

## 非均匀选择概率下异步随机Gossip共识算法及优化

王长城<sup>†</sup>, 戚国庆, 李银伢, 盛安冬

(南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 异步随机Gossip算法大都采用以均匀选择概率为基础的时间模型, 并未充分考虑网络拓扑结构对智能体获取信息的影响, 为此本文提出了一种更为合理的基于非均匀选择概率的异步随机Gossip算法. 首先给出了非均匀选择概率下的异步时间模型, 在概率意义下分析了算法的收敛性. 算法的收敛速度取决于概率化权重矩阵的第2大特征值, 并利用投影次梯度算法给出了选择概率优化方法. 仿真分析表明, 在非均匀选择概率下可通过对各智能体选择概率的优化, 改善算法的收敛速度, 并且弥补了传统的通信概率矩阵优化方法受制于网络拓扑结构的不足.

**关键词:** 多智能体系统; 非均匀选择概率; 随机Gossip算法; 一致性; 优化

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Asynchronous randomized Gossip consensus algorithm with nonuniform-selected probability and optimizing

WANG Chang-cheng<sup>†</sup>, QI Guo-qing, LI Yin-ya, SHENG An-dong

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

**Abstract:** The traditional asynchronous randomized Gossip consensus algorithm is founded on the basis of the uniform-selected probability time model which does not consider the impact of topology on local information transfer. We introduce a more reasonable asynchronous randomized Gossip consensus algorithm with nonuniform-select probability, and analyze the convergence of the algorithm in probability sense. The convergence rate depends on the second largest eigenvalue of the probabilistic weighted matrix. An optimization algorithm for selecting probabilities is proposed by projection subgradient method. The numerical example indicates that the algorithm proposed can improve the convergence rate by optimizing the selection of probabilities for agents, and compensates for the traditional algorithm in optimizing communication matrix the disadvantages of dependence on the network topology.

**Key words:** multi-agent system; nonuniform-select probability; randomized Gossip algorithm; consensus; optimizing

### 1 引言(Introduction)

随着网络通信技术的快速发展, 多智能体分布式一致性问题受到越来越多国内外学者的关注, 成为当前研究的热点领域之一<sup>[1-4]</sup>. 所谓分布式一致, 是指在无协调中心的情况下, 各智能体仅通过局部的信息交互进行状态更新, 最终达到状态一致. 多智能体一致性在多机器人合作控制、无人机组队跟踪、无线传感器网络分布式估计等领域有着广泛的应用.

20世纪80年代, 为解决网络分布式计算, Borkar等<sup>[5]</sup>、Tsitsiklis等<sup>[6]</sup>最早提出了分布式一致性问题. 在此基础上, Vicsek等<sup>[7]</sup>针对自驱动粒子群一致性问题进行了深入的研究. 2004年, Olfati-Saber等<sup>[8]</sup>利用图论和拉普拉斯矩阵理论论证系统的研究了分布式一致性问题, 证明了通信拓扑图无向连通或平衡有向强连通时, 多智能体系统能够达到状态平均一致性.

至此, 解决分布式一致性问题的基本理论框架被建立. 近年来, 国内外学者从不同的角度对多智能体系统分布式一致性问题进行了广泛的研究, 包含了随机分布式一致性<sup>[9]</sup>、量化分布式一致性<sup>[10]</sup>、分布式参数优化<sup>[11]</sup>、基于一致性的分布式状态估计<sup>[12]</sup>、牵连控制下分布式一致性问题<sup>[13]</sup>等.

在随机分布式一致性算法中, 各智能体之间随机建立通信链路. 通信拓扑被建立成随机图, 可有效的避免信道冲突, 降低了对各智能体计算能力的要求, 并具有较好的扩展性和鲁棒性. Gossip算法<sup>[14-18]</sup>是随机分布式一致性问题中的一个重要分支. 2006年, Boyd等<sup>[18]</sup>针对异步随机Gossip(asynchronous randomized Gossip, ARG)算法和同步随机Gossip算法进行了系统的研究. 在ARG算法中, 等概率随机选择网络中的一个智能体, 并依概率从其邻居集中随机选择一个智能体进行信息交互完成状态更新. ARG算

法放松了对全局时钟的同步要求,不要求每个智能体同时进行信息交换,能够更好的适应分布式网络环境.随后Dimakis等<sup>[19]</sup>以Boyd给出的异步时间模型为基础,提出了一种基于地理信息的Gossip算法(geographic Gossip). Geographic Gossip算法中随机被选择的智能体根据随机策略在全网络中选择一个智能体进行信息交换,而不局限于其邻居集,提高了算法的收敛速度;但同时该算法的实现以多跳通信为基础,易受通信延迟、数据丢包等因素影响.2010年,Carli等<sup>[20]</sup>研究了数据量化下的ARG算法,通过对算法收敛性质的分析,讨论了不同量化策略对算法的影响,并指出随机量化优于确定性量化策略.Yuan等<sup>[21]</sup>研究了可变加权系数下的ARG算法,并讨论了算法渐近误差的上界与量化精度、网络拓扑结构的关系.Ustebay等<sup>[22]</sup>针对分布式变换编码和数据压缩问题,提出了一种各智能体状态为向量信息的异步随机选择Gossip算法,根据阈值选择性计算携带重要信息的向量元素.

目前针对ARG算法的研究文献,大多以Boyd提出的时间模型<sup>[18]</sup>为基础:每一个智能体存在一个内部时钟,时钟触发次数被建模为速率等于1的泊松过程,该过程被等价于每一时刻各智能体以相同的概率被选择.这种以均匀概率选择各智能体的时间模型并没有充分考虑网络的拓扑结构对节点获取信息的影响,以图1所示的网络拓扑为例.

