

分数阶系统线性矩阵不等式稳定判据的改进与鲁棒镇定: $0 < \alpha < 1$ 的情况

梁舒, 彭程, 王永[†]

(中国科学技术大学自动化系, 安徽合肥 230027)

摘要: 针对确定的分数阶系统, 通过发掘其稳定区域与线性矩阵不等式(LMI)之间的联系, 提出改进的LMI稳定判据. 与已有结果相比, 该判据形式简洁, 求解变量少, 且不含复矩阵变量, 能够直接应用于控制器设计而不带来任何保守性, 克服了原判据存在的主要缺点. 然后基于该判据, 进一步研究了当分数阶系统具有多胞型不确定时的鲁棒镇定控制器的设计方法. 最后, 仿真结果表明该方法的有效性.

关键词: 分数阶系统; 不确定系统; 线性矩阵不等式; 鲁棒稳定; 鲁棒镇定

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Improved linear matrix inequalities stability criteria for fractional order systems and robust stabilization synthesis: The $0 < \alpha < 1$ case

LIANG Shu, PENG Cheng, WANG Yong[†]

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: For deterministic fractional order systems, an improved linear matrix inequality (LMI) stability criterion is derived by exploring the relation between the stability region and the LMI. It has more concise formulation and fewer variables than the existing results. Besides, the LMI criterion contains no complex matrix variable and is directly applicable to synthesis problems, without bringing forth any conservatism; thus this criterion overcomes the major drawback of the original criterion. Furthermore, for fractional order systems with polytopic-type uncertainties, a synthesis method is proposed to obtain the robust stabilization controller. Finally, numerical examples illustrate the validity of the approach.

Key words: fractional order systems; uncertain systems; linear matrix inequalities; robust stability; robust stabilization

1 引言(Introduction)

分数阶微积分是传统整数阶微积分的推广^[1], 近年来, 分数阶微积分已经作为一种数学工具, 受到控制领域众多学者的关注^[2-3]. 这主要因为: 一方面, 研究表明许多实际的物理对象更适合于分数阶描述, 如文献[4-5]; 另一方面, 在控制系统中引入分数阶控制器可以取得更好的控制效果, 其中典型的代表有Podlubny提出的 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器^[6], Oustaloup等人提出的CREONE控制器^[7-9], 等等.

稳定性是控制系统最基本且最重要的性能要求. 关于分数阶系统的稳定性分析, 以及当系统存在不确定时的鲁棒稳定性与鲁棒镇定, 目前已有许多研究成果. 文献[10-11]针对分数阶区间不确定系统给出了类Kharitonov边界定理的鲁棒稳定判定方法; 文献[12-13]给出了基于作图的分析方法. 这些方法能够对系统的鲁棒稳定性进行分析, 但在指导控制器设计上还存在许多困难之处^[14]. 而近年来发展起来

的基于线性矩阵不等式(LMI)的分析与综合方法, 能够有效地克服上述缺点, 并且控制系统的性能以及设计控制器的计算过程均有所保证, 该方法已成为分数阶系统控制的主流方法之一. 关于这方面的研究绝大多数借鉴于文献[15-17]中的奠基性成果.

尽管分数阶系统的鲁棒控制已经取得了许多进展, 然而还有不完善之处. 一方面, 目前关于分数阶不确定系统的研究大多只考虑区间不确定, 而这仅仅是参数不确定中的一种, 其他常见的类型, 如多胞型, 还未见相关的研究成果. 事实上, 从传统整数阶多胞型不确定系统的研究成果来看, 这类不确定问题要更复杂更困难^[18]. 另一方面, 在已有的奠基性的LMI结果中, 为了处理系统稳定区域为非凸区域的情形, 直接在LMI中引入了复矩阵变量^[16]. 复矩阵变量不但使求解带来不便, 而且在控制器的设计中需要强制复矩阵退化为实矩阵, 因而带来较大程度的保守性, 甚至可能得不到可行解.

鉴于上述情况,本文主要研究多胞型不确定分数阶系统的鲁棒镇定问题.为此,首先对原始的LMI稳定判据进行了改进.针对系统稳定区域为非凸区域的情形,本文找出该区域与特定矩阵之间的联系,再通过细致的分析与推导,给出简洁的LMI判定条件,避免了复矩阵变量,克服了求解不便及保守性大的缺点.然后,借助于该条件,进一步给出针对多胞型不确定分数阶系统鲁棒镇定的LMI方法.最后,仿真实例证实了该方法的优势和有效性.

