DOI: 10.7641/CTA.2013.20737

非线性系统模型预测控制若干基本特点与主题回顾

何德峰[1†], 丁宝苍[2], 于树友[3]

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023; 2. 西安交通大学 自动化系, 陕西 西安 710049;
3. 吉林大学 控制科学与工程系, 吉林 长春 130025)

摘要: 随着线性系统模型预测控制的大量成功应用, 基于非线性模型的预测控制简称非线性预测控制(NMPC)在近20年来引起了广泛关注, 并取得了丰富的研究成果. 本文在阐述NMPC基本原理和特点的基础上, 分别从优化可行性、稳定性、鲁棒性、优化求解、吸引域等主题出发, 分析并总结NMPC的研究现状. 最后, 在指出NMPC有待进一步深入研究问题的同时, 展望当前NMPC的一些研究方向.

关键词: 非线性系统; 模型预测控制; 可行性; 稳定性; 鲁棒性; 优化求解; 吸引域

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Review of fundamental properties and topics of model predictive control for nonlinear systems

HE De-feng[1†], DING Bao-cang[2], YU Shu-you[3]

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China;
2. Department of Automation, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China;
3. Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun Jilin 130025, China)

Abstract: With the successful applications of model predictive control for linear systems, predictive control for nonlinear models (NMPC) has received wide attention and achieved rich results in the last two decades. Based on the fundamental principle and characteristics of NMPC, the state of the art of NMPC is reviewed from the topics of feasibility, stability, robustness, optimization solution to regions of attraction, respectively. Open problems concerning NMPC are also discussed.

Key words: nonlinear systems; model predictive control; feasibility; stability; robustness; optimization solution; regions of attraction

1　引言(Introduction)

模型预测控制(model predictive control, MPC)具有显式处理系统约束和在不确定环境下进行优化控制的共性机理, 使其成为继PID控制之后在控制工程(如石油化工、轻纺、电力电子、机电工程、通讯网络等)中获得广泛应用和认可的先进控制技术之一. 然而, 早期MPC理论研究曾落后于其应用研究, 直到20世纪90年代, 通过引入传统最优控制的成果才使其理论研究有了长足进步, 形成了以最优控制理论为基础的MPC稳定性与鲁棒性研究的系统方法. 由于非线性系统复杂多样, 基于非线性预测模型的预测控制(nonlinear model predictive control, NMPC)无论是理论研究还是应用研究都远不及线性系统模型预测控制(linear model predictive control, LMPC)成熟, 特别是NMPC的稳定性、鲁棒性和优化求解等问题一直是相关学者共同关注的焦点.

目前, 国内外关于MPC的理论研究和应用研究都取得了阶段性成果, 涌现出了一批优秀的综述性文献和论著. 例如: 文献[1–4]系统总结了NMPC稳定性、鲁棒性和最优性的分析设计方法, 提出了重要的“三要素”公理[1]; 文献[5–8]则综述了2007年前NMPC研究所取得的主要理论进展; 文献[9–10]着重分析了MPC在工业控制中的应用与发展方向; 而文献[11–12]回顾了NMPC优化求解的研究成果, 以及论著[13–17]详细论述了MPC基本原理、理论成果和工业应用等内容.

尽管目前MPC理论研究和应用研究成果丰富, 但本文并不对所有研究成果加以回顾和总结. 本文仅以集总参数非线性系统预测控制为分析对象, 在阐述NMPC基本原理的基础上, 着重从优化可行性、稳定性、鲁棒性、优化求解、吸引域等主题出发, 归纳NMPC若干基本特点、回顾NMPC上述主题研究

收稿日期: 2012−07−02; 收修改稿日期: 2013−01−03.
†通信作者. Tel.: +86 0571-85290601.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60904040); 高等学校博士点专项科研基金资助项目(20093317120002).

现状, 从理论角度总结NMPC研究成果. 最后, 指出NMPC有待进一步深入研究的问题, 同时对当前NMPC热点研究方向进行展望.

2 NMPC基本原理与特点(Fundamental principle and properties of NMPC)

2.1 基本原理(Fundamental principle)

本文以离散时间状态空间模型为例, 说明非线性模型预测控制的基本原理. 考虑非线性系统

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k), \tag{1}$$

其中: 系统状态$x \in \mathbb{R}^n$, 控制输入$u \in \mathbb{R}^m$, 不可测扰动$w \in \mathbb{R}^r$, 采样时刻$k = 0, 1, \cdots$和函数$f(\cdot,\cdot,\cdot)$是定义在原点邻域内的光滑向量场, 且$f(0,0,0) = 0$. 相应地, 无扰动标称模型为

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, 0) \triangleq f(x_k, u_k). \tag{2}$$

假设原点是系统(2)的平衡点, 且状况完全可量测.

考虑系统(1)和(2)的状态约束和控制约束如下:

$$x_k \in X \subseteq \mathbb{R}^n,\ u_k \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

其中X和U分别是包含原点为内点的闭凸集和紧凸集. 由于扰动w通常不可测, 本文采用标称模型(2)叙述NMPC的基本原理, 其组成如图1所示. 图中: $N > 0$为预测时域, $x_{i|k}$和$u_{i|k}$为在k时刻对未来第$k+i$时刻预测的状态变量和控制变量.

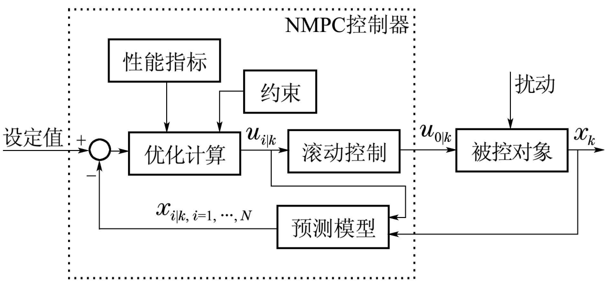

图 1 NMPC基本组成
Fig. 1 Basic framework of NMPC

考虑约束系统(2)−(3), 则NMPC基本问题定义为如下一有限时域最优控制问题(finite horizon optimal control problem, FHOCP):

$$V(k) = \min_{u(k;N)} J(x_k), \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & x_{i+1|k} = f(x_{i|k}, u_{i|k}),\ x_{0|k} = x_k, \\ & x_{i|k} \in X,\ u_{i|k} \in U, \\ & \forall i = 0, 1, \cdots, N-1, \end{aligned} \tag{4b}$$

其中: 目标函数$J(x)$为有限时域N内的控制性能函数, 通常是定义在原点某邻域内的非负连续函数, 且$J(0) = 0$; $V(k)$为最优性能指标函数, 通常称为值函数; $x_k \in X$为当前时刻k的状态量. 在NMPC基本定义中, 通常$J(x)$是有限个正定函数之和, 及约束除式(3)外无任何附加约束. 在每个时刻k, 定义FHOCP在线优化变量即决策变量$u(k;N)$为

$$u(k;N) = \{u_{0|k}, \cdots, u_{N-1|k}\}. \tag{5}$$

不失一般性, 取控制时域N_c与预测时域N_p相等, 即$N_c = N_p = N$. 当$N_c < N_p$时, 可定义类似优化问题, 详见文献[10]. 如果FHOCP优化可行, 可得最优控制序列$u^*(k;N)$, 将该序列的第1个控制量$u^*_{0|k}$作用于实际控制系统; 在下一时刻$k+1$, 用系统状态量x_{k+1}更新FHOCP的初始条件, 再重复整个优化执行过程, 实现NMPC滚动优化控制.

2.2 基本特点(Fundamental properties)

考查NMPC最优控制问题的原始描述(4), 可以得到如下几个基本特点:

1) 相邻时刻在线优化问题的信息不重合.

NMPC在每个时刻根据系统当前运行状态信息计算最优控制律, 故FHOCP在本质上是一个动态的有限时域最优控制问题[1,3]. 显然, NMPC在线运行的首要条件是FHOCP在每个时刻都是优化可行的, 即至少存在一个满足约束条件(4b)的控制序列. 但由于采用滚动优化原理, FHOCP在k时刻的优化子问题与$k+1$时刻的优化子问题信息不重合, k时刻优化可行并不意味着$k+1$时刻的优化可行, 特别是对不确定性系统更是如此. 因此, 在线优化问题信息滚动更新增加了NMPC在线应用的不确定性风险.

2) 非凸的非线性优化计算.

当系统(1)是线性的, 且目标函数$J(x)$是二次型正定函数时, FHOCP是一个典型的二次规划问题. 但对于非线性系统, 由于非线性方程作为等式约束存在, 通常使得FHOCP成为一个非凸的非线性规划问题, 即使$J(x)$是二次型函数[11–12]. 对高维非线性系统, 要在有限采样时间内在线求解FHOCP是很困难的. 因此, FHOCP高效求解计算是NMPC成功应用的关键要素之一, 目前也是理论研究进展最慢、但最具应用意义的方向之一[18].

3) 有限时域的最优控制.

NMPC本质上是一个有限时域的最优控制问题, 用一个有限时域性能指标替代传统最优控制的无穷时域性能指标[1]. 传统最优控制为获得最优反馈控制律通常需要求解如下的Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)差分方程(连续系统对应HJB偏微分方程):

$$\begin{cases} J^*(x_k) = \min\limits_{u(\cdot)}\{l(x_k, u_k) + J^*(x_{k+1})\} = \\ \min\limits_{u(\cdot)}\{l(x_k, u_k) + J^*(f(x_k, u_k))\}, \\ J(x_k, u_k) = \sum\limits_{i=k}^{\infty} l(x_i, u_i), \end{cases} \tag{6}$$

其中: $J^*(x)$为无穷时域性能函数$J(x,u)$的最优值函数, $u(\cdot)=\{u_k(x_k),u_{k+1}(x_{k+1}),\cdots\}$为控制序列, $l(x,u)$为单步性能(stage cost)函数, 满足$l(0,0)=0$. 对于一般非线性系统, 求解HJB方程非常困难, 甚至无解. 一种可行的替代方法是在每个时刻在线求解一个以系统当前状态信息为初始条件的有限时域开环最优控制问题, 即采用NMPC方法[19]. 然而, 有限时域的性能最优不保证闭环系统的稳定性, 即采用任意有限时域性能指标的NMPC策略并不能保证闭环系统的稳定性和不确定系统的鲁棒性[1,3].

4) 开环优化与闭环控制.

为降低在线优化的计算量, 原始NMPC采用开环优化模式, 即$u_{i|k}=u_{i|k}(x_{0|k})$, $i=0,\cdots,N-1$. 另一方面, NMPC以当前状态x_k为FHOCP的初始条件, 得到的控制序列$u^*(k;N)$是x_k的函数, 从而当前控制$u_{0|k}$是x_k的函数. 因此, NMPC是一种基于开环优化的闭环状态反馈控制策略. 尽管开环优化可以降低FHOCP的在线计算量, 但所得控制器通常较保守, 而且对不确定性系统, 增加了FHOCP滚动优化不可行的风险[1,20].