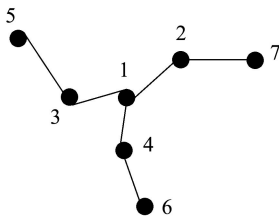


图1 网络拓扑图例

Fig. 1 An example of network topology

从图中不难发现,各节点在网络拓扑中的位置决定了其能够直接获取和分配的信息量.如节点1拥有最多的邻居节点,可通过最少的信息交换次数影响其余节点的状态更新,直接获取和分配更多的网络信息资源.而节点5,6,7能够直接获取和分配的信息量相对较少.对所有智能体分配相同的选择概率,显然对网络的拓扑结构缺少充分的考虑.另一方面,虽然Boyd等提出通过优化通信概率矩阵来提高算法的收敛速度,但这种方法却受制于具体的网络拓扑结构:例如当节点5被选择时,只能选择与节点3进行通信,即通信概率 $p_{53} = 1$ 别无选择.然而,此时仍可通过控制节点5的选择概率进一步影响局部信息的传递.

基于以上分析,为解决针对具体的网络拓扑结

构,如何分配各智能体的选择概率这一问题,本文提出了一种非均匀选择概率下的异步随机Gossip(non-uniform asynchronous randomized Gossip, NARG)算法.不同于传统的ARG算法,在NARG算法中可根据智能体在网络拓扑中获取信息资源的差异而分配相应的选择概率.首先建立了一种智能体的异步时间模型,证明了在概率意义下的平均一致性,分析了算法的收敛速度.进而研究了各智能体选择概率对一致性收敛速度的影响,并利用投影次梯度凸优化算法给出了最优选择概率的确定方法.

## 2 问题描述(Problem statement)

### 2.1 网络拓扑结构(Topology of network)

记 $G = (V, E)$ 为无向连通图,其中 $V$ 为节点集,每个节点 $i$ 对应一个智能体,且相应的状态变量为 $x_i(k)$ , $E \in \{(i, j) : i, j \in V\}$ 为边集.节点 $i$ 的邻居集定义为 $N_i \triangleq \{j \in V, a_{ij} \neq 0\}$ , $d_i \triangleq \sum_j a_{ij}$ 为节点 $i$ 的度. $(j, i) \in E$ 表示智能体 $i, j$ 之间能够建立通信链路.为突出重点,在本文中均假设所建立的通信链路是理想的,暂未考虑数据丢包等因素的影响.

### 2.2 非均匀选择概率下的异步时钟模型(Asynchronous time model with nonuniform-select probability)

Boyd等<sup>[18]</sup>以泊松过程为基础,精确定义了均匀选择概率下各智能体的异步时钟模型.受文献[18]的启发,引入泊松过程描述非均匀选择概率下各智能体的时钟特性.考虑由 $n$ 个智能体组成的网络拓扑图 $G$ ,各智能体存在一个内部时钟,时钟触发次数 $\{S_i(t), t \geq 0\}$ 为速率等于 $\gamma_i$ ( $\gamma_i > 0$ )的泊松过程.当其时钟触发时,该智能体随机从其邻居集中选择一个智能体发起信息交换,相邻两次触发时间间隔序列是速率为 $\gamma_i$ ,且相互独立同指数分布的随机变量.将所有智能体的时钟合成为一个全局时钟,其触发次数等价于一个速率为 $\sum_i \gamma_i$ 的泊松过程.记 $[Z_k, Z_{k+1})$ 为Gossip算法的一个更新周期,则在一个更新周期内平均有 $\sum_i \gamma_i$ 次信息交换.

注意到 $E[Z_k] = \sum_j^k E[Z_j - Z_{j-1}] = k / \sum_i \gamma_i$ ,为了使智能体之间的信息交换次数 $k$ 与在均匀概率选择下具有相同的绝对时间尺度,在这里对 $\gamma_i$ 做出如下约束:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = n. \quad (1)$$

为便于数学分析和体现时钟异步,异步随机Gossip算法均假设每一时刻只允许选择一个智能体(即时钟触发)发起信息交换<sup>[18-21]</sup>,该假设不失一般性,实际应用中可通过调整各智能体时间片以较高的概

率保证每一更新时刻只存在一个信息交互事件的发生. 记 $\mathcal{Y}_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 表示第 $k$ 次被选择的智能体, 则 $\mathcal{Y}_k$ 为相互独立的随机变量, 且其概率分布函数为

$$P\{\mathcal{Y}_k = i, i = 1, 2, \dots, n\} = \gamma'_i, \quad (2)$$

其中 $\gamma'_i = \gamma_i/n$ .

### 3 非均匀选择概率下异步随机 Gossip 算法 (Asynchronous randomized Gossip consensus algorithm with nonuniform-select probability)

首先给出在非均匀选择概率时间模型下异步随机Gossip算法. 在每一更新周期算法流程如图2所示, 其具体步骤如下:

**Step 1** 在每一更新周期中, 以概率 $\gamma'_i$ 选择智能体 $i$ ;

**Step 2** 若智能体 $i$ 被选中, 以概率 $p_{ij}$ 在其邻居集中选择智能体 $j$ 建立通信链路;

**Step 3** 智能体 $i, j$ 通过信息交互进行各自状态更新, 其余智能体状态保持不变:

$$x_i(k+1) = \{x_i(k) + x_j(k)\}/2, \quad (3)$$

$$x_j(k+1) = \{x_j(k) + x_i(k)\}/2, \quad (4)$$

$$x_l(k+1) = x_l(k), \forall l \neq i, j. \quad (5)$$

记 $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]^T$ , 算法可描述成如下向量形式:

$$x(k+1) = W(k)x(k), \quad (6)$$

$$P(W(k) = W^{ij}) = \gamma'_i p_{ij}, \quad (7)$$

$W(k)$ 为加权系数:

$$W^{ij} = I - \frac{1}{2}(e_i - e_j)(e_i - e_j)^T, \quad (8)$$

其中 $e_i = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \in \mathbb{R}^n$ 为第 $i$ 个元素等于1的列向量.