符号说明:对于矩阵 X ,其转置与共轭转置分别为 X^T 和 X^* ; $X > 0$ ($X < 0$)表示 X 正定(负定).符号 $\text{Sym}\{X\}$ 代表 $X + X^*$. $\mathbb{R}^{m \times n}$ 代表 $m \times n$ 维实矩阵集合. j 代表虚数单位.

2 问题描述与预备知识(Problem formulation and preliminaries)

2.1 多胞型不确定分数阶系统(Fractional order system with polytopic-type uncertainties)

考虑如下状态空间描述的不确定分数阶系统:

$$D^\alpha x = \tilde{A}x + \tilde{B}u, \quad (1)$$

其中分数阶微分 D^α 采用Caputo微分算子^[1],因为其拉氏变换的初值条件具有明确的物理意义,它的定义为

$$D^\alpha f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha - m)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - m}} d\tau,$$

其中:整数 m 满足 $m - 1 \leq \alpha < m$,系统矩阵对 $\tilde{A}|\tilde{B}$ 具有多胞型不确定,即 $\tilde{A}|\tilde{B} \in \Omega$.其中 Ω 是由 r 个矩阵对 $A_1|B_1, A_2|B_2, \dots, A_r|B_r$ 张成的多胞不确定集合,定义为

$$\Omega \triangleq \{\tilde{A}|\tilde{B} : \exists \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \beta_i = 1,$$

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^r \beta_i A_i, \tilde{B} = \sum_{i=1}^r \beta_i B_i\},$$

$A_i|B_i$ 称为 Ω 的顶点.当 Ω 仅含1个顶点 $A|B$ 时,系统(1)退化为确定的分数阶系统 $D^\alpha x = Ax + Bu$.

2.2 预备知识(Preliminaries)

引理 1 设 $k \geq 0, x, y$ 为实数,则“ $kx + y < 0$ 或 $kx - y < 0$ ” \Leftrightarrow “存在 $-1 < \gamma < 1$ 使得 $kx + \gamma y < 0$ ”(注:当 $k = +\infty$ 时,“ $kx + y < 0$ 或 $kx - y < 0$ ”退化为“ $x < 0$ ”).

证 “ \Rightarrow ”若 $kx + y < 0$,则 $\lim_{\gamma \rightarrow -1^-} kx + \gamma y = kx + y < 0$.若 $kx - y < 0$,则 $\lim_{\gamma \rightarrow -1^+} kx + \gamma y = kx - y < 0$,从而总存在 $-1 < \gamma < 1$ 使得 $kx + \gamma y < 0$.
“ \Leftarrow ”设存在 $-1 < \gamma < 1$ 使得 $kx + \gamma y < 0$.则若 $y < 0$,有 $kx + y < kx + \gamma y < 0$;若 $y > 0$,有 $kx - y < kx + \gamma y < 0$.从而一定有 $kx + y < 0$ 或 $kx - y < 0$.
证毕.

引理 2 设 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix} > 0$,则 $X > 0$,且对任意非零行向量 $v \in \mathbb{C}^n$,有 $-1 < v(jY)v^*/vXv^* < 1$.

证 因为正定矩阵的顺序主子式均大于零,从而 $X > 0$.又 $\begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix} > 0$ 等价于复矩阵 $X + jY > 0$,对于任意非零行向量 $v \in \mathbb{C}^n$, $v(X + jY)v^* = vXv^* + v(jY)v^* > 0$,且 $vXv^* > 0$, $v(jY)v^* = (v(jY)v^*)^* \in \mathbb{R}$,故 $1 + v(jY)v^*/(vXv^*) > 0$.又注意到 $X - jY = (X + jY)^T > 0$,同理有 $1 + v(-jY)v^*/(vXv^*) > 0$.本文综合两个方面,有 $-1 < v(jY)v^*/(vXv^*) < 1$. 证毕.

引理 3^[19] 分数阶系统 $D^\alpha x = Ax$ 稳定的充分必要条件是 $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha\pi/2$.其中 $\text{spec}(A)$ 是矩阵 A 的谱集.