5) 约束显式处理和控制律隐式定义.

NMPC的一个显著优点是在控制器设计阶段可以显式地处理系统的各种软硬约束, 即系统约束显式地出现在FHOCP的约束条件(4b)中. 但NMPC控制量是在每个时刻在线计算FHOCP得到的, 因此很难得到NMPC控制律的解析解, 除非当FHOCP是一个二次规划或线性规划问题时, 可以用多参数规划法得到其分段仿射控制解[21]. 这个特点引起的一个理论问题是如何刻画或估计NMPC的吸引域, 而这关系到NMPC在线运行的可靠性问题[19,22].

上述5个基本特点以及由此产生的难点或问题推动着当前NMPC研究的发展. 下面在分析这些难点的同时回顾总结NMPC现有的研究成果.

3 NMPC优化可行性(Optimization feasibility of NMPC)

NMPC在线运行的先决条件是FHOCP在每个时刻至少存在一个可行解, 即FHOCP优化可行. 然而, NMPC相邻时刻的信息不重合, 使得FHOCP在初始时刻的可行性并不能保证其在后续时刻都存在可行解, 即原始NMPC不具有递推可行性. 对于不确定系统, 开环优化模式又进一步增加了FHOCP优化不可行的可能[20].

为建立FHOCP的递推可行性, 文献[19, 23]提出了双模变时域控制方法, 即在平衡点某邻域内采用一个稳定的局部控制律, 而在邻域外用NMPC策略. 此时, 时域N定义为FHOCP的优化变量, 在初始时刻计算能使闭环系统状态在N步内进入该平衡点邻域的最小时域, 再在后续时刻逐次递减控制时域和预测时域, 则由最短时域的性质可保证NMPC在所有时刻都是优化可行的. 当前双模方法在NMPC研究得到了进一步发展, 提出了多模预测控制方法[24–25].

不变集理论[26]是NMPC优化可行性研究中又一个重要方法[1,3]. 考查原始FHOCP, 通过对其附加一个不变集Ω约束, 即终端状态约束集[27–28]

$$x_{N|k}\in\Omega, \tag{7}$$

并在Ω内构造一个状态反馈控制$\pi:\Omega\rightarrow U$满足$\pi(0)=0$. 于是, 利用k时刻的可行解$u(k;N)$构造FHOCP在$k+1$时刻的备选序列

$$u(k+1;N)=\{u_{1|k},\cdots,u_{N-1|k},\pi(x_{N|k})\}. \tag{8}$$

则由不变集性质[26]可知, 序列(8)是FHOCP在$k+1$时刻的一个可行解. 从而递推可得NMPC在所有时刻都至少存在一个可行控制解. 对于不确定性系统, 利用鲁棒不变集理论可以得到类似的优化可行性结果[1,4].

在NMPC应用和数值计算研究中, 软化约束(soften constraint)技术也是经常采用, 且是非常有效的保证NMPC递推优化可行的方法[29]. 考虑到实际控制系统, 约束通常分为硬约束(hard constraint)和软约束(soft constraint). 硬约束如执行器的饱和约束是不可以违反的, 而软约束如出于经济效益等方面考虑的附加约束并不要求严格满足. 因此, 为保证NMPC递推优化可行的一个方法就是对软约束引入松弛因子以提高NMPC的优化可行性, 即软化系统软约束处理方法[11,30].

4 NMPC闭环稳定性(Closed-loop stability of NMPC)

相邻时刻的信息不重合和有限时域控制使得NMPC在各个时刻的性能函数不具有确定的不等式关系, 由此造成NMPC闭环稳定性分析的困难. 对于线性MPC, 可通过研究设计参数(如预测时域、控制时域、加权系数及目标函数)与系统性能的定性关系保证闭环系统的稳定性[3,15]. 但这种分析方法更多的是基于工程经验而缺乏理论支持, 并因此受到一些学者的批评[31]. 而对于非线性系统, 很难建立NMPC设计参数与闭环稳定性间的定性或者定量关系. 因此, 直到20世纪90年代, 研究者开始引入了最优控制理论的成果, 采用Lyapunov方法研究NMPC新算法及其闭环稳定性成立条件. 这也是目前NMPC算法设计及其稳定性分析中所采用的最主要方法.

4.1 基于值函数单调递减的稳定性分析(Stability analysis based on monotonous decrement of value functions)

引入传统最优控制理论的值函数(即最优性能函数)概念, 对原始FHOCP进行重新描述, 得到了一系列的新策略, 包括无穷时域预测控制[23]、附加终端零约束或终端等式约束预测控制[32–34]、附加终端不等式约束预测控制[35–37]、附加终端不等式约束和终端罚函数预测控制[27,38–40]、无终端约束预测控制[41–43]等. 尽管这些策略的具体实现不同, 但各种策略的稳定性分析都通过寻找一组有关控制器设计参数的充分性条件, 建立关于FHOCP值函数单调递减性结论, 即FHOCP值函数是闭环系统的一个Lyapunov函数的结论, 从而保证NMPC闭环系统的稳定性. 2000年, Mayne等人在文献[1]系统地总结了这些策略的共性条件, 给出了NMPC设计和闭环稳定性分析的"三要素"理论框架. 目前基于值函数的单调递减性分析方法已是NMPC稳定性研究中最常用的方法, 具体如下:

重新描述NMPC的原始FHOCP为

$$\min_{u(k;N)} J(x_k)=E(x_{N|k})+\sum_{i=0}^{N-1} l(x_{i|k},u_{i|k}), \quad (9a)$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. } & x_{i+1|k}=f(x_{i|k},u_{i|k}),\ x_{0|k}=x_k,\\ & x_{i|k}\in X,\ \ u_{i|k}\in U,\ x_{N|k}\in \Omega,\\ & \forall i=0,1,\cdots,N-1,\end{aligned} \quad (9b)$$

其中: 函数$l(\cdot,\cdot)$关x和u是正定连续的, 附加项$E(\cdot)$和Ω分别是正定的终端罚函数和终端约束集, 其余同式(4). 假设在Ω内存在一个局部状态反馈控制律$\pi:\Omega\rightarrow U$, $\pi(0)=0$, 使不等式

$$E(f(x,\pi(x)))-E(x)\leqslant -l(x,\pi(x)) \quad (10)$$

对任意$x\in\Omega$成立, 则$E(x)$是闭环系统在Ω内的一个局部Lyapunov函数, 且Ω是闭环系统的一个不变集.

定义NMPC问题(9)的值函数

$$V(k)=\min_{u(k;N)^*} J(x_k) \quad (11)$$

作为NMPC闭环系统的Lyapunov函数. 同时以控制序列(8)作为优化问题(9)在$k+1$时刻的可行解, 则考虑值函数(11)和不等式(10), 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned}& V(k+1)-V(k)\leqslant\\ & J(x_{k+1})-\min_{u(k;N)^*} J(x_k)=\\ & E(f(x_{N|k},\pi(x_{N|k})))-E(x_{N|k})+\\ & l(x_{N|k},\pi(x_{N|k}))-l(x_k,u_k(x_k)^*)\leqslant\\ & -l(x_k,u_k(x_k)^*),\end{aligned} \quad (12)$$

其中函数$u_k^*(x_k)$为当前k时刻的预测控制律. 则根据Lyapunov稳定性定理可得, 值函数$V(k)$是NMPC闭环系统的一个Lyapunov函数, 从而保证NMPC闭环系统在可行域内是稳定的.

注 1 基于值函数递减性方法的稳定NMPC理论充分借鉴并吸收了传统最优控制理论的研究成果, 利用最优值函数概念和Lyapunov稳定性分析工具, 实现NMPC闭环系统的稳定性分析. 这在理论上深化了对NMPC运行机理的认识, 也系统化了NMPC的理论研究, 似乎从理论角度为稳定化NMPC的综合方法给出了"完美"的答案. 但需注意, 为了获得NMPC闭环稳定性结论, 该方法对原始FHOCP附加了终端罚函数$E(x)$和终端约束集Ω, 要求$E(x)$和Ω满足条件(10). 这从控制器实现和应用角度来说是很困难的, 而且当预测时域N较小时, $E(x)$将严重影响最优值函数$V(x)$[42,44]. 进一步, 控制器运行过程中, 有可能在线调整控制系统的性能参数$l(x,u)$和N. 此时, 很难在线求解满足条件(10)的$E(x)$和Ω, 影响了NMPC的闭环稳定性, 即基于值函数递减性的分析方法无法实现性能参数与闭环稳定性的分离, 从而限制了NMPC应用的灵活性.

注 2 为减小终端约束对FHOCP求解的不利影响, 文献[41–43]等采用CLFs设计终端罚函数$E(x)$, 提出了一类相对计算有效的无终端约束NMPC策略, 即在FHOCP中不再附加终端状态约束$x_{N|k}\in\Omega$. 为保证无终端约束FHOCP的递推可行性和值函数的递减性(从而得到NMPC的闭环稳定性), 采用值函数$V(x)$定义一个内含平衡点的闭集

$$\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^n: V(x)\leqslant\beta(1+Nm_l/M_l)\}, \quad (13)$$

其中: 实数$0<m_l<M_l$为性能函数$l(x,u)$的Lipschitz常数, $\beta>0$为$E(x)$的水平集Ω_β的定义指数, 即$\Omega_\beta=\{x\in\mathbb{R}^n: E(x)\leqslant\beta\}$. 当$\Omega_\beta$内存在一个连续控制律$\pi(x)$使CLF$E(x)$满足不等式(10)时, 闭环系统对于集$\Gamma$是原点指数稳定的. 尽管该FHOCP描述没有终端约束项, 但稳定性分析中使用了式(10), 即隐含要求终端约束满足. 此外, 该NMPC策略目前都未考虑系统的状态约束.

4.2 基于收缩或递减约束的稳定性分析(Stability analysis based on contractive or decremented constraints)

在这类NMPC稳定性分析中, 直接对优化问题(4)附加一个收缩性或递减性约束, 即给定一个正定函数$M(x)$, 例如状态变量的某种范数[45–46]以及系统的控制Lyapunov函数[44,47–48]等, 对优化问题(4)附加约束

$$M(x_{1|k})\leqslant\beta M(x_{0|k}),\ \forall\, 0<\beta<1 \quad (14a)$$

或者

$$M(x_{1|k})-M(x_{0|k})<0, \quad (14b)$$

其中β为收缩因子. 对于附加收缩约束(14a), 如果修

正后的FHOCP可行, 那么闭环系统将满足

$$M(x_{k+i}) \leqslant \beta^i M(x_k), \tag{15}$$

从而保证闭环系统具有指数渐近稳定性. 若附加约束取为递减约束(14b), 则正定函数$M(x)$成为闭环系统的一个Lyapunov函数, 从而闭环系统稳定. 不同于基于值函数的递减性分析中的附加终端约束集方法, 这里的附加约束通常只对下一时刻的状态作限制, 从而有利于NMPC在线优化的实施.