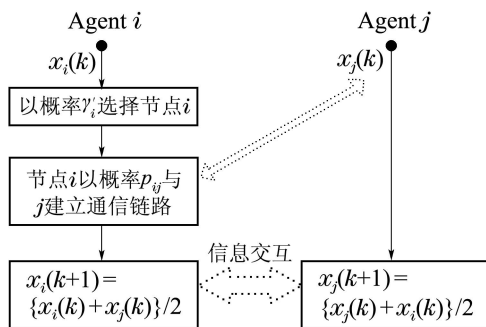


图2 NARG算法流程

Fig. 2 The algorithm flow chart of NARG

不难发现, 在NARG算法中任一时刻所有智能体的状态总和保持不变, 即 $\mathbf{1}^T x(k) = \mathbf{1}^T x(0), \forall k \geq 1$ ,

其中 $\mathbf{1} = [1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^n$ .  $P \triangleq [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 定义为通信概率矩阵:  $p_{ij} \geq 0, (i, j) \in E; p_{ij} = 0, (i, j) \notin E$ . 在本文中假设 $P$ 满足如下条件:

**假设 1**  $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ , 记矩阵 $P$ 的特征值按升序排列为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_n = 1$ 且 $\lambda_i < 1, i < n$ .

当图 $G$ 无向连通, 且不是二部图, 此时总能找到通信概率矩阵 $P$ 满足上述条件.

由于随机因素的引入, 下面将在概率意义下分析NARG算法中各智能体的状态平均一致性和收敛速度.

**引理 1**(Gerschgorin<sup>[23]</sup>) 记 $A = (a_{ij})_{n \times n}, R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ . 称复平面上的圆域 $G_i = \{z : |z - a_{ii}| \leq R_i\}$ 为矩阵 $A$ 的第 $i$ 个Gerschgorin圆. 矩阵 $A$ 的特征值都落在它的 $n$ 个Gerschgorin圆的并集中.

**定理 1** 记 $\bar{W} = E[W(k)]$ , 在满足假设条件1时, 则

$$\bar{W} = I - \frac{M}{2} + \frac{\Lambda P + P^T \Lambda}{2}, \quad (9)$$

且 $\bar{W}$ 满足下列条件:

$$\mathbf{1}^T \bar{W} = \mathbf{1}^T, \quad (10)$$

$$\bar{W} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad (11)$$

$$\rho(\bar{W} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n) < 1, \quad (12)$$

其中 $M = \text{diag}\{M_1, \dots, M_n\}$ 为对角矩阵, 对角元素满足 $M_i = \sum_{j=1}^n (\gamma'_i p_{ij} + \gamma'_j p_{ji})$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n\}$ .

证

$$\bar{W} = E[W(k)] = \sum_{i=1}^n \gamma'_i \sum_{j=1}^n p_{ij} W^{ij}. \quad (13)$$

由 $W^{ij} = I - \frac{1}{2}(e_i - e_j)(e_i - e_j)^T$ :

$$\bar{W}_{ij} = \frac{\gamma'_i p_{ij} + \gamma'_j p_{ji}}{2}, \forall i \neq j, \quad (14)$$

$$\bar{W}_{ii} = 1 - \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n (\gamma'_i p_{ij} + \gamma'_j p_{ji})}{2}. \quad (15)$$

由假设条件1易知,  $\bar{W} = \bar{W}^T$ 且满足 $\mathbf{1}^T \bar{W} = \mathbf{1}^T, \bar{W} \mathbf{1} = \mathbf{1}$ . 注意到

$$\lambda_{i+1}(\bar{W} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n) = \lambda_i(\bar{W}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (16)$$

$$\rho(\bar{W} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n) = \max\{\lambda_{n-1}(\bar{W}), -\lambda_1(\bar{W})\}. \quad (17)$$

不难发现 $M - \Lambda P - P^T \Lambda$ 具备加权Laplacian矩阵特性, 因图 $G$ 无向连通且满足假设条件1, 易知0是 $M - \Lambda P - P^T \Lambda$ 的单特征值, 且其余特征值均为严格大于0的正实数. 由于

$$\lambda_i(\bar{W}) = 1 - \frac{1}{2}\lambda_{n+1-i}(M - AP - P^T A), \quad (18)$$

故 $\lambda_{n-1}(\bar{W}) < 1$ 成立. 由式(18),  $\lambda_1(\bar{W}) = 1 - \frac{1}{2}\lambda_n(M - AP - P^T A)$ . 由Laplacian矩阵的性质和引理1得

$$0 < \lambda_n(M - AP - P^T A) < 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n (\gamma'_i p_{ij} + \gamma'_j p_{ji}), \quad \forall i. \quad (19)$$

因 $0 < \gamma'_i < 1$ ,  $\sum_{j=1, j \neq i}^n (\gamma'_i p_{ij} + \gamma'_j p_{ji}) \leq 1$ :

$$0 < \lambda_n(M - AP - P^T A) < 2, \quad (20)$$

即 $0 < \lambda_1(\bar{W}) < 1$ . 综上所述, 可得 $\rho(\bar{W} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n) < 1$ . 证毕.