注 1 引理 3 刻划了分数阶系统关于系统矩阵谱分布的稳定区域.令 $\mathcal{D} \triangleq \{s \in \mathbb{C} : |\arg(s)| > \alpha\pi/2\}$,再令 $k = \tan(\alpha\pi/2)$.当 $1 \leq \alpha < 2$ 时,稳定区域 \mathcal{D} 退化为一个凸区域: $\mathcal{D} = \{s = x + jy : kx + y > 0 \text{ 且 } kx - y > 0\}$.它是常见的LMI区域,因此该情形下的稳定,鲁棒稳定与鲁棒镇定问题是相对容易的.而当 $0 < \alpha < 1$ 时,其稳定区域 \mathcal{D} 为复平面上的非凸区域: $\mathcal{D} = \{s = x + jy : kx + y < 0 \text{ 或 } kx - y < 0\}$,相应的问题也更具挑战性.本文致力于研究解决 $0 < \alpha < 1$ 情形下的相应问题.后文中的分数阶系统及其稳定区域 \mathcal{D} 均为 $0 < \alpha < 1$ 的情形.

3 主要结果(Main results)

首先,针对确定的分数阶系统,本文给出简洁的LMI稳定判据.

定理 1 对于分数阶系统 $D^\alpha x = Ax, 0 < \alpha < 1, A$ 为 n 维方阵.令 $k = \tan(\alpha\pi/2)$,则分数阶系统稳定的充分必要条件是:存在

$$P \in \{kX + Y : X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix} > 0\},$$

使得 $\text{Sym}\{AP\} < 0$.

证 充分性.设 λ 为 A 的特征值, v 为相应的左特征向量,且 $\|v\|_2 = 1$,即 $vA = \lambda v$.则

$$vAv^* = \lambda \triangleq x_\lambda + jy_\lambda, vA^T v^* = (v^*Av)^* = x_\lambda - jy_\lambda.$$

又因为 $\text{Sym}\{AP\} < 0$,有 $0 > v\text{Sym}\{AP\}v^* = \text{Sym}\{vPv^*\lambda\} = \text{Sym}\{vXv^*k\lambda\} + \text{Sym}\{vYv^*\lambda\} = 2vXv^*kx_\lambda + 2v(jY)v^*y_\lambda = 2vXv^*(kx_\lambda + (v(jY)v^*/(vXv^*))y_\lambda)$.于是 $kx_\lambda + \gamma y_\lambda < 0, \gamma = v(jY)v^*/(vXv^*)$.根据引理2, $-1 < \gamma < 1$.再根据引理1,有 $kx_\lambda + y_\lambda < 0$ 或 $kx_\lambda - y_\lambda < 0$.于是, A 的特征值均在 \mathcal{D} 中,即系统稳定.

必要性. 设系统稳定. 首先, 如果 A 为实对角阵块, 即 $A = \text{diag}\{W_1, W_2, \dots, W_{h_0}, W_{h_0+1}, \dots, W_h\}$, 其中: $W_l, 1 \leq l \leq h_0$ 是形式为 $\begin{bmatrix} x_l & y_l \\ -y_l & x_l \end{bmatrix}$ 的二维阵, 而 $W_l, h_0 + 1 \leq l \leq h$ 为标量 x_l . 则 A 的全部特征值为相应的 $x_l \pm jy_l, 1 \leq l \leq h_0$ 和 $x_l, h_0 + 1 \leq l \leq h$. 由于 A 是 \mathcal{D} 稳定的, 故对 A 的任意特征值 $x_l + jy_l$ (实特征值相当于 $x_l + j0$), 有 $kx_l + y_l < 0$ 或 $kx_l - y_l < 0$. 从而根据引理1, 存在 $-1 < \gamma_l < 1$, 使得 $kx_l + \gamma_l y_l < 0, l = 1, 2, \dots, h$. 令

$$V_l = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_l \\ \gamma_l & 0 \end{bmatrix}, & 1 \leq l \leq h_0, \\ 0, & h_0 + 1 \leq l \leq h. \end{cases}$$