4.3 基于经济性能函数单调递减的稳定性分析(Stability analysis based on monotonous decrement of economic cost functions)

随着节能、减排和增效目标的日益重视, NMPC性能中可能包含经济类目标函数[49]. 此时, 由于扰动作用和经济类目标函数本身因素的影响, 常规单步性能函数$l(x,u)$的性质

$$l(x_\mathrm{s},u_\mathrm{s}) < l(x,u),\ \forall (x,u) \neq (x_\mathrm{s},u_\mathrm{s})$$

可能不再成立, 反映在稳定性问题上就是闭环系统难以稳定到设定值目标$(x_\mathrm{s},u_\mathrm{s})$. 相应地, NMPC的FHOCP值函数并不能保证是闭环系统的Lyapunov函数. 对此, 文献[50–51]考虑终端等式约束NMPC描述

$$V_N(x) = \min_{\{u_{0|k},x_{1|k},\cdots,x_{N|k}\}} \sum_{i=0}^{N-1} l(x_{i|k},u_{i|k}), \tag{16a}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & x_{i+1|k} = f(x_{i|k},u_{i|k}),\ x_{0|k} = x_k, \\ & g(x_{i|k},u_{i|k}) \leqslant 0,\ x_{N|k} = x_\mathrm{s}, \\ & \forall\, i = 0,1,\cdots,N-1, \end{aligned} \tag{16b}$$

其中: $g(x,u)$表示系统状态和控制约束, x_s为系统平衡点, $V_N(x)$为最优值函数.

对上述NMPC问题(16), 引入弱能控性条件

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|u_{i|k} - u_\mathrm{s}\| \leqslant \gamma(\|x_k - x_\mathrm{s}\|) \tag{17}$$

和稳态优化问题强对偶性条件

$$\begin{aligned} & \min_{x,u}\{l(x,u) + [x - f(x,u)]^\mathrm{T}\lambda_\mathrm{s}\}, \\ & \text{s.t. } g(x,u) \leqslant 0, \end{aligned} \tag{18}$$

其中: $\gamma(\cdot)$为K_∞类函数, $\lambda_\mathrm{s} > 0$为乘子系数. 再构造与函数$l(x,u)$等价的经济性能函数

$$L(x,u) = l(x,u) + [x - f(x,u)]^\mathrm{T}\lambda_\mathrm{s} - l(x_\mathrm{s},u_\mathrm{s}), \tag{19}$$

进而建立以$L(x,u)$为性能函数的FHOCP及其值函数

$$\tilde{V}_N(x) = V_N(x) + [x - x_\mathrm{s}]^\mathrm{T}\lambda_\mathrm{s} - Nl(x_\mathrm{s},u_\mathrm{s}), \tag{20}$$

则函数(20)是问题(16)所得闭环系统的一个Lyapunov数, 进而得到NMPC闭环稳定性结论.

注 3　基于经济性能函数递减性的NMPC稳定性分析方法与基于值函数的相应方法类似, 但主要处理被控系统设定点不可达时的闭环稳定性问题. 目前这类NMPC稳定性分析方法已引入到了多目标控制系统NMPC策略[52]和周期性控制系统NMPC策略[53]的稳定性研究中.

4.4 基于性能函数可控性的稳定性分析(Stability analysis based on controllability of cost functions)

从NMPC控制器实现角度出发, 无附加稳定性约束(如终端状态约束、收缩约束等)的稳定化NMPC策略具有更好的计算效率. 为此, Grüne等人[54–55]引入性能函数可控性概念, 建立了具有输入约束的离散时间非线性系统原始NMPC策略的渐近稳定性结论, 如下:

考虑标称非线性系统(2)、输入约束集U及FHOCP描述:

$$V(k) = \min_{u(k;N)}\{J(x_k) = \sum_{i=0}^{N-1} l(x_{i|k},u_{i|k})\}, \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & x_{i+1|k} = f(x_{i|k},u_{i|k}),\ x_{0|k} = x_k, \\ & u_{i|k} \in U,\ \forall i = 0,1,\cdots,N_\mathrm{c} - 1, \\ & u_{j|k} = u_{N_\mathrm{c}|k},\ \forall j = N_\mathrm{c},\cdots,N-1, \end{aligned} \tag{21b}$$

其中$N_\mathrm{c} \leqslant N-1$为控制时域. 假设单步性能函数$l(x,u)$存在如下可控性条件[55]: 给定一个$KL$类函数$\beta(\cdot,\cdot)$, 对任意初始状态$x_k$, 系统(2)存在一个控制序列$\{u_{i|k} \in U\}$使如下不等式成立:

$$l(x_{i|k},u_{i|k}) \leqslant \beta(l^*(x_k),i), \tag{22}$$

其中: $i = 0,\cdots,N-1$, $l^*(x) = \min\limits_{u\in U} l(x,u)$及$\alpha_1(\|x\|) \leqslant l^*(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|)$, α_1和α_2为K_∞–函数. 则当优化问题(23)有解时:

$$\min_{c_0,\cdots,c_{N-1},\nu} \frac{\sum\limits_{i=0}^{N-1} c_i - \nu}{\sum\limits_{i=0}^{N_\mathrm{c}-1} c_i}, \tag{23a}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \sum_{i=k}^{N-1} c_i \leqslant \sum_{i=0}^{N-k-1} \beta(c_k,i), \\ & k = 0,1,\cdots,N-2; \\ & \nu \leqslant \sum_{i=0}^{j-1} c_{i+N_\mathrm{c}} + \sum_{i=0}^{N-j-1} \beta(c_{j+N_\mathrm{c}},i), \\ & j = 0,1,\cdots,N-N_\mathrm{c}-1; \\ & c_i > 0,\ \nu > 0,\ i = 0,1,\cdots,N-1, \end{aligned} \tag{23b}$$

闭环系统平衡点渐近稳定. 相应地, 文献[56]建立了输入约束的连续时间非线性系统无约束NMPC策略

的渐近稳定性结论.

注 4 基于性能函数可控性概念的NMPC稳定性分析方法本质上是通过对单步性能函数$l(x,u)$的限制, 即考虑满足可控性条件的$l(x,u)$以保证NMPC的闭环稳定性, 限制了该预测控制方法的应用范围. 进一步, 对于具有状态约束的系统, 性能可控性条件难以满足, 故目前这类NMPC稳定性分析方法仅考虑了控制约束系统. 为处理同步系统状态和控制约束, 一种可能方法是结合软化约束技术[29–30], 将状态约束看作系统软约束加入单步性能函数$l(x,u)$中, 进而实现该稳定NMPC策略设计.

除上述4类稳定性分析方法外, 还有结合线性化方法、线性矩阵不等式技术、多模型切换方法等研究NMPC策略及其稳定性的, 如文献[57–59]等.

5 NMPC闭环鲁棒性(Closed-loop robustness of NMPC)

受到NMPC稳定性研究不断深入的影响, 以不确定性系统为对象的NMPC鲁棒性研究也引起了人们的广泛关注, 并取得了较大的进展[1–4]. 根据预测模型是否包含不确定扰动, 现有NMPC鲁棒性研究结果大致分为两类: 一是基于标称模型和标称性能指标设计预测控制策略, 再通过合理设计鲁棒性约束得到闭环系统的鲁棒稳定性, 包括内在鲁棒性(inherent robustness)结论; 二是基于微分对策(differential game)理论, 考虑在最坏情况下使系统的性能指标的上界达到最小, 也称为极小极大(min-max)NMPC策略. 在两类策略的设计过程中又存在着多种算法实现.

5.1 基于标称预测模型的鲁棒NMPC(Robust NMPC based on nominal predictive models)

1) 内在鲁棒NMPC.

内在鲁棒NMPC策略分析由标称模型和标称性能优化得到的预测控制的闭环鲁棒稳定性问题. 例如, 文献[60]考虑具有终端约束时的NMPC反馈律, 证明了控制律在Lipschitz连续性条件下具有鲁棒稳定性结论; 文献[61]分别考虑无穷时域终端罚函数、时变终端罚函数和终端状态等式约束等3种情况, 提出了在连续时间标称闭环系统渐近稳定性条件下的、反最优性(inverse optimality)的充分条件, 进而建立了NMPC闭环系统$(0.5,\infty)$扇形裕度(sector margin)鲁棒性; 类似地, 文献[62]建立了离散时间非线性系统NMPC的内在鲁棒性结论; 文献[63]则在文献[62]的基础上研究了受扰NMPC鲁棒性设计应满足的条件, 并给出了满足条件的直观几何意义; 文献[64]在没有附加额外的连续性条件的基础上, 证明了具有输入约束的NMPC的内在鲁棒性, 并且估计了允许扰动范数的上界. 通常, 内在鲁棒NMPC策略侧重于闭环系统的鲁棒性分析.

2) 紧缩(tightening)鲁棒NMPC.

考虑系统(1), 其中不确定w为加性有界扰动, 即系统(1)退化为

$$x_{k+1}=f(x_k,u_k)+w_k, \tag{24}$$

其中$w\in W(x,u)$, $W(x,u)$为一个有界集. 对由标称模型(2)定义的优化问题(4)或(9)添加紧缩(tightening)状态约束集$X_{i|k}$, $i=0,\cdots,N$, 则FHOCP修改为

$$\min_{u(k;N)} J(x_k)=E(x_{N|k})+\sum_{i=0}^{N-1} l(x_{i|k},u_{i|k}), \tag{25a}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. } & x_{i+1|k}=f(x_{i|k},u_{i|k}),\ x_{0|k}=x_k,\\ & x_{i|k}\in X_{i|k},\ \forall\, i=0,1,\cdots,N,\\ & u_{i|k}\in U,\ \forall\, i=0,1,\cdots,N-1,\end{aligned} \tag{25b}$$

其中: 紧缩集$X_{i|k}\subseteq X$, $i=0,\cdots,N$, 且保证对任意有界扰动w, 实际状态变量满足$x_{k+i}\in X$, $i=0,\cdots,N$. 为此, 文献[65]利用Pontryapin差集

$$S_1\sim S_2=\{x\in\mathbb{R}^n: x+y\in S_1,\ \forall y\in S_2\} \tag{26}$$

与Minkowski和集

$$S_1\oplus S_2=\{z=x+y\in\mathbb{R}^n: x\in S_1, y\in S_2\}, \tag{27}$$

概念离线计算紧缩集$X_{i|k}$, 而文献[66]通过在线计算$X_{i|k}$以降低NMPC策略的保守性; 文献[67]则对区间约束系统采用区间算术计算$X_{i|k}$. 一旦$X_{i|k}$确定后, 上述FHOCP的递推可行性对任意有界扰动w成立, 进而结合值函数$V(k)$与Lyapunov定理保证对应NMPC策略的鲁棒稳定性, 包括输入–状态稳定性(input-to-state stability, ISS)[68]等.