**推论 1** 记 $x_{\text{ave}} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$ 为所有智能体初始状态的平均值, 若满足假设条件1,  $x(k)$ 在期望意义下达到状态平均一致:

$$\mathbf{E}[\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)] = \mathbf{1}x_{\text{ave}}. \quad (21)$$

**证** 由Lebesgue控制收敛定理

$$\mathbf{E}[\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[x(k)], \quad (22)$$

得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[x(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\Theta(k)]x(0), \quad (23)$$

其中 $\Theta(k) = W(k-1), \dots, W(0)$ . 由于 $W(k)$ 独立同分布 $\mathbf{E}[\Theta(k)] = \mathbf{E}[W(k-1), \dots, W(0)] = \bar{W}^k$ , 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[x(k)] - \mathbf{1}x_{\text{ave}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{W}^k - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n)x(0). \quad (24)$$

由定理1,  $\bar{W}$ 满足式(10)–(12). 依文献[24],  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{W}^k = \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n$ , 因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[x(k)] = \mathbf{1}x_{\text{ave}}$ . 证毕.

定理1表明了NARG算法中各智能体状态均值收敛于初始状态的平均值. 在随机分布式一致性问题中, 收敛速度是衡量算法性能的一个重要指标之一, 下面将通过分析误差向量范数的收敛性质来讨论NARG算法的收敛速度.

**定理 2** 定义一致性误差向量 $y(k) \triangleq x(k) - \mathbf{1}x_{\text{ave}}$ , 在假设条件1下, 误差向量范数满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\|y(k)\|_2^2] = 0, \quad (25)$$

且收敛速度是 $\bar{W}$ 的第2大特征值的递减函数

$$\mathbf{E}[\|y(k)\|_2^2] \leq \lambda_{n-1}^k(\bar{W})\|y(0)\|_2^2. \quad (26)$$

**证**  $y(k+1) = W(k)x(k) - \mathbf{1}x_{\text{ave}}$ . 由于 $W(k)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ,

$$y(k+1) = W(k)x(k) - W(k)\mathbf{1}x_{\text{ave}} = W(k)(x(k) - \mathbf{1}x_{\text{ave}}) = W(k)y(k), \quad (27)$$

$$\mathbf{E}[\|y(k+1)\|_2^2 | y(k)] = y(k)_{\text{ave}} \mathbf{E}[W(k)_{\text{ave}} W(k)] y(k). \quad (28)$$

由加权系数矩阵 $W(k)$ 的定义易知

$$W^T(k)W(k) = W(k), \quad (29)$$

$$\mathbf{E}[W^T(k)W(k)] = \mathbf{E}[W(k)] = \bar{W}. \quad (30)$$

由定理1的分析,  $\mathbf{1}$ 是矩阵 $\bar{W}$ 的最大特征值1所对应的特征向量, 因此有

$$y^T(k) \mathbf{E}[W^T(k)W(k)] y(k) \leq \lambda_{n-1}(\bar{W}) \|y(k)\|_2^2, \quad (31)$$

故 $\mathbf{E}[\|y(k+1)\|_2^2 | y(k)] \leq \lambda_{n-1}(\bar{W}) \|y(k)\|_2^2$ , 即

$$\mathbf{E}[\|y(k)\|_2^2] \leq \lambda_{n-1}^k(\bar{W}) \|y(0)\|_2^2. \quad (32)$$

因 $0 < \lambda_{n-1}(\bar{W}) < 1$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\|y(k)\|_2^2] = 0. \quad (33)$$

证毕.

**引理 2**<sup>[25]</sup> 考虑非负随机变量序列 $\{\beta(k)\}_{k \geq 0}$ 且 $\mathbf{E}[\beta(0)]$ 有界. 若存在 $c \in (0, 1)$ 使

$$\mathbf{E}[\beta(k+1) | \beta(k), \dots, \beta(1), \beta(0)] \leq c\beta(k) \quad (34)$$

成立, 则 $\beta(k)$ 以概率1收敛到0,

$$\mathbf{P}\{\lim_{k \rightarrow \infty} \beta(k) = 0\} = 1. \quad (35)$$

**推论 2** 在满足假设条件1时,  $x(k)$ 以概率1达到平均一致, 即

$$\mathbf{P}\{\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \mathbf{1}x_{\text{ave}}\} = 1. \quad (36)$$

**证** 由定理2,

$$\mathbf{E}[\|y(k+1)\|_2^2 | y(k), \dots, y(1), y(0)] = \mathbf{E}[\|y(k+1)\|_2^2 | y(k)] \leq \lambda_{n-1}(\bar{W}) \|y(k)\|_2^2. \quad (37)$$

由于 $0 < \lambda_{n-1}(\bar{W}) < 1$ , 满足引理2中的条件, 故

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lim_{k \rightarrow \infty} \|y(k)\|_2^2 = 0\} &= 1 \Leftrightarrow \\ \mathbf{P}\{\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \mathbf{1}x_{\text{ave}}\} &= 1. \end{aligned} \quad (38)$$

证毕.