易验证 $I_2 + jV_l > 0, 1 \leq l \leq h_0$. 则取 $X_0 = I, Y_0 = \text{diag}\{V_1, V_2, \dots, V_h\}$, 可以验证 $X_0 + jY_0 > 0$. 取 $P_0 = kX_0 + Y_0$, 则

$$\begin{aligned} \text{Sym}\{AP_0\} &= \text{Sym}\{AP_0\} = \\ &\text{Sym}\{\text{diag}\{W_1(kI_2 + V_1), \dots, \\ &W_{h_0}(kI_2 + V_{h_0}), kW_{h_0+1}, \dots, kW_h\}\} = \\ &\text{diag}\left\{ \begin{bmatrix} kx_1 + \gamma_1 y_1 & \\ & kx_1 + \gamma_1 y_1 \end{bmatrix}, \dots, \right. \\ &\left. \begin{bmatrix} kx_{h_0} + \gamma_{h_0} y_{h_0} & \\ & kx_{h_0} + \gamma_{h_0} y_{h_0} \end{bmatrix}, \right. \\ &\left. kx_{h_0+1}, \dots, kx_h \right\} < 0. \end{aligned}$$

而对于一般的实方阵 A , 设其全部特征值为 $x_l \pm jy_l, 1 \leq l \leq h_0$ 和 $x_l, h_0 + 1 \leq l \leq h$. 则存在非奇异的实矩阵序列 $\{T_i\}_{i=1,2,\dots}$ 使得 $\lim_{i \rightarrow +\infty} T_i^{-1}AT_i = A$. 又由 $\text{Sym}\{AP_0\}$ 关于 A 连续, 有 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \text{Sym}\{T_i^{-1}AT_iP_0\} = \text{Sym}\{AP_0\} < 0$. 从而存在充分大的 \tilde{i} , 并且使得 $\text{Sym}\{T_{\tilde{i}}^{-1}AT_{\tilde{i}}P_0\} < 0$. 本文取 $X = T_{\tilde{i}}X_0T_{\tilde{i}}^T, Y = T_{\tilde{i}}Y_0T_{\tilde{i}}^T$, 则 $X + jY = T_{\tilde{i}}(X_0 + jY_0)T_{\tilde{i}}^T > 0$, 或等价地 $\begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix} > 0$. 令 $P = kX + Y$, 则 $\text{Sym}\{AP\} = T_{\tilde{i}}\text{Sym}\{T_{\tilde{i}}^{-1}AT_{\tilde{i}}P_0\}T_{\tilde{i}}^T < 0$. 必要性得证. 证毕.

直接运用定理1的结果, 本文有下面关于控制器设计的LMI方法:

推论 1 分数阶系统 $D^\alpha x = Ax + Bu, 0 < \alpha < 1, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 能镇定的充分必要条件是: 存在 $P \in \{kX + Y : X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix} > 0\}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 使得 $\text{Sym}\{AP + BQ\} < 0$, 其中 $k = \tan(\alpha\pi/2)$. 且可以进一步取反馈控制 $u = Kx$, 其中 $K = QP^{-1}$.

证 只需结合定理1并注意到 P 可逆即可. P 可逆是因为: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, 有 $x^T Px = x^T(kX + Y)x = kx^T Xx > 0$, 故 P 没有零特征值. 证毕.

注 2 相比于文献[16]中的LMI, 虽然二者都是判定分数阶系统稳定性的充要条件, 当系统矩阵 A 的维数为 n 时, 文献[16]需要 $2n^2$ 个决策变量, 而定理1给出的LMI只需要 n^2 个决策变量, 因此降低了计算复杂度.

注 3 从推论1可以看出, 针对确定的分数阶系统, 该方法不会带来控制器设计的保守性. 而文献[16]给出的LMI条件在指导控制器设计时, 需要额外的强制条件, 使得设计方法具有保守性. 因此, 基于定理1给出的LMI条件来研究不确定分数阶系统, 可以使控制器设计的保守性在一定程度上有所改善.

下面, 本文进一步研究多胞型不确定分数阶系统(1)的鲁棒镇定问题.

定理 2 对于分数阶多胞不确定系统 $D^\alpha x = \tilde{A}x + \tilde{B}u$ 如式(1)所述, 则系统可以鲁棒镇定的充分条件是存在 $P \in \{kX + Y : X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix} > 0\}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 使 $\text{Sym}\{A_i P + B_i Q\} < 0, i = 1, 2, \dots, r$. 其中 $A_i|B_i$ 是 $\tilde{A}|\tilde{B}$ 所属的多胞型不确定集合 Ω 的顶点. 进一步, 鲁棒反馈镇定控制律可取 $u(t) = Kx(t)$, 其中增益矩阵为 $K = QP^{-1}$.