此外, 对于无约束的衰减扰动非线性系统, 文献[69]对标称NMPC优化问题引入一个终端约束集, 建立了标称NMPC输入状态稳定性结论; 而文献[70]考虑状态限界不确定扰动, 利用鲁棒控制Lyapunov函数, 建立了仿射输入不确定非线性系统NMPC闭环鲁棒渐近稳定性的充分条件.

5.2 基于不确定预测模型的鲁棒NMPC(Robust NMPC based on uncertain predictive models)

直接考虑系统的不确定模型集并以此预测系统的性能, 极小化最坏的性能指标值得到NMPC律. 在这类NMPC策略中, 不确定扰动将作为优化的决策变量显式地包含在整个优化控制问题中, 求解与所有可能的扰动输入下目标函数的最小公共上界相对应的控制律, 即用min-max问题代替原FHOCP中的极小值问题, 因此也被称min-max NMPC策略.

考查不确定系统(1), 定义min-max最优控制问题(MMOCP)如下:

$$V(k)=\min_{u(k;N)}\max_{w(k;N)}J(x_k), \tag{28a}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. } & x_{i+1|k}=f(x_{i|k},u_{i|k},w_{i|k}),\\ & x_{i|k}\in X,\ u_{i|k}\in U,\ w_{i|k}\in W,\\ & x_{0|k}=x_k,\ \forall i=0,1,\cdots,N-1,\end{aligned} \tag{28b}$$

其中: W 是所有容许不确定扰动的集合, $V(k)$ 是MMOCP的最优性能指标函数即值函数. 由于不确定性的存在, 通常采用开环和闭环两种优化方式实现鲁棒NMPC算法的设计.

1) 开环min-max鲁棒NMPC.

在开环min-max鲁棒NMPC策略中, 决策变量即控制序列(5)是一时间数值序列[20,71]

$$u_{i|k}=u_{i|k}(x_{0|k}),\ \forall\, i=0,1,\cdots,N-1, \tag{29}$$

而目标函数$J(x)$为

$$J(x_k)=E(x_{N|k})+\sum_{i=0}^{N-1}l(x_{i|k},u_{i|k}) \tag{30a}$$

或者

$$J(x_k)=E(x_{N|k})+\sum_{i=0}^{N-1}l(x_{i|k},u_{i|k},w_{i|k}), \tag{30b}$$

其中正定函数$E(x)$称为终端罚函数. 为了保证MMOCP的优化可行性, 通常对优化控制问题附加终端约束(7), 即$x_{N|k}\in\Omega$. 如果Ω内存在一个局部状态反馈控制律$\pi:\Omega\to U,\pi(0)=0$, 使Ω是对应闭环系统的鲁棒不变集, 且对任意$(x,w)\in\Omega\times W$, 下述不等式成立:

$$E(f(x,\pi(x),w))-E(x)\leqslant l(x,\pi(x)) \tag{31a}$$

或者

$$E(f(x,\pi(x),w))-E(x)\leqslant l(x,\pi(x),w), \tag{31b}$$

则min-max优化问题(7)和式(28)−(30)的值函数$V(k)$是时间变量k的单调递减函数, 从而$V(k)$是NMPC闭环系统的一个Lyapunov函数. 因此, 如果优化问题(7)和(28)−(30)优化可行, 则闭环系统是鲁棒渐近稳定的[1–4]. 需要指出的是, 开环优化将增加MMOCP不具有递推可行性的风险, 从而无法得到闭环系统的鲁棒稳定性结论. 但对于特殊不确定扰动, 结合相应的处理技术, 可以保证开环MMOCP的递推可行性. 例如, 对于附加衰减扰动, 文献[23]结合双模控制方法, 建立开环MMOCP递推可行性; 而文献[71]采用非线性H_∞控制策略, 对状态依赖扰动系统得到开环MMOCP的递推可行性.

2) 闭环min-max鲁棒NMPC.

通常开环min-max鲁棒NMPC策略所得的控制性能较保守(如闭环系统吸引域很小等), 且递推可行性不易保证. 因此, 文献[1–4]建议采用闭环优化代替开环优化计算NMPC律. 将闭环min-max鲁棒NMPC的控制序列$u(k;N)$取为状态变量的函数, 即

$$u_{i|k}=\pi_i(x_{i|k}),\ \forall i=0,1,\cdots,N-1, \tag{32}$$

其中$\pi_i(x_i),\ i=0,\cdots,N-1$为状态反馈控制律, 而优化目标函数通常取为方程(30b). 同理, 附加终端约束集(7)并假设存在局部控制律$\pi:\Omega\to U,\ \pi(0)=0$, 使得不等式(31b)成立. 则对于状态相关的不确定扰动, 同样利用优化问题(7)(28)(30)和(32)的值函数$V(k)$的单调递减性质可得NMPC闭环系统的鲁棒稳定性结论[1–3].

进一步, 为处理更一般性不确定扰动, 非线性系统ISS理论再次被引入NMPC鲁棒性设计中, 并已作为当前鲁棒NMPC研究的主要工具[4]. 具体来说, 考虑不确定系统(1)、优化问题(28)和(7)、性能指标(30)和决策变量(32). 假设终端罚函数$E(x)$满足

$$\alpha_1(\|x\|)\leqslant E(x)\leqslant\alpha_2(\|x\|),\ \forall x\in\Omega, \tag{33}$$

其中α_1和α_2为K_∞类函数. 假设在Ω内存在一个ISS的局部控制律$\pi:\Omega\to U,\pi(0)=0$, 使Ω是对应闭环系统的一个鲁棒不变集, 且对任意$(x,w)\in\Omega\times W$, 不等式

$$\begin{aligned}&E(f(x,\pi(x),w))-E(x)\leqslant\\ &-l(x,\pi(x))+\alpha_3(\|w\|),\end{aligned} \tag{34a}$$

或者

$$\begin{aligned}&E(f(x,\pi(x),w))-E(x)\leqslant\\ &-l(x,\pi(x),w)+\alpha_3(\|w\|)\end{aligned} \tag{34b}$$

成立, 其中α_3为K_∞类函数. 则利用微分对策原理的性质可得, 对任意$w\in W$, 值函数$V(k)$满足

$$\begin{aligned}&\alpha_4(\|x_k\|)\leqslant V(k)\leqslant\alpha_5(\|x_k\|),\\ &V(k+1)-V(k)\leqslant-\alpha_6(\|x_k\|)+\sigma(\|w\|),\end{aligned} \tag{35}$$

即$V(k)$是NMPC闭环系统的一个ISS-Lyapunov函数, 其中: α_4,α_5和α_6为K_∞类函数, σ为K类函数. 从而NMPC闭环系统是ISS的. 此时, 对衰减不确定扰动, 闭环系统是鲁棒渐近稳定的, 而对持续不确定扰动, 闭环系统状态总是有界的而且收敛到平衡点的某个小邻域内.

注 5　min-max思想已成为当前NMPC鲁棒性分析和设计的主要思路, 并由此形成各种鲁棒NMPC算法. 例如, 无限时域min-max鲁棒NMPC[72]、H_∞鲁棒NMPC[73–75]、切换鲁棒NMPC[76–77]、ISS鲁棒NMPC[66,69,78–81]等. 此外, 近年来线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)技术也引入到min-max问题中, 如文献[82–86]以多面体不确定

性和结构反馈不确定性系统为对象, 将min-max问题转化为一组LMI的凸优化问题, 再在线求解NMPC问题. 尽管min-max鲁棒NMPC在理论上具有比基于标称模型的鲁棒NMPC策略更好的性能, 但其控制器在线计算几乎很难实现, 故目前更多的是作为一种理论层面考虑的控制策略. 总之, 目前NMPC鲁棒性研究大多沿袭了稳定性研究的成果, 再引入鲁棒性约束条件或引入用来改善鲁棒性的可调变量, 设计鲁棒控制器, 使闭环系统内部稳定的同时具有一定的鲁棒性.

6 NMPC优化求解(Optimization solution of NMPC)

MPC是一类基于在线优化的控制算法, 在线优化的计算量直接决定着预测控制能否成功应用. 对于二次型LMPC策略, 已有相对成熟的在线计算方法, 如内点法、积极集法和牛顿法等[87–90], 而对于NMPC的求解计算, 至今仍缺乏有效的计算方法. 相比于LMPC的求解计算, NMPC计算的最大困难是要在有限采样时间内优化求解一个非凸的非线性规划问题(4), 因为求解该规划问题的计算量随决策变量的维数(mN)呈指数增长[11–12], 且已被证明是一个非确定性多项式难题(non-deterministic polynomial-hard, NP-hard)[91]. 进一步, 为保证闭环稳定性和鲁棒性而附加的约束(如终端状态约束、收缩状态约束等)又增加了NMPC优化求解的计算量. 根据NMPC计算量主要由控制策略和采用的数值算法组成, 国内外学者提出了各种有效的求解方法以降低NMPC非线性规划问题优化求解的计算量, 主要体现在NMPC控制器简化设计和数值算法设计两方面, 而每个方面又包括了诸多不同的实现方法.

6.1 NMPC控制器简化(Simplification of NMPC controllers)

1) 控制器次优设计.

尽管全局最优的NMPC控制器具有良好的最优性、稳定性、鲁棒性和非保守性等理论性质[1,4], 但求解全局最优NMPC解耗费时间长且不可估计, 故从应用角度考虑并不适合NMPC的在线求解. 为此, 利用前一时刻的最优解$u(k-1;N)^*$构造当前时刻的可行次优解$\tilde{u}(k;N)$, 可有效地提高NMPC的求解速度, 简化求解计算过程, 如文献[35]和[92]考虑离散时间非线性系统NMPC控制器次优设计问题, 并得到初始可行即稳定的结论; 文献[93]研究连续时间非线性系统NMPC次优设计和计算延迟问题, 提出了在线计算效率较高的渐近稳定NMPC求解方法. 尽管次优控制器设计无需NMPC解的全局最优性就能保证闭环系统的稳定性, 在一定程度上提高了NMPC优化求解的计算效率[94], 但所得到的控制器性能通常较保守.

2) 控制器线性化设计.