经上述分析可以发现, 多智能体系统的一致性误差向量范数趋于0的速度决定于 $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 的取值. 由定理1,  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 的取值决定于通信概率矩阵 $P$ 和各智能体的选择概率 $\gamma'_i$ . 通过对图1的讨论, 基于均匀选择概率的ARG算法并未充分考虑到网络拓扑结构对各智能体局部信息传递的影响, 且通信概率优化方法也在一定程度上受到具体网络拓扑结构的限制. 然而, 在非均匀选择概率下, 可进一步通过调整 $\gamma'_i$ 控制 $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 的取值, 从而改变算法的收敛速度. 下面将讨论优化概率参数 $\gamma'_i$ 以改善算法收敛速度的方法.

#### 4 最优化选择概率(The optimal select probability)

在NARG算法中, 误差向量范数收敛速度是概率化权重矩阵 $\bar{W}$ 第2大特征值的递减函数, 可通过减小 $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 的取值改善其收敛速度. 考虑如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda_{n-1}(\bar{W}), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \bar{W} = \sum_{i=1}^n \gamma'_i \Omega_i, \\ \sum_{i=1}^n \gamma'_i = 1, \\ 0 < \gamma'_i < 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

其中 $\Omega_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} W^{ij}$ .

上述优化问题中的约束条件是 $\gamma'_i$ 的线性函数. 由于 $\mathbf{1}$ 是矩阵 $\bar{W}$ 的最大特征值1所对应的特征向量,  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 可表示为

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}(\bar{W}) &= \sup\{u^T \bar{W} u \mid \|u\|^2 \leq 1, \mathbf{1}^T u = 0\} = \\ &= \sup\{u^T (\sum_{i=1}^n \gamma'_i \Omega_i) u \mid \|u\|^2 \leq 1, \mathbf{1}^T u = 0\}. \end{aligned} \quad (40)$$

$\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 是一簇关于 $\gamma'_i$ 的线性函数的上确界, 因此 $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 是关于 $\gamma'_i$ 的凸函数. 注意到

$$\lambda_{n-1}(\bar{W}) \leq \alpha \Leftrightarrow \lambda_n(\bar{W} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n) \leq \alpha. \quad (41)$$

上述凸优化问题可以转换成一个半正定规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \bar{W} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n \leq \alpha I, \\ \bar{W} = \sum_{i=1}^n \gamma'_i \Omega_i, \\ \sum_{i=1}^n \gamma'_i = 1, \\ 0 < \gamma'_i < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

下面利用次梯度投影算法给出上面优化问题的求解方法. 记 $v$ 是 $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 所对应的特征向量, 根据文献[26], 可知 $v^T v$ 为 $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 的一个次梯度, 且

$$\lambda_{n-1}(\bar{W}') \geq \lambda_{n-1}(\bar{W}) + v^T (\bar{W}' - \bar{W})v, \quad (43)$$

其中 $\bar{W}' = \sum_{i=1}^n \gamma''_i \Omega_i$ . 记 $\vartheta = [\gamma'_1 \ \gamma'_2 \ \cdots \ \gamma'_n]^T$ ,  $\vartheta' = [\gamma''_1 \ \gamma''_2 \ \cdots \ \gamma''_n]^T$ , 则

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}(\bar{W}'(\vartheta')) &\geq \\ \lambda_{n-1}(\bar{W}(\vartheta)) &+ v^T (\bar{W}'(\vartheta') - \bar{W}(\vartheta))v = \\ \lambda_{n-1}(\bar{W}(\vartheta)) &+ \sum_{i=1}^n ((v^T \Omega_i v)(\gamma''_i - \gamma'_i)) = \\ \lambda_{n-1}(\bar{W}(\vartheta)) &+ \bar{h}(\vartheta' - \vartheta), \end{aligned} \quad (44)$$

其中 $\bar{h} = (v^T \Omega_1 v, v^T \Omega_2 v, \dots, v^T \Omega_n v)$ . 选择概率优化算法流程如图3所示, 其具体步骤如下:

**Step 1** 在可行域内初始化选择概率 $\vartheta$ , 令迭代次数 $m = 1$ . 并预置最大迭代次数 $m_{\max}$ 与判断阈

值 $\delta$ .

**Step 2** 计算 $\bar{h}$ 并对选择概率进行更新,

$$\vartheta = \vartheta - \alpha_m \bar{h}^T. \quad (45)$$

其中 $\alpha_m$ 为更新步长, 且满足如下约束条件:  $\alpha_m \geq 0$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0, \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \rightarrow \infty.$$

**Step 3** 计算 $\vartheta$ 到可行域 $\{\vartheta \in \Gamma \mid \vartheta_i > 0, \mathbf{1}^T \vartheta = 1\}$ 的投影 $\vartheta^T$ :

$$P_{\Gamma}[\vartheta] = \arg \min_{\vartheta^T \in \Gamma} \|\vartheta^T - \vartheta\|. \quad (46)$$

$m = m + 1$ .

IF  $m \geq m_{\max}$  OR  $\Delta(\lambda_{n-1}(\bar{W})) \leq \delta$ , EXIT;

ELSE, GOTO Step 2.

