathbf{1} \cdot \mathbf{c}^T \cdot x[0], \quad (20)$$

从而有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k+1] = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

类似定理1的讨论, 由引理8可知, 系统中仅那些信息可以被全部智能体收到的成员对平衡点有作用.

证毕.

4 数值算例(Numerical examples)

为了验证引理7的正确性, 分别计算有向图1和图2的邻接矩阵的特征值及其谱半径对应的左特征向量. 有向图1和2的邻接矩阵分别表示为 A_{Fig1} 和 A_{Fig2} . 图中默认全部顶点含有自伴环, 节点间的权值为任意不大于1的正数, 且保证其为随机矩阵. 显然, 对应于特征值1的右特征向量为 $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, 其左特征向量分别表示为 $y^{(1)}$ 和 $y^{(2)}$. 取

$$A_{\text{Fig1}} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix},$$

经过计算, A_{Fig1} 的特征值分别为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.25 + 0.2398i, \lambda_3 = 0.25 - 0.2398i, \lambda_4 = 0.3, \lambda_5 = 0.2, \lambda_6 = 0.4, \lambda_7 = 0.5$. 最大模特征值 $\lambda_1 = 1$ 对应的左特征向量为

$$y^{(1)} = [0.8773 \ 0.4668 \ 0 \ 0.1949 \ 0 \ 0 \ 0].$$

取

$$A_{\text{Fig2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix},$$

经过计算, A_{Fig2} 的特征值分别为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.6, \lambda_3 = 0.3, \lambda_4 = 0.2, \lambda_5 = 0.1, \lambda_6 = 0.4, \lambda_7 = 0.5$. 最大模特征值 $\lambda_1 = 1$ 对应的左特征向量为

$$y^{(2)} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

从计算结果可知, 1均是两个矩阵唯一模最大的特征值. 图1的回路中包含 v_1, v_2, v_4 3个顶点, 在 $y^{(1)}$ 中, 第1, 2, 4这3个分量为正, 其余为零. 在图2中, 仅有一个顶点可以为根节点. 计算结果显示, 其对应的左特征向量仅有第一个元素为正. 这验证了引理7的正确性.

为了验证引理8的正确性, 给出4个含有7个顶点的有向图(如图3所示), 其联合如图4所示. 4个有向图的邻接矩阵分别表示为 A_1, A_2, A_3, A_4 . 为了计算简便, 邻接矩阵中同一行中的非零元素彼此相等, 且保证其为随机矩阵, 此处不再列出.

令 $A_0 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$. 通过计算得 A_0 的特征值分别为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.6050, \lambda_3 = 0.3947, \lambda_4 = 0.1673 + 0.1462i, \lambda_5 = 0.1673 - 0.1462i, \lambda_6 = 0.5000, \lambda_7 = 0.1657$. A_0^T 对应于特征值1的特征向量为

$$y^{(0)} = [0.3742 \ 0.7484 \ 0.2591 \ 0.0576 \ 0.2591 \ 0.4030 \ 0].$$

从图3可以看到, 在联合图中, 除顶点7不可以为根节点以外, 其余6个顶点均可以是根节点. 由计算可知, $y^{(0)}$ 前面6个分量为正, 最后一个分量为零, 这验证了引理8的正确性.

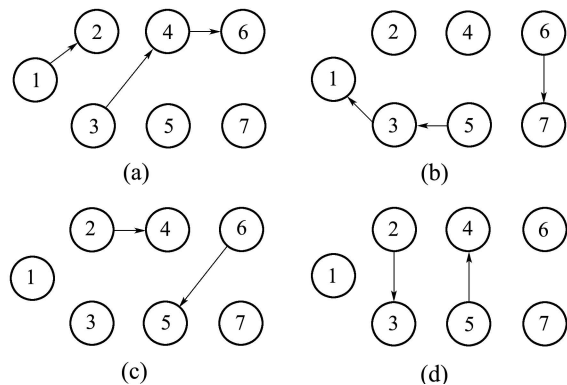


图3 具有7个顶点的4个有向图

Fig. 3 Four graphs each of which has seven vertices

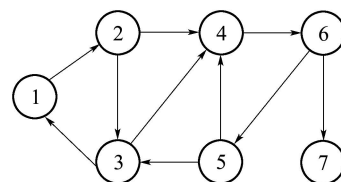


图4 图3的联合图

Fig. 4 The union of graphs in Fig. 3

5 结论(Conclusions)

本文研究了离散多智能体系统信息一致性的平衡点问题. 研究表明, 在系统通信拓扑所含生成树中, 仅那些可以为根节点的顶点所对应的智能体对平衡点有作用.

