

## 弹道坐标中三维鲁棒非线性导引律

严 晗<sup>†</sup>, 季海波

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

**摘要:** 本文针对机动目标拦截问题, 考虑导弹控制系统动态特性及其不确定性, 利用分块反步设计思想, 结合输入-状态稳定性理论, 在弹道坐标系中设计了一种三维非线性鲁棒导引律. 与大多数已有的导引律相比, 本文直接在弹道坐标系中设计导引律, 并且所设计的导引律可有效克服控制系统动态特性和不确定性对制导效果的影响, 理论分析和数值仿真表明, 本文设计的导引律对目标机动和控制系统所受的外来有界扰动均具有较强的鲁棒性.

**关键词:** 机动目标; 控制系统; 不确定性; 分块反步设计; 输入-状态稳定性; 鲁棒性

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Three-dimensional robust nonlinear guidance law in trajectory coordinates

YAN Han<sup>†</sup>, JI Hai-bo

(Department of Automation, University of Science & Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

**Abstract:** Considering the autopilot dynamics and uncertainties, we, on the basis of the block backstepping method and input-to-state stability theory, propose in trajectory coordinates a three-dimensional nonlinear guidance law for intercepting a maneuvering target. Being distinguished from other existing methods, this guidance law is directly designed in trajectory coordinates; it can compensate for the effects of the autopilot dynamics and uncertainties. The simulation results show that our scheme has strong robustness with respect to target maneuvers and bounded disturbances in the control loop.

**Key words:** maneuvering targets; control loop; uncertainties; block backstepping; input-to-state stability; robustness

### 1 引言(Introduction)

在导弹制导与控制领域, 比例导引以其实现简单而得到广泛的实际应用<sup>[1]</sup>, 但在应对高速、大机动目标时往往不能奏效. 因此越来越多的现代控制方法被用于导引律的设计, 如非线性 $H_\infty$ 控制<sup>[2]</sup>、滑模控制<sup>[3-5]</sup>、有限时间控制<sup>[4-6]</sup>、非线性几何理论<sup>[7]</sup>和输入-状态稳定性(input-to-state stability, ISS)理论<sup>[8]</sup>等. 很多导引律的设计没有考虑导弹控制系统的动态特性, 而这也是影响制导精度的因素之一<sup>[5,9]</sup>. 因此, 一些导引律的设计过程中, 假设导弹垂直于视线的加速度分量满足一阶惯性环节或二阶环节, 以此模拟自动驾驶仪的动态特性<sup>[5,9-12]</sup>. 文献[5]将导弹自动驾驶仪的动态特性用一阶惯性环节描述, 针对二维拦截问题利用有限时间滑膜理论设计了导引律, 之后又应用在了三维问题中. 同样, 文献[9]也用一阶惯性环节描述导弹自动驾驶仪的动态特性, 在目标加速度及其一阶导数的上界已知的情况下, 利用递推Lyapunov方法设计了三维非线性导引律. 递推Lyapunov方法也称为反步设计法(backstepping), 它可应用于控制量和被控量

之间存在一个或多个积分器的非线性系统控制问题, 文献[13]推广了这个方法, 利用分块backstepping设计思想, 针对飞行器姿态调节问题设计了可使姿态角对有界噪声或扰动具有ISS稳定性的控制方案. 严格来讲, 文献[5]和文献[13]所设计的控制律包含未知扰动, 因此在实际中难以实现.

目前绝大多数学者在视线坐标系中设计导引律, 但在实际空战中, 导弹的轴向速度是不可控的, 也就是说导弹的飞行速度大小不可改变, 只能改变其方向<sup>[9,14-15]</sup>, 即导弹通过调整舵面偏角改变气动升力和气动侧力, 或通过安装在导弹法向上的姿态控制发动机和轨道控制发动机改变垂直于速度方向的推力, 进而调整飞行方向. 因此导弹的控制系统直接影响弹道坐标系下的法向加速度和侧向加速度, 并且控制系统的动态特性和不确定性也体现在法向加速度和侧向加速度上. 只有当导弹速度方向与视线方向夹角不大时, 视线坐标系中的导弹加速度分量才与弹道坐标系中的加速度分量近似相等, 这时可在视线坐标系中设计导引律; 而当导弹速度方向与视线方向夹角较大时,

在弹道坐标系中设计导引律则更便于应用在实际的制导问题中. 文献[4]针对二维的机动目标拦截问题, 在导弹的弹道坐标系中设计了鲁棒导引律, 但这种导引律仅局限于二维情况, 并且不能克服导弹控制系统动态特性的影响.