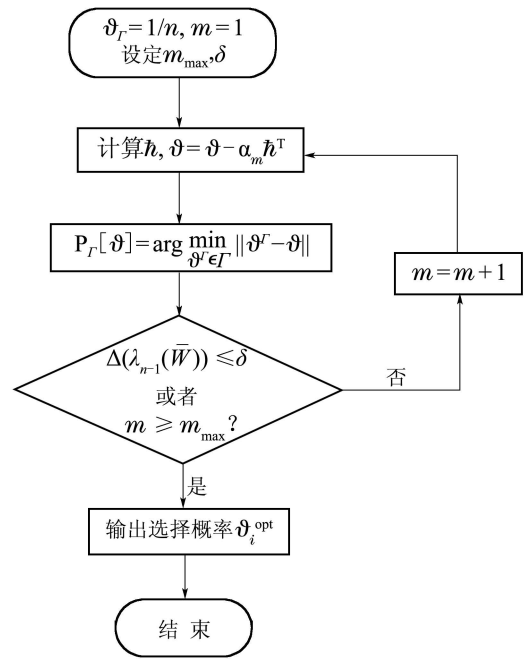


图3 选择概率优化算法流程

Fig. 3 The algorithm flow chart of select probability optimizing

以上给出了各智能体选择概率的优化方法, 在算法初始化阶段可以将初值设置为 $\vartheta_i = 1/n$ , 保证其属于可行域集合. 在Step 2中, 更新步长 $\alpha_m$ 以不可加但递减为选择原则, 保证其收敛性. 由于可行域是一个充分简单的集合, Step3中的投影计算可通过约束条件下线性最小二乘方法求解. 从算法中可以看出, 各智能体选择概率优化需要集中式计算. 但这一优化过程可以在网络初始化阶段进行, 并不需要在Gossip算法执行中实时计算, 因此并不影响其应用.

#### 5 仿真结果与分析(Simulation and analysis)

本节给出仿真结果以说明本文算法的正确性和

有效性:

**场景1** 首先考虑图1中的网络拓扑图. 不失一般性, 给出如下通信概率矩阵:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i}, & (i, j) \in E, \\ 0, & (i, j) \notin E. \end{cases} \quad (47)$$

各智能体初始状态为  $x_i(0) \sim U(-10, 10)$ , 初始选择概率为  $\vartheta_i = 1/7$ ,  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$  初始值为 0.97430. 选择更新步长  $\alpha_m = 1/\sqrt{m}$ . 利用优化算法对选择概率进行优化, 经计算可得到最优选择概率  $\vartheta^{\text{opt}}$  取值如表1所示. 此时,  $\lambda_{n-1}(\bar{W})^{\text{opt}} = 0.96668$ . 第2大特征值  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$  随优化算法迭代次数  $m$  的变化曲线如图4所示.

表1 各智能体的最优选择概率

Table 1 The optimal selection probabilities of agents

$\vartheta_1^{\text{opt}}$	$\vartheta_2^{\text{opt}}$	$\vartheta_3^{\text{opt}}$	$\vartheta_4^{\text{opt}}$	$\vartheta_5^{\text{opt}}$	$\vartheta_6^{\text{opt}}$	$\vartheta_7^{\text{opt}}$
0.3249	0.1834	0.1834	0.1832	0.0416	0.0418	0.0417

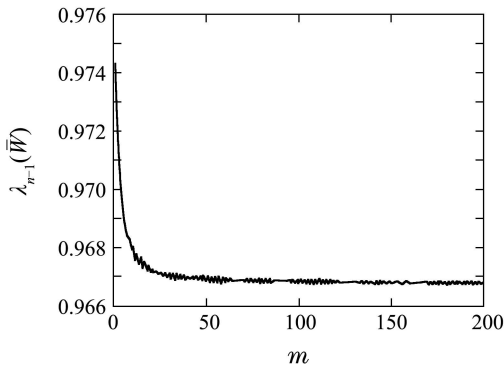


图4  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 变化曲线

Fig. 4 The curve of  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$

定义平均一致误差

$$\chi(k) = \frac{1}{n} \|x(k) - \mathbf{1}x_{\text{ave}}\|_2^2. \quad (48)$$

利用蒙特卡洛仿真实验, 对均匀选择概率和最优选择概率下的平均一致误差进行比较, 如图5所示.

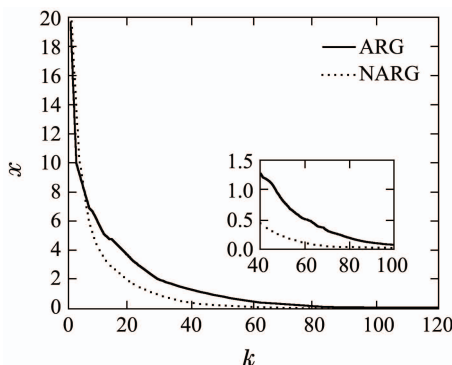


图5 平均一致性误差比较

Fig. 5 Comparison of the average consensus errors

**场景2** 考察在  $30 \times 30$  的矩形区域内随机散布的15个节点, 以15为节点的最大通讯半径构造无向连通网络, 如图6所示. 给定通信概率矩阵如式(47),  $x_i(0) \sim U(-10, 10)$ , 初始化选择概率  $\vartheta_i = 1/15$ .  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$  随迭代次数  $m$  变化曲线如图7所示, 图8给出了平均一致性误差比较.