线性化技术一直是处理非线性问题的一种常用方法. 对于NMPC求解计算问题, 通常将非线性模型(1)或(2)线性化后利用线性模型作为预测模型, 从而将非线性FHOCP简化为线性FHOCP, 再利用线性MPC理论设计NMPC控制器, 如(平衡点、逐点)连续线性化[95]、一阶Taylor级数线性化[96]、全局线性化[97]等方法. 另外, 利用非线性系统的几何特征, 文献[98]采用输入–输出线性化技术设计NMPC控制器; 而文献[99]设计状态反馈线性化NMPC控制器. 虽然线性化技术极大地降低了NMPC求解的计算量, 但对于具有大范围操作域的非线性系统(如聚合牌号切换装置、空分精馏塔等), 线性化设计将可能恶化控制系统的品质, 甚至导致NMPC不稳定. 同时, 反馈线性化通常将原线性约束变为非线性约束, 并且反馈线性化的条件很苛刻, 使得这一方法的应用受到一定的限制[91].

3) 控制器参数化设计.

由于NMPC非线性规划问题(4)的计算量通常随决策变量维数(mN)呈指数增长[11–12], 故可通过减少FHOCP决策变量的维数提高NMPC优化求解的计算效率. 显然, 最直接的方法就是尽可能地缩短FHOCP的控制(预测)时域[100], 但缩短时域通常导致NMPC吸引域的缩小和性能的下降[11]. 因此, 另一种可行方法是对预测控制变量作有限维参数化[101], 将NMPC对控制变量的直接优化计算转化为对参数化系数的间接优化, 从而可通过选择参数化系数压缩FHOCP决策变量的维数, 提高NMPC求解算法实施的快速性. 典型的参数化形式包括:

a) 状态反馈线性参数化[102]

$$u_{i|k} = \sum_{j=0}^{i} L_{ij} x_{j|k} + c_{i|k}, \tag{36}$$

其中: L_{ij}和$c_{i|k}$分别为多步状态反馈增益矩阵和在线计算摄动向量, $i = 0, \cdots, N-1$. 通常, 状态反馈参数化包含了可行摄动参数化[75,95,103–105]

$$u_{i|k} = K x_{i|k} + c_{i|k} \tag{37}$$

或者

$$u_{i|k} = K_{i|k} x_{i|k} + c_{i|k}, \tag{38}$$

其中: K为离线计算的单步状态反馈增益矩阵, $K_{i|k}$为在线计算的单步状态反馈增益矩阵, $i = 0, \cdots, N-1$.

b) 显式控制律[106–108]

$$u_k = K_{\sigma(x_k)} x_k + c_{\sigma(x_k)}, \tag{39}$$

其中: $\sigma(x)$为选择函数, $\sigma(x)=1,\cdots,D$, D为系统状态区域X的划分总数, K_σ和c_σ分别为对应第σ区域的单步状态反馈增益矩阵和摄动量. 通常, 这种设计方法也称为分段仿射控制律设计, 其核心思想是在系统状态区域划分的基础上, 利用多参数二次规划理论, 离线计算第σ区域的最优单步状态反馈增益矩阵和摄动量, 进而在线判断系统运行状态所属区域, 选择对应的最优控制律, 从而使MPC的在线计算量降至最低. 这种设计方法的关键是如何高效划分系统的状态区域, 而这正是约束非线性系统MPC的难点所在. 目前, 这种方法在非线性系统中也得到了一定的扩展研究[106,108].

c) 状态反馈非线性参数化[37,70]

$$u_{i|k}=h(x_{i|k},\theta_k),\ \forall i=0,1,\cdots,N-1, \tag{40}$$

其中: 非线性向量函数$h(x,\theta)$是关于x和θ的显式函数, $\theta\in S\subseteq\mathbb{R}^p$为在线优化参数向量, S为一可行参数集. 通常, θ的维数小于控制变量u的维数, 且在整个预测时域N内保持不变, 从而最大程度地压缩NMPC优化问题决策变量的个数.

d) 集结优化策略[109–110]

$$u(k;N)=Hv(k;s), \tag{41}$$

其中: $H\in\mathbb{R}^{Nm\times sm}$为集结矩阵, $v(k;s)^{\mathrm T}=[v_{1|k}^{\mathrm T}\ v_{2|k}^{\mathrm T}\ \cdots\ v_{s|k}^{\mathrm T}]$, $s<N$为集结优化变量, $v_{i|k}\in\mathbb{R}^m$, $i=1,\cdots,s$. 该优化策略设计的本质是将高维决策变量$u(k;N)$映射成低维决策变量$v(k;s)$, 从而提高约束预测控制器的在线计算效率. 这种优化策略在适当的情况下可解释为包括了Blocking、预测函数控制和振幅衰减集结等策略设计[111–112].

此外, 文献[113]采用交叉策略设计了单变量NMPC策略; 文献[91]根据MPC滚动优化原理只采用首步控制量的特点, 提出只精确计算当前控制项而近似其余控制项的方法, 以降低FHOCP决策变量的维数, 提高计算效率.

注 6　从控制器设计角度简化FHOCP求解过程是目前NMPC理论文献关注较多的一个研究主题, 但这类NMPC优化设计方法本身并没有提供控制器最终实现算法. 因此, 从NMPC应用角度考虑还需要结合具体的数值算法求解NMPC控制器.

6.2 NMPC数值计算(Numerical computation of NMPC)

以NMPC数值计算相关文献常采用的优化控制问题(9)为例, 根据所采用的决策变量类型, 可将现有NMPC数值算法大致分为序贯求解法(sequential solution approach)和联立求解法(simultaneous solution approach)两类.

1) 序贯求解法.

考虑NMPC优化控制问题(9), 其中状态变量x可由预测模型$x_{i+1}=f(x_i,u_i)$和输入变量u唯一确定, 则利用预测模型消去目标函数$J(x)$的中间变量x, 得到仅含待优化的控制变量u的优化控制问题

$$\min_{z_k}\{E(\tilde x_{N|k}(z_k))+\sum_{i=0}^{N-1}l(\tilde x_{i|k}(z_k),u_{i|k})\}, \tag{42a}$$

$$\text{s.t. } h_i(\tilde x_{N|k}(z_k),u_{i|k})\leqslant 0, \tag{42b}$$

$$h_N(\tilde x_{N|k}(z_k))\leqslant 0, \tag{42c}$$

$$\tilde x_{0|k}=x_k,\ \forall i=0,\cdots,N-1, \tag{42d}$$

其中: 决策变量$z_k=\{u_{i|k},\ i=0,\cdots,N-1\}$, 约束(42b)包含了状态约束集$X$和控制约束集$U$, 约束(42c)包含了终端状态约束集$\Omega$, $\tilde x_{i|k}$是由方程$x_{i+1|k}=f(x_{i|k},u_{i|k})$和$u_{i|k}$唯一确定的关于$z_k$的隐函数. 当$k$时刻的初始状态$x_k$给定时, 优化控制问题(42)就退化为标准的非线性规划问题, 此时可以直接采用现有的非线性优化算法计算最优控制解序列z_k, 如牛顿型序贯二次规划(sequential quadratic programming, SQP)法[114–115]、Lagrange乘子(multiplier)法[116]和内点(interior point)法[117–118]等.

2) 联立求解法.

不同于序贯求解法, 联立求解法直接以状态变量x和控制变量u作为决策变量, 从而NMPC优化控制问题(9)增广为一个非线性规划问题:

$$\min_{z_k}\{E(x_{N|k})+\sum_{i=0}^{N-1}l(x_{i|k},u_{i|k})\}, \tag{43a}$$

$$\text{s.t. } x_{0|k}-x_k=0, \tag{43b}$$

$$g_{i+1|k}(x_{i+1|k},x_{i|k},u_{i|k})=0, \tag{43c}$$

$$h_i(x_{i|k},u_{i|k})\leqslant 0, \tag{43d}$$

$$h_N(x_{N|k})\leqslant 0,\ \forall i=0,\cdots,N-1, \tag{43e}$$

其中: 决策变量$z_k=\{x_{i|k},u_{i|k},x_{N|k},i=0,\cdots,N-1\}$, 等式约束(43c)表示非线性预测模型$x_{i+1}=f(x_i,u_i)$, 不等式约束(43d)包含了状态约束集$X$和控制约束集$U$, 不等式约束(43e)包含了终端状态约束集$\Omega$. 同理, 当$k$时刻的初始状态$x_k$给定时, 优化控制问题(43)就退化为标准的非线性规划问题, 可以直接采用现有的非线性优化算法计算最优控制解序列z_k, 如多重打靶(multiple shooting)法[119–121]、可行摄动SQP法[122]、实时迭代计算法[123]和内点法[124]等数值计算NMPC策略.

注 7　令$G(z)$表示规划问题(42)和(43)的等式约束向量, $H(z)$表示不等式约束向量, 则规划问题(42)和(43)可统一为紧凑型描述

$$\begin{aligned}&\min_{z_k}\ F(z_k),\\&\text{s.t. } G(z_k)=0,\ \ H(z_k)\leqslant 0,\end{aligned} \tag{44}$$

其中目标函数$F(z)$由终端函数$E(x)$和单步性能函数$l(x,u)$组成. 对于由非线性数值优化得到的最优解z_k^*, 通常满足一阶最优性条件即Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件[11–12]: 存在乘子向量λ_k^*和μ_k^*使得如下等式(45)成立:

$$\begin{cases}\nabla_{z_k}L(z_k^*,\lambda_k^*,\mu_k^*)=0,\\ G(z_k^*)=0,\ \ H(z_k^*)\leqslant 0,\\ H(z_k^*)\mu_k^*=0,\\ \lambda_k^*\geqslant 0,\ \mu_k^*\geqslant 0,\end{cases}\tag{45}$$

其中: ∇表示函数梯度, $L(z_k,\lambda_k,\mu_k)$为Lagrange函数:

$$L(z_k,\lambda_k,\mu_k)=F(z_k)+G^{\mathrm{T}}(z_k)\lambda_k+H^{\mathrm{T}}(z_k)\mu_k,\tag{46}$$

从而可以通过求解满足KKT条件的迭代收敛点列$\{z_k^{(j)},\lambda_k^{(j)},\mu_k^{(j)}\}$确定最优解$\{z_k^*,\lambda_k^*,\mu_k^*\}$. 对于序贯求解法, 由于状态变量$x$的消去, 函数$L(z_k,\lambda_k,\mu_k)$的Hessian矩阵是稠密的, 此时一次完整优化计算最优解的复杂度为$\mathrm{O}(N^3m^3)$, 而联立求解法由于引入状态变量x作为决策变量, 使得Hessian矩阵成为块对角稀疏矩阵, 此时一次完整优化计算最优解的复杂度为$\mathrm{O}(N(n+m)^3)$. 因此, 当决策变量的维数(mN)较小时, 序贯求解法能快速实现最优解的计算, 但当优化时域N和系统输入维数m较大时, 联立求解法具有明显的计算优势, 而且基于联立求解法的数值算法能用于开环不稳定系统NMPC控制器的优化求解. 基于序贯求解法的数值算法一般用于小型开环稳定系统NMPC控制器设计[125–126].