证 对任意 $A|B \in \Omega$, 存在 $\beta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r, \sum_{i=1}^r \beta_i = 1$, 使得

$$A = \sum_{i=1}^r \beta_i A_i, B = \sum_{i=1}^r \beta_i B_i.$$

由已知条件, 存在 $P > 0, Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 使得

$$\begin{aligned} \text{Sym}\{(A + BK)P\} &= \\ \sum_{i=1}^r \beta_i \text{Sym}\{A_i P + B_i Q\} &< 0, \end{aligned}$$

则根据定理1, 闭环系统是稳定的. 从而该不确定系统在给出的控制律下能够鲁棒镇定. 证毕.

定理2针对多胞型不确定分数阶系统, 给出了鲁棒镇定控制律设计的LMI方法. 通过求出相应LMI条件的可行解, 即可得到鲁棒性较好的控制律.

4 仿真例子(Numerical example)

例 1 本例针对一个确定的分数阶系统设计反馈镇定控制律, 分别采用文献[16]给出的方和法本文给出的方法, 比较设计结果. 考虑分数阶系统 $D^\alpha x = Ax + Bu, \alpha = 0.3$, 系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

该开环系统的特征值为 $\lambda_{1,2} = 6 \pm j$, 由于 $|\arg(\lambda_{1,2})|$

$< \alpha\pi/2$, 故该系统不稳定. 采用文献[16]的方法求解得到的反馈镇定增益矩阵为 $K = [-1525.5 \ 1284.7]$, 此时闭环系统矩阵为

$$A_c = \begin{bmatrix} -1519.5 & 1285.7 \\ -1526.5 & 1290.7 \end{bmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_{c1} = -222.4$, $\lambda_{c2} = -6.3$. 采用本文的方法求解得到的反馈镇定增益矩阵为 $\hat{K} = [-9.5 \ 7]$, 此时闭环系统矩阵为

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} -3.5 & 8 \\ -10.5 & 13 \end{bmatrix},$$

其特征值为 $\hat{\lambda}_{c1,2} = 4.7 \pm 4j$. 容易验证 $|\arg(\lambda_{1,2})| > \alpha\pi/2$ 且 $|\arg(\hat{\lambda}_{1,2})| > \alpha\pi/2$, 这说明两种方法设计出来的控制器都能镇定原系统. 但前者将系统极点配置得过远, 而后的极点仍在可接受的范围内, 因此本文的方法很好地改善了原有结果的保守性. 另外, 比较增益矩阵可以看出, 后者的控制代价小, 控制器更易于工程实现.

例 2 本例针对一个不稳定的多胞型不确定分数阶系统, 采用定理2给出的方法, 设计控制器使闭环系统鲁棒稳定. 考虑多胞不确定分数阶系统 $D^\alpha x = \tilde{A}x + \tilde{B}u$, $\alpha = 0.5$, 系统矩阵对 $\tilde{A}|\tilde{B}$ 所属的不确定集合 Ω 由下面3个矩阵对张成:

$$A_1|B_1 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.9 \\ -4.5 & 2.8 \end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2|B_2 = \begin{bmatrix} -2.5 & 7.5 \\ -3 & 6.5 \end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3|B_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

随机选取不确定集合中的10个矩阵对, 并给定初始状态 $x(0) = [1 \ 1]^T$, 输入 $u(t) = 0$, 则各系统状态响应如图1-2所示.