参考文献(References):

- [1] 谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(10): 1087 – 1092.
(TAN Fuxiao, GUAN Xinping, LIU Derong. Consensus protocol in networked multi-agent systems with non-balanced topology [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(10): 1087 – 1092.)
- [2] 刘德进, 刘成林. 具有通信时延的离散时间二阶多个体网络的一致性研究 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(8): 1108 – 1112.
(LIU Dejin, LIU Chenglin. Consensus problem of discrete-time second-order multi-agent network [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(8): 1108 – 1112.)
- [3] 杨洪勇, 张振兴, 张顺. 采用干扰-观测器控制的移动智能体系统之一致性 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(12): 1787 – 1792.
(YANG Hongyong, ZHANG Zhenxing, ZHANG Shun. Consensus of mobile multiple agent systems with disturbance-observer-based control [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(12): 1787 – 1792.)
- [4] 张庆杰, 沈林成, 朱华勇. 多智能体系统实现鲁棒一致的时延相关稳定判据 [J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 584 – 592.
(ZHANG Qingjie, SHEN Lincheng, ZHU Huayong. Delay-dependent stability criteria for robust consensus of multi-agent [J]. *Control and Decision*, 2012, 27(4): 584 – 592.)
- [5] 严卫生, 李俊兵, 王银涛. 受损多智能体系统的信息一致性 [J]. 自动化学报, 2012, 38(11): 1880 – 1884.
(YAN Weisheng, LI Junbing, WANG Yintao. Consensus for damaged multi-agent system [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(11): 1880 – 1884.)
- [6] 李俊兵, 严卫生, 房新鹏. 非基于自身状态信息的一致性研究 [J]. 控制与决策, 2013, 已录用.
(LI Junbing, YAN Weisheng, FANG Xinpeng. Consensus seeking for multi-agent system without using private state information [J]. *Control and Decision*, 2013, In Press.)
- [7] FAX A J, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [8] TAHBAZ-SALEHI A, JADBABAIE A. A necessary and sufficient condition for consensus over random networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(3): 791 – 795.
- [9] TAHBAZ-SALEHI A, JADBABAIE A. Consensus over ergodic stationary graph processes [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(1): 230 – 235.
- [10] REN W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state [J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(7): 474 – 483.
- [11] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(1): 950 – 955.
- [12] REN W. Consensus tracking under directed interaction topologies: Algorithms and experiments [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(1): 230 – 237.
- [13] REYNOLDS C. Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model [J]. *Computer Graphics*, 1987, 21(4): 25 – 34.
- [14] VICSEK T, CZIRÓK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(2): 1226 – 1229.
- [15] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [16] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [17] XIAO F, WANG L. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(7): 1804 – 1816.
- [18] SUN Y G, WANG L. Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1607 – 1613.
- [19] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [20] REN W, BEARD R W, MCLAIN T W. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems [C] // *Proceedings of the Block Island Workshop on Cooperative Control, Springer-Verlag Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Block Island: Springer-Verlag, 2004: 171 – 188.
- [21] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. U.K.: Cambridge University Press, 1987.
- [22] DIESTEL R. *Graph Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [23] GODSIL C, ROYLE G. *Algebraic Graph Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [24] WALLACE D A R. *Groups, Rings and Fields* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [25] WOLFOWITZ J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1963, 14(5): 733 – 736.
- [26] KELLER E L. Primitivity of the product of two leslie matrices [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1980, 42(2): 181 – 189.
- [27] TAYLOR G C. Primitivity of the products of leslie matrices [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1980, 47(1): 23 – 34.
- [28] SHAO J Y. Products of irreducible matrices [J]. *Linear Algebra and Its Application*, 1985, 68(0): 131 – 143.

作者简介:

李俊兵 (1981–), 男, 博士研究生, 主要从事多智能体系统理论控制以及编队控制等研究, E-mail: ljb020313@yahoo.com.cn;

严卫生 (1968–), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事多智能体系统、无人水下航行器控制、导航等研究, E-mail: wseyan@nwpu.edu.cn;

房新鹏 (1987–), 男, 博士研究生, 主要从事水下航行器编队控制等研究, E-mail: nwpuxinpeng@163.com.