注 8 对于凸规划问题, 上述确定性数值算法可实现解的全局收敛性和全局最优性. 但NMPC优化问题(4)通常是一个非凸的非线性规划问题, 确定性数值优化计算很难保证解的全局最优性[11,124]. 于是, 相关学者自然想到采用随机性进化算法优化求解NMPC控制器. 目前, 已有多种基于进化算法的NMPC控制器求解计算结果, 如基于遗传算法(genetic algorithm, GA)的高效NMPC控制器设计[127–128]等.

7 吸引域估计(Estimate of regions of attraction)

相比于稳定性、鲁棒性和优化求解等内容的研究, 吸引域是目前NMPC理论研究中关注较少的一个内容. 给定一个初始状态$\xi\in X$, 如果NMPC优化问题对边界条件$x_{0|k}=\xi$存在至少一个可行控制解$u(k;N)$, 且相应的闭环控制系统平衡点稳定, 则状态ξ称为NMPC的一个可行初始条件. 所有可行初始条件组成的集合称为NMPC的一个吸引域, 记为$\varXi$. 显然, 对于系统约束(3), NMPC吸引域满足$\varXi\subseteq X$.

通常, $\varXi$与单步性能函数$l(x,u)$(包括终端罚函数$E(x)$)、约束集X和U(包括终端约束$\varOmega$)、预测时域N_{p}和控制时域N_{c}等要素有关, 且对预测时域N_{p}和约束集X,U与$\varOmega$分别具有单调性, 即

$$N_{p_1}\leqslant N_{p_2}\ \Rightarrow\ \varXi(N_{p_1})\subseteq\varXi(N_{p_2}),\tag{47}$$

$$X_1\subseteq X_2\ \Rightarrow\ \varXi(X_1)\subseteq\varXi(X_2),\tag{48}$$

$$U_1\subseteq U_2\ \Rightarrow\ \varXi(U_1)\subseteq\varXi(U_2),\tag{49}$$

$$\varOmega_1\subseteq\varOmega_2\ \Rightarrow\ \varXi(\varOmega_1)\subseteq\varXi(\varOmega_2).\tag{50}$$

注意, 对于不确定非线性系统, 性质(47)由于不确定扰动的作用可能不再成立.

由于NMPC律的隐式定义特点, 建立精确刻画吸引域$\varXi$与上述要素之间的定量关系很困难而且很复杂. 因此, 目前有关NMPC吸引域的研究大多还只是局限于定性分析的层面. 例如, 文献[39]利用$\varXi$的性质(47), 设计一个预测时域比控制时域更长的NMPC以扩大$\varXi$, 但延长时域增加了NMPC的在线计算量; 而文献[28]结合线性矩阵不等式技术设计终端约束集$\varOmega$, 进而根据性质(50)扩大$\varXi$; 文献[41–43]利用单步性能函数$l(x,u)$的下限和值函数$V(k)$定义$\varXi$; 文献[129–130]则利用不变集原理和性质(50)扩大$\varXi$; 文献[131]利用差分包含方法表达非线性系统并优化计算$\varXi$; 等. 另一方面, 在NMPC实际应用中, 为保证NMPC在线优化的可行性, 需要进行大量的离线仿真以验证可能存在的吸引区域. 尽管如此, 实际中还是潜在一些使得NMPC在线优化不可行的边界条件, 从而增加了NMPC运行的风险. 事实上, 控制律的解析性可以定量地刻画相应闭环系统的吸引域特征[132], 如文献[57]采用线性矩阵不等式技术定量优化计算$\varXi$; 文献[22,76,97]利用预先设计的控制律定量计算$\varXi$; 而文献[37,70]通过离线构造的状态反馈非线性参数化控制律估计$\varXi$.

8 总结与展望(Conclusions and prospects)

8.1 总结(Conclusions)

模型预测控制经过近40年的发展, 以其独特的优点成为复杂控制工程领域倍受青睐的先进控制技术之一. 与此同时, 非线性系统模型预测控制的理论研究也得到了不断深入发展, 特别是20世纪90年代以来, 以预测控制和最优控制的联系为纽带, 非线性系统预测控制的稳定性和鲁棒性研究出现了系统的综合方法. 但是, 由于系统描述的复杂性和多样性, 非线性系统预测控制的研究无论在理论上还是在应用中都落后于线性系统预测控制的发展, 特别在闭环鲁棒性、优化求解和吸引域等内容上, 都有待进一步深入的研究和发展.

8.2 展望(Prospects)

非线性系统模型预测控制的研究, 包括理论和应用, 还远没有结束, 仍然存在很多问题亟待进一步探索和求解. 面向工业应用的需求和特点, 深入发展和推进NMPC现有研究成果是十分重要但具有很强挑

战性的研究任务.

1) 输出反馈非线性预测控制策略.

工程应用中, 系统的状态并不一定完全可测. 因此, 研究输出反馈预测控制更具现实意义, 特别是对多变量非线性系统. 目前, 线性系统输出反馈预测控制已有较好的成果[133–134], 但是非线性系统的输出反馈预测控制还有待进一步研究. 在这方面, 将非线性系统用线性模型包含后, 已经出现了若干研究结果[135–137], 但是其理论的深入程度远远比不上状态反馈情况[138]. 尽管有稳定性保证的输出反馈预测控制综合方法还没有被系统地解决, 但相应的算法研究却取得了一些进展, 如文献[139–140]等. 这些算法的发展为进一步研究有稳定性保证的输出反馈NMPC策略提供了可能思路.

2) 网络化和分布式非线性预测控制理论.

本文仅回顾了传统NMPC理论[1–4]关于稳定性、鲁棒性和优化计算等若干主题内容, 但随着NMPC理论与应用研究成果的不断取得和丰富, 电力系统、通讯网络、智能交通等超大型网络化和分布式系统的NMPC理论和应用成果正在不断出现[141–145]. 这类新兴NMPC策略紧密结合网络化和分布式系统的内在特征(如随机时延、丢包、连续和离散变量混杂、多模态切换等), 研究NMPC闭环稳定性和鲁棒性等理论问题, 所得结果超越了传统NMPC理论, 是对现有NMPC结果的深化和拓展. 由于网络化和分布式系统的内在特征, 将可能导致NMPC原有良好性能的恶化, 甚至丧失. 目前, 针对这些问题的NMPC理论与应用研究成为了近期的热点和难点.

3) 非线性预测控制优化算法和工程应用.

根据预测控制的特点合理开发出实时性较好的优化算法是工程应用中十分迫切的研究, 也是目前推动NMPC研究的主要动力之一. 可以预计, NMPC策略的高效计算将为成为NMPC实用化的标志之一.

参考文献(References):

[1] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: stability and optimality [J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.

[2] KWON W H, HAN S, AHN C K. Advances in nonlinear predictive control: a survey on stability and optimality [J]. *International Journal of Control, Automations and Systems*, 2004, 2(1): 15 – 22.

[3] 席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状 [J]. 自动化学报, 2008, 34(10): 1225 – 1234.
(XI Yugeng, LI Dewei. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(10): 1225 – 1234.)

[4] RAIMONDO D M, LIMON D, LAZAR M, et al. Min-max model predictive control of nonlinear systems: a unifying overview on stability [J]. *European Journal of Control*, 2009, 15(1): 5 – 27.

[5] 席裕庚, 耿晓军, 陈虹. 预测控制性能研究的新进展 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 469 – 475.
(XI Yugeng, GENG Xiaojun, CHEN Hong. Recent advances in research on predictive control performance [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(4): 469 – 475.)

[6] 陈虹, 刘志远, 解小华. 非线性模型预测控制的现状与问题 [J]. 控制与决策, 2001, 16(4): 385 – 391.
(CHEN Hong, LIU Zhiyuan, JIE Xiaohua. Nonlinear model predictive control: The state and open problems [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(4): 385 – 391.)

[7] FINDEISEN R, IMSLAND L, ALLOWGER F, et al. State and output feedback nonlinear model predictive control: an overview [J]. *European Journal of Control*, 2003, 9(2/3): 190 – 206.

[8] MAGNI L, SCATTOLINI R. Robustness and robust design of MPC for nonlinear discrete-time systems [C] //*Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 239 – 254.

[9] MORARI M, LEE J H. Model predictive control: past, present and future [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1999, 23(4): 667 – 682.

[10] QIN S J, BADGWELL T A. A survey of industrial model predictive control technology [J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 11(7): 733 – 764.

[11] CANNON M. Efficient nonlinear model predictive control algorithms [J]. *Annual Reviews in Control*, 2004, 28(2): 229 – 237.

[12] DIEHL M, FERREAU H J, HAVERBEKE N. Efficient numerical methods for nonlinear MPC and moving horizon estimation [C] //*Assessment and Future Directions of Nonlinear model predictive control*. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 391 – 417.

[13] MACIEJOWSKI J M. *Predictive Control: with Constraints* [M]. New York: Prentice Hall, 2002.

[14] CAMACHO E F, BORDONS C. *Model Predictive Control* [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 2004.

[15] 钱积新, 赵均, 徐祖华. 预测控制 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2007.
(QIAN Jixin, ZHAO Jun, XU Zuhua. *Predictive Control* [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2007.)

[16] 丁宝苍. 预测控制的理论与方法 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
(DING Baocang. *Predictive Control Theory and Methods* [M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2008.)

[17] GRUNE L, PANNEK J. *Nonlinear Model Predictive Control* [M]. London: Springer-verlag, 2011.

[18] LEE J H. Model predictive control: review of the three decades of development [J]. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2011, 9(3): 415 – 424.

[19] MAYNE D Q. Nonlinear model predictive control: an assessment [C] //*Proceedings of the 5th International Conference on Chemical Process Control*. New York: AIChE, 1997: 217 – 231.

[20] SCOKAERT P O M, MAYNE D Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(8): 1136 – 1142.

[21] BEMPORAD A, MORARI M, DDA V, et al. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(1): 3 – 20.

[22] EL-FARRA N H, MHASKAR P, CHRISTOFIDES P D. Hybrid predictive control of nonlinear systems: method and applications to chemical processes [J]. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2004, 14(2): 199 – 225.

[23] MICHALSKA H, MAYNE D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(11): 1623 – 1633.

[24] ZOU T, LI S Y, DING B C. A dual-mode nonlinear model predictive control with the enlarged terminal constraint sets [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(1): 21 – 27.

[25] IMSLAND L, ROSSITER J A, PLUYMERS, et al. Robust triple mode MPC [J]. *International Journal of Control*, 2008, 81(4): 679 – 689.

[26] BLANCHINI F. Set invariance in control [J]. *Automatica*, 1999, 35(11): 1747 – 1767.

[27] FONTES F A C C. A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers [J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42 (2): 127 – 143.

[28] 于树友, 陈虹, 张鹏, 等. 一种基于LMI的非线性模型预测控制终端域优化方法 [J]. 自动化学报, 2008, 34(7): 798 – 804.
(YU Shuyou, CHEN Hong, ZHANG Peng, et al. An LMI optimization approach for enlarging the terminal region of MPC for nonlinear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(7): 798 – 804.)