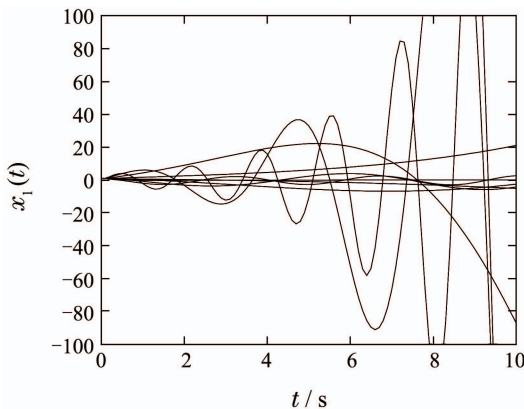


图 1 开环系统状态 x_1 的变化曲线

Fig. 1 State x_1 curve of the open loop system

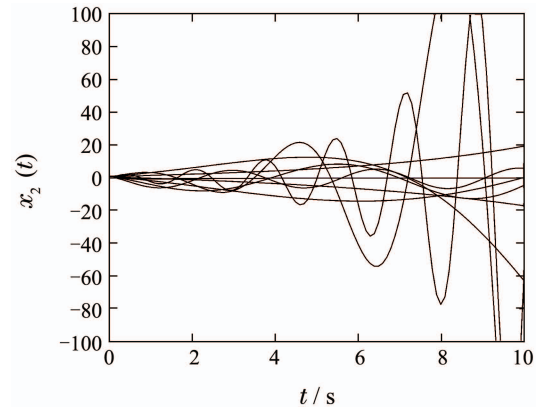


图 2 开环系统状态 x_2 的变化曲线

Fig. 2 State x_2 curve of the open loop system

由图1-2可知, 该多胞不确定分数阶系统是不稳定的. 根据定理2, 求得状态反馈增益矩阵 $K = [-2.4066 \ 7.6256]$. 令初始状态 $x(0) = [1 \ 1]^T$, 输入 $u(t) = Kx(t)$, 再随机选取10个矩阵对, 各系统状态的变化曲线如图3-4所示.

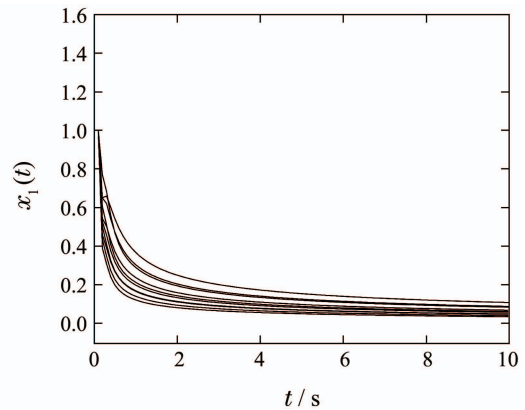


图 3 闭环系统状态 x_1 的变化曲线

Fig. 3 State x_1 curve of the closed loop system

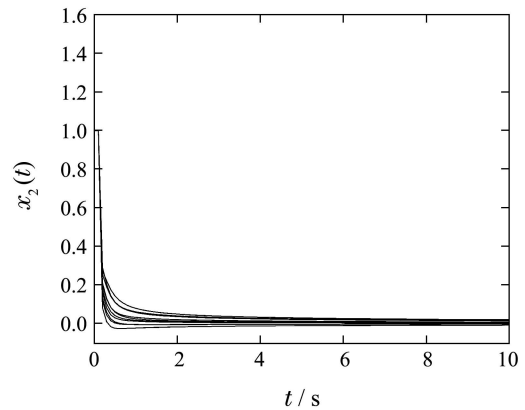


图 4 闭环系统状态 x_2 的变化曲线

Fig. 4 State x_2 curve of the closed loop system

可见, 本文采用的状态反馈控制律可以镇定该多胞型不确定不稳定分数阶系统. 另一方面, 注意到加入反馈后闭环系统矩阵为 $\tilde{A}_c = \tilde{A} + \tilde{B}K$, 画出开环

系统和闭环系统矩阵的特征值分布图及稳定区域边界, 如图5所示。

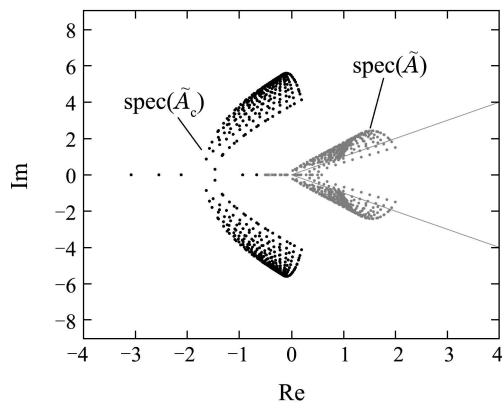


图5 开环系统和闭环系统矩阵特征值分布

Fig. 5 Eigenvalues areas of the open and the closed loop system matrices

图5中, 边界左边的开区域为分数阶系统的稳定区域, 右边则为不稳定区域. 灰点为开环系统矩阵的特征值分布, 而黑点为闭环系统矩阵的特征值分布. 从图5中可以清楚地看出, 反馈前分数阶系统是不稳定的, 而反馈后闭环分数阶系统矩阵特征值分布在稳定区域内, 它是鲁棒稳定的。