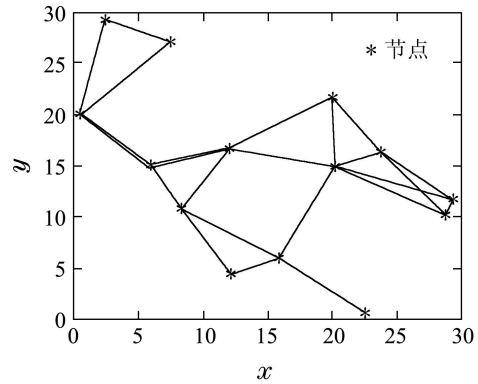


图6 随机生成的网络拓扑图

Fig. 6 The network topology generated randomly

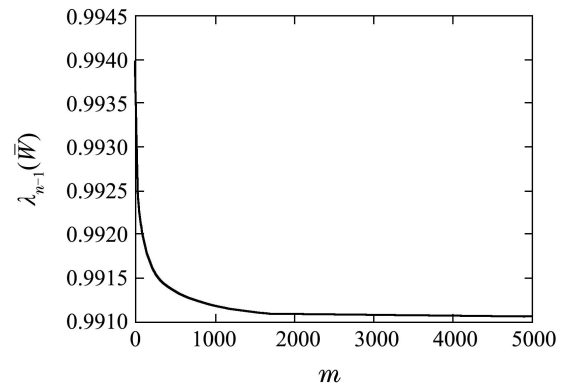


图7  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 变化曲线

Fig. 7 The curve of  $\lambda_{n-1}(\bar{W})$

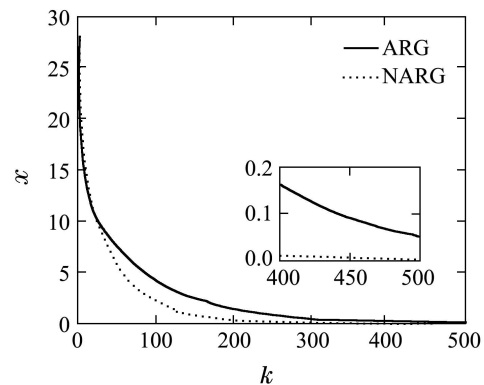


图8 平均一致性误差比较

Fig. 8 Comparison of the average consensus errors

**场景3** 最优通信概率矩阵下的选择概率: 考虑图1中的网络拓扑图, 根据文献[18]计算均匀选择概率下的最优化通信概率矩阵  $P^{\text{opt}}$  如下:

$$P^{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

此时 $\lambda_{n-1}(\bar{W})^{\text{opt}(P)} = 0.96680$ . 令 $P = P^{\text{opt}}$ , 并对选择概率 $\vartheta$ 进行优化, 经计算可得到最优选择概率 $\vartheta^{\text{opt}}$ 取值如表2所示. 此时 $\lambda_{n-1}(\bar{W})^{\text{opt}(\vartheta)} = 0.96667$ .

表 2 各智能体的最优选择概率

Table 2 The optimal selection probabilities of agents

$\vartheta_1^{\text{opt}}$	$\vartheta_2^{\text{opt}}$	$\vartheta_3^{\text{opt}}$	$\vartheta_4^{\text{opt}}$	$\vartheta_5^{\text{opt}}$	$\vartheta_6^{\text{opt}}$	$\vartheta_7^{\text{opt}}$
0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1333	0.1333	0.1334

结果分析:

a) 首先从表1、表2中可以看出, 优化算法根据节点在网络拓扑结构中所能直接获取信息资源的差异, 对各智能体分配了相应的选择概率, 相比与其他节点, 节点5, 6, 7所分配的选择概率相对较小. 其次由图4、图7, 发现通过优化选择概率, 可减小 $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 的取值. 根据定理2易知, 多智能体系统一致性误差收敛速度是 $\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 的递减函数, 图5、图8则从直观上表明了基于非均匀选择概率的算法可通过优化选择概率提高收敛速度.

b) 从场景3中不难发现, 即使通信概率矩阵 $P$ 取最优值 $P^{\text{opt}}$ 时, 仍可通过优化选择概率, 进一步影响局部信息的传递, 从而提高算法的收敛速度. 从式(49)最优通信概率矩阵 $P^{\text{opt}}$ 和 $\lambda_{n-1}(\bar{W})^{\text{opt}(P)}$ 的取值来看, 单一的通信概率矩阵优化对算法收敛速度的改善在一定程度受具体网络的拓扑结构的限制.

需要注意的是, 对于某些具有特殊拓扑结构的网络, 在通信概率矩阵取最优值时, 均匀选择概率即最优选择概率, 无法进一步优化选择概率提高收敛速度. 如图9所示的环形结构网络.

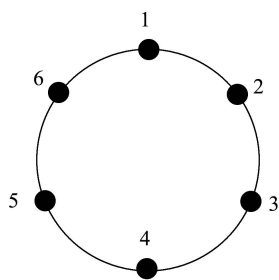


图 9 6节点环状网络

Fig. 9 The ring network with 6 nodes

经计算, 在均匀选择概率下, 最优通信概率矩阵取值为

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (i, j) \in E, \\ 0, & (i, j) \notin E, \end{cases} \quad (50)$$

且此时所对应的最优选择概率为 $\vartheta_i^{\text{opt}} = 1/6$ .

表3给出了不同硬件环境PC机上选择概率优化算法的平均计算时间. 经比较, 不难发现其计算所需时间取决于节点个数, 当节点越多, 优化算法耗时越长.