[29] SCOKAERT P O M, RAWLINGS J B. Feasibility issues in linear model predictive control [J]. *AIChE Journal*, 1999, 45(8): 1649 – 1659.

[30] BIEGLER L T. Efficient solution of dynamic optimization and NMPC subproblems [C] //*Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*. Boston: Birkhauser-Verlag, 2000: 219 – 243.

[31] BITMEAD R R, GEVERS M, WERTZ V. *Adaptive Optimal Control– The Thinking Man's GPC* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.

[32] KEERTHI S S, GILBERT E G. Optimal, infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: stability and moving-horizon approximation [J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 1988, 57(2): 265 – 293.

[33] MAYNE D Q, MICHALSKA H. Receding horizon control of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(7): 814 – 824.

[34] ALAMIR M, BORNARD G. Stability of truncated infinite constrained receding horizon scheme: the general discrete nonlinear case [J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1353 – 1356.

[35] SCOKAERT P O M, MAYNE D Q, RAWLINGS J B. Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability) [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(3): 648 – 654.

[36] LEE J W. Exponential stability of constrained receding horizon control with terminal ellipsoid constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(1): 83 – 88.

[37] HE D F, JI H B. Constructive model predictive control for constrained nonlinear systems [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2008, 29(4): 467 – 481.

[38] CHEN H, ALLGOWER F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability [J]. *Automatica*, 1998, 34(10): 1205 – 1217.

[39] MAGNI L, DE NICOLAO G, MAGNANI L, et al. A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(9): 1351 – 1362.

[40] DEHAAN D, GUAY M. A real-time framework for model predictive control of continuous time nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(11): 2047 – 2057.

[41] JADBABAIE A, HAUSER J. On the stability of receding horizon control with a general cost [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 674 – 678.

[42] LIMON D, ALAMO T, SALAS F, et al. On the stability of constrained MPC without terminal constraint [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 832 – 836.

[43] GRAICHEN K. A fixed-point iteration scheme for real-time model predictive control [J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1300 – 1305.

[44] PRIMBS J A, NEVISTIC V, DOYLE J C. A receding horizon generalization of pointwise min-norm controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 898 – 909.

[45] KOTHARE D O S L, MORARI M. Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(6): 1053 – 1071.

[46] PANJAPORNPON C, SOROUSH M. Shortest-prediction-horizon nonlinear model predictive control with guaranteed asymptotic stability [J]. *International Journal of Control*, 2007, 80(10): 1533 – 1543.

[47] MCCONLEY M W, APPLEBY B D, DAHLEH M A, et al. A computationally efficient Lyapunov based scheduling procedure for control of nonlinear systems with stability guarantees [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(1): 33 – 49.

[48] MHASKAR P, EL-FARRA N H, CHRISTOFIDES P D. Stabilization of nonlinear systems with state and control constraints using Lyapunov-based predictive control [J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(8): 650 – 659.

[49] RAWLINGS J B, BONNE D, JORGENSEN J B, et al. Unreachable setpoints in model predictive control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2209 – 2215.

[50] DIEHL M, AMRIT R, RAWLINGS J B. A Lyapunov function for economic optimizing model predictive control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(3): 703 – 707.

[51] ANGELI D, AMRIT R, RAWLINGS J B. On average performance and stability of economic model predictive control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1615 – 1626.

[52] ZAVALA V M, FLORES-TLACUAHUAC A. Stability of multiobjective predictive control: an utopia-tracking approach [J]. *Automatica*, 2012, 48(10): 2627 – 2632.

[53] HUANG R, HARINATH E, BIEGLER L T. Lyapunov stability of economically oriented NMPC for cyclic processes [J]. *Journal of Process Control*, 2011, 21(4): 501-509.

[54] GRÜNE L. Analysis and design of unconstrained nonlinear MPC schemes for finite and infinite dimensional systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 47(2): 546 – 558.

[55] GRÜNE L, PANNEK J, SEEHAFER M, et al. Analysis of unconstrained nonlinear MPC schemes with time-varying control horizon [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2010, 48(8): 4938 – 4962.

[56] REBLE M, ALLGOWER F. Unconstrained model predictive control and suboptimality estimates for nonlinear continuous-time systems [J]. *Automatica*, 2012, 48(8): 1812 – 1817.

[57] CHEN W H, BALLANCE D, REILLY J O. Optimisation of attraction domains of nonlinear MPC via LMI methods [C] //*Proceedings of the 2001 American Control Conference*. New York: IEEE, 2001, 4: 3067 – 3072.

[58] POURSAFAR N, TAGHIRAD H D, HAERI M. Model predictive control of nonlinear discrete time systems: a linear matrix inequality approach [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(10): 1922 – 1932.

[59] OZKAN L, KOTHARE M V. Control of a solution copolymerizetion reactor using multi-model predictive [J]. *Chemical Engineering Science*, 2003, 58(7): 1207 – 1221.

[60] SCOKAERT P O M, RAWLINGS J B, MEADOWS E S. Discrete-time stability with perturbations: application to model predictive control [J]. *Automatica*, 1997, 33(3): 463 – 470.

[61] MAGNI L, SEPULCHRE R. Stability margins of nonlinear receding horizon control via inverse optimality [J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 32(4): 241 – 245.

[62] DE NICOLAO G, MAGNI L, SCATTOLINI R. On the robustness properties of receding-horizon control with terminal constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 451 – 453.

[63] 李阳春, 许晓鸣，杨煜普. 一类非线性预测控制系统的鲁棒稳定性 [J]. 自动化学报, 1999, 25(6): 852 – 855.
(LI Yangchun, XU Xiaoming, YANG Yupu. The robust stability for a type of nonlinear predictive control system [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(6): 852 – 855.)

[64] YU S Y, REBLE M, CHEN H, et al. Inherent reboustness properties of quasi-infinite horizon NMPC [C] //*Proceedings of the 2011 Internatiaonal Federation of Automatic Control World Congress*. Milano, Italy: IFAC, 2011: 179 – 184.

[65] LIMON D, ALAMO T, CAMACHO E F. Input-to-state stable MPC for constrained discrete-time nonlinear systems with bounded additive uncertainties [C] //*Proceedings of the 41st IEEE Control and Decision Conference*. New York: IEEE, 2002: 4619 – 4624.

[66] PIN G, RAIMONDO D M, MAGNI L, et al. Robust model predictive control of nonlinear systems with bounded and state-dependent uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1681 – 1687.

[67] LIMON D, BRAVE J M, ALAMO T, et al. Robust MPC of constrained nonlinear systems based on interval arithmetic [J]. *IEE Proceedings−Control Theory and Applications*, 2005, 152(3): 325 – 332.

[68] JIANG Z P, WANG Y. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(6): 857 – 869.

[69] 耿晓军, 席裕庚. 衰减扰动下非线性预测控制系统的鲁棒稳定性 [J]. 控制与决策, 1999, 14(4): 369 – 372.
(GENG Xiaojun, XI Yugeng. Robust stability of nonlinear predictive control systems with decaying disturbances [J]. *Control and Decision*, 1999, 14(4): 369 – 372.)

[70] 杨国诗, 何德峰, 薛美盛. 基于鲁棒控制Lyapunov函数的非线性预测控制 [J]. 控制与决策, 2010, 25(11): 1752 – 1756.
(YANG Guoshi, HE Defeng, XUE Meisheng. Nonlinear predictive control based on robust control Lyapunov function [J]. *Control and Decision*, 2010, 25(11): 1752 – 1756.)

[71] CHEN H, SCHERE C W, ALLGOWER F. A game theoretic approach to nonlinear robust receding horizon control of constrained systems [C] //*Proceedings of the 1997 American Control Conference*. New York: IEEE, 1997: 3073 – 3077.

[72] LEE J H, YU Z H. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters [J]. *Automatica*, 1997, 33(5): 763 – 781.

[73] MAGNI L, NIJMEIJER H, VAN DER SHAFT A. A receding-horizon approach to the nonlinear H control problem [J]. *Automatica*, 2001, 37(3): 429 – 435.

[74] DIEHL M. Formulation of closed-loop min-max MPC as a quadratically constrained quadratic program [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 339 – 343.

[75] 何德峰, 季海波, 郑涛. 持续扰动下的非线性H_∞鲁棒预测控制 [J]. 自动化学报, 2008, 34(2): 215 – 219.
(HE Defeng, JI Haibo, ZHENG Tao. Nonlinear H_∞ robust predictive control with bounded persistent disturbances [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(2): 215 – 219.)

[76] MHASKAR P, EL-FARRA N H, CHRISTOFIDES P D. Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1670 – 1680.

[77] COLANER P, SCATTOLINI R. Robust model predictive control of discrete-time switched systems [C] //*Proceedings of the 3rd International Federation of Automatic Control Workshop on Periodic Control Systems*. Anichkov Place, Russia: IFAC, 2007: 208 – 212.

[78] LIMON D, ALAMO T, SALAS F, et al. Input-to-state stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties [J]. *Automatica*, 2006, 42(5): 797 – 803.

[79] MAGNI L, RAIMONDO D M, SCATTOLINI R. Regional input-to-state stability for nonlinear model predictive control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(9): 1548 – 1553.

[80] LAZAR M, MUNOZ DE LA PENA D, HEEMELS W P M H, et al. On input-to-state stability of min-max nonlinear model predictive control [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(1): 39 – 48.

[81] HE D F, JI H B, ZHENG T. On robustness of constrained nonlinear H predictive controllers with disturbances [J]. *International Journal of Systems Science*, 2010, 41(2): 203 – 212.

[82] WAN Z Y, KOTHARE M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 2003, 39(5): 837 – 846.

[83] JIA D, KROGH B H, STURSBERG O. An LMI approach to robust model predictive control [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2005, 127(2): 347 – 365.

[84] FENG L, WANG J, POH E. Improved robust model predictive control with structured uncertainty [J]. *Journal of Process Control*, 2007, 17(8): 683 – 688.

[85] CHEN Q X, HE D F, YU L. Input-to-state stability of min-max mpc scheme for nonlinear time-varying delay systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2012, 14(2): 489 – 501.

[86] 黄骅, 何德峰, 俞立. 基于多面体描述系统的鲁棒非线性预测控制 [J]. 自动化学报, 2012, 38(12): 1906 – 1912.
(HUANG Hua, HE Defeng, YU Li. Robust nonlinear predictive control based on polytopic description systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(12): 1906 – 1912.)

[87] RAO C V, WRIGHT S J, RAWLINGS J B. Application of interior-point methods to model predictive control [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1998, 99(3): 723 – 757.

[88] WANG Y, BOYD S. Fast model predictive control using online optimization [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technlogy*, 2010, 18(2): 267 – 278.