5 结论(Conclusions)

本文针对分数阶系统提出了简洁的LMI稳定判据, 改善了已有结果保守性大的缺点. 基于该判据, 进一步研究了多胞型分数阶不确定系统的鲁棒镇定问题. 仿真结果表明用该方法设计出的控制器不仅能够有效地镇定不确定分数阶系统, 而且保守性小, 控制代价小, 更适合于工程实现。

参考文献(References):

- [1] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations* [M]. New York: Academic Press, 1999.
- [2] DAS S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls* [M]. London: Springer Verlag, 2008.
- [3] MONJE C M, CHEN Y Q, VINAGRE B M, et al. *Fractional-Order Systems and Controls—Fundamentals and Applications, Advanced Industrial Control Series* [M]. London: Springer-Verlag, 2010.
- [4] DAS S. *Functional Fractional Calculus* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- [5] ROSSIKHIN Y A, SHITIKOVA M V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2010, 63(1): 010801-1-1-010801-52.
- [6] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208-214.
- [7] OUSTALOUP A, BANSARD M. First generation CRONE control [C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. Le Touquet: IEEE, 1993, 2: 130-135.
- [8] OUSTALOUP A, MATHIEU B, LANUSSE P. Second generation CRONE control [C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. Le Touquet: IEEE, 1993, 2: 136-142.
- [9] LANUSSE P, OUSTALOUP A, MATHIEU B. Third generation CRONE control [C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. Le Touquet: IEEE, 1993, 2: 149-155.
- [10] AHN H S, CHEN Y Q. Necessary and sufficient stability condition of fractional-order interval linear systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2985-2988.
- [11] 高哲, 廖晓钟. 区间分数阶系统的鲁棒稳定性判别准则: $0 < \alpha < 1$ 情况 [J]. *自动化学报*, 2012, 38(2): 175-182. (GAO Zhe, LIAO Xiaozhong. Robust stability criteria for interval fractional-order systems: The $0 < \alpha < 1$ case [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(2): 175-182.)
- [12] MOORNANI K A, HAERI M. On robust stability of LTI fractional-order delay systems of retarded and neutral type [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 362-368.
- [13] TAN N, OZGUVEN F, OZYET M K. Robust stability analysis of fractional order interval polynomials [J]. *ISA Transactions*, 2009, 48(2): 166-172.
- [14] 梁涛年, 陈建军. 分数阶参数不确定系统的 PI^λ 控制器 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(3): 400-406. (LIANG Taonian, CHEN Jianjun. Design of fractional order PI^λ controller for fractional order systems with uncertain parameters [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 400-406.)
- [15] SABATIER J, MOZE M, FARGES C. LMI stability conditions for fractional order systems [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, 59(5): 1594-1609.
- [16] LU J G, CHEN Y Q. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems with the fractional order alpha: The $0 < \alpha < 1$ case [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(1): 152-158.
- [17] LU J G, CHEN G R. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: An LMI approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1294-1299.
- [18] LEE D H, PARK J B, JOO Y H. A less conservative LMI condition for robust D-stability of polynomial matrix polytopes — A projection approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 868-873.
- [19] MATIGNON D. Stability properties for generalized fractional differential systems [J]. *ESAIM: Proceedings*, 1998, 5: 145-158.

作者简介:

梁舒 (1987-), 男, 博士研究生, 主要从事分数阶系统鲁棒控制与数值方法研究, E-mail: shuliang@mail.ustc.edu.cn;

彭程 (1978-), 男, 博士, 副教授, 主要从事分数阶系统辨识与控制研究, E-mail: pengc@ustc.edu.cn;

王永 (1962-), 男, 教授, 博士生导师, 2001年由中国科学院大学“通信与信息系统”博士后出站, 已在国内外发表学术论文200余篇, 目前研究方向为振动主动控制、分数阶系统, E-mail: yongwang@ustc.edu.cn.