表 3 优化算法计算时间

Table 3 The computational time of the optimization algorithm

CPU主频/GHz	内存/GB	场景1/s	场景2/s	场景3/s
1.8	1	1.58	21.09	1.55
2.0	2	1.28	19.16	1.39
2.6	4	0.97	16.81	1.03

## 6 结论(Conclusions)

本文提出了一种基于非均匀选择概率的异步随机Gossip算法, 在概率意义下分析了算法的收敛性和收敛速度, 给出了选择概率的优化算法. 结果表明, 在不额外增加计算复杂度和节点之间数据通信量的前提下, 基于非均匀选择概率的算法可根据网络拓扑对节点信息获取的影响, 通过优化选择概率提高算法的收敛速度. 并且在通信概率矩阵取最优值时, 仍可通过优化选择概率进一步提高算法的收敛速度, 弥补了传统的通信概率矩阵优化方法受制于网络拓扑结构的不足. 同时, 本文中均假设节点之间的通信链路是理想的, 在节点之间存在数据丢包、通信时延等情况下如何优化选择概率将是作者下一阶段研究的重点; 此外, 本文所给出的选择概率优化过程需要集中式计算, 虽不影响其具体应用, 但如何以分布式途径解决选择概率的优化问题仍是值得进一步研究的问题.

## 参考文献(References):

- [1] ALEKEISH K, EZHILCHELVAN P. Consensus in sparse, mobile Ad Hoc networks [J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2012, 23(3): 467 – 474.
- [2] WU Z, FANG H, SHE Y. Weighted average prediction for improving consensus performance of second-order delayed multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2012, 42(5): 1501 – 1508.
- [3] PASQUALETTI F, BICCHI A, BULLO F. Consensus computation in unreliable networks: a system theoretic approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 90 – 104.
- [4] 彭焕新, 戚国庆, 盛安冬. 伪多跳中继分布式一致性算法 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(5): 623 – 628.

- (PENG Huanxin, QI Guoqing, SHENG Andong. Pseudo multi-hop relay distributed consensus algorithm [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(5): 623 – 628.)
- [5] BORKAR V, VARAIYA P. Asymptotic agreement in distributed estimation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, 27(3): 650 – 655.
- [6] TSITSIKLIS J N, BERTSEKAS D P, ATHANS M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(9): 803 – 812.
- [7] VICSEK T, CZIROK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [8] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [9] STANKOVIC S S, ILIC N, STANKOVIC M S, et al. Distributed change detection based on a randomized consensus algorithm [C] // *Proceedings of the 5th European Conference on Circuits and Systems for Communications*. New York: IEEE, 2010: 51 – 54.
- [10] LAVAEI J, MURRAY R M. Quantized consensus by means of gossip algorithm [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 19 – 32.
- [11] MATEI I, BARAS J S. Performance evaluation of the consensus-based distributed subgradient method under random communication topologies [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(4): 754 – 771.
- [12] UGRINOVSKII V. Distributed robust filtering with  $H_\infty$  consensus of estimates [J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 1 – 13.
- [13] 宋海裕, 俞立, 胡鸿翔. 牵制控制下的多智能体系统群一致性 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(6): 765 – 772.  
(SONG Haiyu, YU Li, HU Hongxiang. Group consensus in multi-agent systems via pinning control [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 765 – 772.)
- [14] USTEBAY D, ORESHKIN B N, COATES M J, et al. Greedy Gossip with eavesdropping [J]. *IEEE Transactions on Signal Process*, 2010, 58(7): 3765 – 3776.
- [15] SARWATE A D, DIMAKIS A G. The impact of mobility on gossip algorithms [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(3): 1731 – 1742.
- [16] AYSAL T C, YILDIZ M E, SARWATE A D, et al. Broadcast Gossip algorithms for consensus [J]. *IEEE Transactions on Signal Process*, 2009, 57(7): 2748 – 2761.
- [17] FAGNANI F, ZAMPIERI S. Randomized consensus algorithms over large scale networks [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2008, 26(4): 634 – 649.
- [18] BOYD S, GHOSH A, PRABHAKAR B, et al. Randomized Gossip algorithms [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(6): 2508 – 2530.
- [19] DIMAKIS A D G, SARWATE A D, WAINWRIGHT M J. Geographic Gossip: efficient averaging for sensor networks [J]. *IEEE Transactions on Signal Process*, 2008, 56(3): 1205 – 1216.
- [20] CARLI R, FAGNANI F, FRASCA P, et al. Gossip consensus algorithms via quantized communication [J]. *Automatica*, 2010, 46(1): 70 – 80.
- [21] YUAN D M, XU S Y, ZHAO H Y, et al. Distributed average consensus via Gossip algorithm with real-valued and quantized data for  $0 < q < 1$  [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(9): 536 – 542.
- [22] USTEBAY D, CASTRO R, RABBAT M. Efficient decentralized approximation via selective Gossip [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(4): 805 – 816.
- [23] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. UK: Cambridge University Press, 1985.
- [24] XIAO L, BOYD S. Fast linear iterations for distributed averaging [C] // *The 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Hawaii: IEEE, 2003: 4997 – 5002.
- [25] POLYAK B. *Introduction to Optimization* [M]. New York: Optimization Software, Inc Press, 1987.
- [26] BOYD S, DIACONIS P, XIAO L. Fastest mixing Markov chain on a graph [J]. *SIAM Review, Problems and Techniques Section*, 2004, 46(4): 667 – 689.

#### 作者简介:

王长城 (1985–), 男, 博士研究生, 主要研究领域为多传感器信息融合, E-mail: w308101484@126.com;

戚国庆 (1977–), 男, 副研究员, 主要研究领域为随机状态估计与多传感器数据融合, E-mail: qiguqing@mail.njust.edu.cn;

李银伢 (1976–), 男, 副教授, 主要研究领域为机动目标跟踪、火力与指挥控制, E-mail: liyinya@mail.njust.edu.cn;

盛安冬 (1964–), 男, 研究员, 博士生导师, 主要研究领域为多源信息融合理论及应用, E-mail: shengandong@mail.njust.edu.cn.