[89] INDRANEEL D. An active set quadratic programming algorithm for real-time model predictive control [J]. *Optimization Methods and Software*, 2006, 21(5): 833 – 849.

[90] PANNOCCHIA G, RAWLINGS J B, WRIGHT S. Fast, large-scale model predictive control by partial enumeration [J]. *Automatica*, 2007, 43(5): 852 – 860.

[91] ZHENG A, ZHANG W H. Computationally efficient nonlinear model predictive control algorithm for control of constrained nonlinear systems [M] //*Nonlinear Predictive Control: Theory and Practice*. London: The Institution of Electrical Engineers, 2001: 173 – 187.

[92] GRAICHEN K, KUGI A. Stability and incremental improvement of suboptimal MPC without terminal constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2576 – 2580.

[93] CHEN W H, BALLANCE D J, REILLY J O. Model predictive control of nonlinear systems: computational burden and stability [J]. *IEE Proceeding−Control Theory and Applications*, 2000, 147(4): 387 – 394.

[94] CANALE M, FAGIANO L, MILANESE M, et al. Set membership approximate of predictive control laws: the tradeoff between accuracy and complexity [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(12): 2907 – 2920.

[95] LEE Y I, KOUVARITAKIS B, CANNON M. Constrained receding horizon predictive control for nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2003, 38(12): 2093 – 2102.

[96] CHEN W H. Predictive control of general nonlinear systems using approximation [J]. *IEE Proceedings−Control Theory and Applications*, 2004, 151(2): 137 – 144.

[97] HU X B, CHEN W H. Model predictive control of nonlinear systems: Stability region and feasible initial control [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2007, 4(2): 195 – 202.

[98] KURTZ M J, HENSON M A. Feedback linearizing control of discrete-time nonlinear systems with input constraints [J]. *International Journal of Control*, 1998, 70(4): 603 – 616.

[99] POULSEN N K, KOUVARITAKIS B, CANNON M. Nonlinear constrained predictive control applied to a coupled-tank apparatus [J]. *IEE Proceedings−Control Theory and Applications*, 2001, 148(1): 17 – 24.

[100] 郑涛, 陈薇, 王子洋, 等. 一类快速非线性预测控制的分析与改进 [J]. 中国科学技术大学学报, 2007, 37(12): 1483 – 1487.
(ZHENG Tao, CHEN Wei, WANG Ziyang, et al. Analysis and improvement of a fast nonlinear predictive control algorithm with constraints [J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2007, 37(12): 1483 – 1487.)

[101] ALAMIR M. A framework for real-time implementation of low-dimensional parameterized NMPC [J]. *Automatica*, 2012, 48(1): 198 – 204.

[102] GOULART P J, KERRIGAN E C, MACIEJOWSKI J M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints [J]. *Automatica*, 2006, 42(4): 523 – 533.

[103] LOVASS C, MARE J. Affine and predictive control policies for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1280 – 1284.

[104] IMSLAND L, BAR N, FOSS B A. More efficient predictive control [J]. *Automatica*, 2005, 41(8): 1395 – 1403.

[105] 史冬琳, 毛志忠. 基于仿射控制输入的输入状态稳定非线性预测控制 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(10): 1388 – 1382.
(SHI Donglin, MAO Zhizhong. Input-to-state stabilizing nonlinear model predictive control based on affine control input [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(10): 1388 – 1382.)

[106] ALESSIO A, BEMPORAD A. A survey on explicit model predictive control [C] //*Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 345 – 369.

[107] PISTIKOPOULOS E N. Perspectives in multiparametric programming and explicit model predictive control [J]. *AIChE Journal*, 2009, 55(8): 1918 – 1925.

[108] GRANCHAROVA A, JOHANSEN T A, TONDEL P. Computational aspects of approximate explicit nonlinear model predictive control [C] //*Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 181 – 192.

[109] 杜晓宁, 席裕庚. 预测控制优化变量的集结策略 [J]. 控制与决策, 2002, 17(5): 563 – 566.
(DU Xiaoning, XI Yugeng. Aggregation optimization strategy in model predictive control [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(5): 563 – 566.)

[110] 李德伟, 席裕庚, 秦辉. 预测控制等效集结优化策略的研究 [J]. 自动化学报, 2007, 33(3): 302 – 308.
(LI Dewei, XI Yugeng, QIN Hui. An equivalent aggregation optimization strategy in model predictive control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(3): 302 – 308.)

[111] SUN J, CHEN S H, KOLMANOVSKY I. A stable block model predictive control with variable implementation horizon [J]. *Automatica*, 2007, 43(11): 1945 – 1953.

[112] HANBA S. Robust nonlinear model predictive control with variable block length [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1618 – 1622.

[113] BACIC M, CANNON M, KOUVARITAKIS B. Constrained control of SISO bilinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1443 – 1447.

[114] MARTINSEN F, BIEGLER L T, FOSS B A. A new optimization algorithm with application to nonlinear MPC [J]. *Journal of Process Control*, 2004, 14(8): 853 – 865.

[115] LI W C, BIEGLER L T. New-type controllers for constrained nonlinear processes with uncertainty [J]. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 1990, 29(8): 1647 – 1657.

[116] MUSKE K R, HOWSE J W, HANSEN G A. Lagrangian solution methods for nonlinear model predictive control [C] //*Proceedings of the 2000 American Control Conference*. New York: IEEE, 2000: 4239 – 4243.

[117] OHTSUKA T. A continuation/gmres method for fast computation of nonlinear receding horizon control [J]. *Automatica*, 2004, 40(4): 563 – 574.

[118] ZAVALA V M, BIEGLER L T. The advanced-step NMPC controller: optimality, stability and robustness [J]. *Automatica*, 2009, 45(1): 86 – 93.

[119] LEINEWEBER D, BAUER I, SCHAFER A, et al. An efficient multiple shooting based reduced SQP strategy for large-scale dynamic process optimization (Part I and II) [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2003, 27(2): 157 – 174.

[120] TAMIMI J. LI P. A combined approach to nonlinear model predictive control of fast systems [J]. *Journal of Process Control*, 2010, 20(9): 1092 – 1102.

[121] KIRCHES C, WIRSCHING L, BOCK H G, et al. Efficient direct multiple shooting for nonlinear model predictive control on long horizons [J]. *Journal of Process of Control*, 2012, 22(3): 540 – 550.

[122] TENNY M J, WRIGHT S J, RAWLINGS J B. Nonlinear model predictive control via feasibility-perturbed sequential quadratic programming [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2004, 28(1): 87 – 121.

[123] HOUSKA B, FERREAU H J, DIEHL M. An auto-generated real-time iteration algorithm for nonlinear MPC in the microsecond range [J]. *Automatica*, 2011, 47(10): 2279 – 2285.

[124] DIEHL M, BOCK H G, SCHLODER J P, et al. Real-time optimization and nonlinear model predictive control of processes governed by differential-algebraic equations [J]. *Journal of Process Control*, 2002, 12(4): 577 – 585.

[125] BIEGLER L T. Advances in nonlinear programming concepts for process control [J]. *Journal of Process Control*, 1998, 8(5/6): 301 – 311.

[126] KAMESWARAN S, BIEGLER L T. Simultaneous dynamic optimization strategies: recent advances and challenges [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2006, 30(10/11/12): 1560 – 1575.

[127] ONNEN C, BABUSKA R, KAYMAK U, et al. Genetic algorithm for optimization in predictive control [J]. *Control Engineering Practice*, 1997, 5(10): 1363 – 1372.

[128] VAN DER LEE J H, SVRCEK W Y, YOUNG B R. A tuning algorithm for model predictive controllers based on genetic algorithms and fuzzy decision making [J]. *ISA Transactions*, 2008, 47(1): 53 – 59.

[129] CANNON M, DESHMUKH V, KOUVARITAKIS B. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets [J]. *Automatica*, 2003, 39(8): 1487 – 1494.

[130] LIMON D, ALAMO T, CAMACHO E F. Enlarging the domain of attraction of MPC controllers [J]. *Automatica*, 2005, 41(4): 629 – 635.

[131] FIACCHINI M, ALAMO T, CAMACHO E F. Invariant sets computation for convex difference inclusions systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(8): 819 – 826.

[132] KOKOTOVIC P, ARCAK M. Constructive nonlinear control: a historical perspective [J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 637 – 662.

[133] MAYNE D Q, RAKOVIC S V, FINDEISEN R, et al. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems [J]. *Automatica*, 2007, 42(7): 1217 – 1222.

[134] WAN Z Y, KOTHARE M. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities [J]. *Journal of Process Control*, 2002, 12(7): 763 – 774.

[135] 平续斌, 丁宝苍, 韩崇昭. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制 [J]. 自动化学报, 2012, 38(1): 31 – 37.
(PING Xubin, DING Baocang, HAN Chongzhao. Dynamic output feedback robust model predictive control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(1): 31 – 37.)

[136] DING B C, XI Y G, CYCHOWSKI M T, et al. A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control [J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 258 – 264.

[137] WAN Z Y, KOTHARE M. Efficient scheduled stabilizing output feedback model predictive control for constrained nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1172 – 1177.

[138] FINDEISEN R, IMSLAND L, ALLGOWER F, et al. State and output feedback nonlinear model predictive control: an overview [J]. *European Journal of Control*, 2003, 9(2/3): 190 – 206.

[139] XU Z, ZHAO J, QIAN J, et al. Nonlinear MPC using an identified LPV model [J]. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2009, 48(6): 3043 – 3051.

[140] XU Z, ZHU Y, HAN K, et al. A multi-iteration pseudo-linear regression method and an adaptive disturbance model for MPC [J]. *Journal of Process Control*, 2010, 20(4): 384 – 395.

[141] MULLER C, QUEVEDO D E, GOODWIN G C. How good is quantized model predictive control with horizon one? [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(11): 2623 – 2638.

[142] PIN G, PARISINI T. Networked predictive control of uncertain constrained nonlinear systems: recursive feasibility and input-to-state stability analysis [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 72 – 85.

[143] FERRARI-TRECATE G, GALBUSERA L, MARCIANDI M P E, et al. Model predictive control schemes for consensus in multi-agent systems with single- and double-integrator dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(11): 2560 – 2571.

[144] OLIVEIRE L B, CAMPONOGARA E. Multi-agent model predictive control of signaling split in urban traffic networks [J]. *Transportation Research, Part C*, 2010, 18(1): 120 – 139.

[145] CHRISTOFIDES P D, SCATTOLINI R, PENA D M, et al. Distributed model predictive control: a tutorial review and future research directions [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2013, 51(4): 21 – 41.

作者简介:

何德峰　(1979–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为非线性预测控制与鲁棒控制等, E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn;

丁宝苍　(1972–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为模型预测控制理论与应用, E-mail: baocang.ding@gmail.com;

于树友　(1974–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为模型预测控制理论与应用, E-mail: shuyou@jlu.edu.cn.