本文首先推导了导弹弹道坐标系和视线坐标系中加速度的关系式, 并结合三维空间导弹与目标相对运动模型, 考虑控制系统的动态特性及其不确定性, 利用分块反步设计方法和ISS理论在弹道坐标系中设计了一种三维非线性鲁棒导引律, 证明了这种导引律可使视线角速率对目标机动和控制系统的非线性耦合项对制导效果产生的影响, 该方法还可处理弹道坐标系和视线坐标系各通道之间的交叉耦合, 与文献[13]相比, 所设计的导引律不包含未知扰动.

## 2 导弹与目标相对运动模型(Relative motion model between missile and target)

球坐标系中的导弹与目标三维相对运动如图1所示<sup>[6]</sup>, 其中:  $M$ 和 $T$ 分别代表导弹和目标,  $MT$ 为视线(line-of-sight, LOS), 直角坐标系 $M-xyz$ 固连在导弹上,  $r$ 为二者相对距离,  $\theta_L$ 和 $\varphi_L$ 分别是视线倾角和视线偏角,  $\theta_L$ 和 $\varphi_L$ 与相对距离 $r$ 确定了导弹与目标的相对位置. 设 $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$ 为沿球坐标系 $(r, \theta_L, \varphi_L)$ 各轴方向的单位向量. 相对速度可由 $\dot{\mathbf{r}} = r\dot{\mathbf{e}}_r$ 求得

$$\dot{\mathbf{r}} = V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta}_L \mathbf{e}_\theta + r \dot{\varphi}_L \cos \theta_L \mathbf{e}_\varphi. \quad (1)$$

对式(1)再次求导, 得沿坐标轴3个方向的方程分别为

$$\ddot{r} = r(\dot{\varphi}_L)^2 \cos^2 \theta_L + r(\dot{\theta}_L)^2 + a_{T_r} - a_{M_r}, \quad (2a)$$

$$\ddot{\theta}_L = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}_L - r(\dot{\varphi}_L)^2 \cos \theta_L \sin \theta_L + a_{T_{\theta_L}} - a_{M_{\theta_L}}}{r}, \quad (2b)$$

$$\ddot{\varphi}_L = \frac{-2\dot{r}\dot{\varphi}_L}{r} + 2\dot{\varphi}_L \dot{\theta}_L \tan \theta_L + \frac{a_{T_{\varphi_L}} - a_{M_{\varphi_L}}}{r \cos \theta_L}, \quad (2c)$$

其中 $(a_{M_r}, a_{M_{\theta_L}}, a_{M_{\varphi_L}})$ 和 $(a_{T_r}, a_{T_{\theta_L}}, a_{T_{\varphi_L}})$ 分别为导弹和目标的加速度沿球坐标系 $(r, \theta_L, \varphi_L)$ 各轴方向的分量.

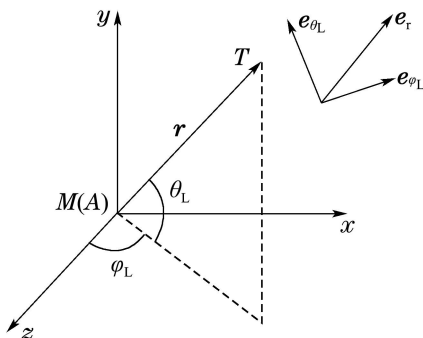


图1 导弹与目标相对运动示意图

Fig. 1 Scenario of relative motion between missile and target

地面坐标系 $A-xyz$ 和弹道坐标系 $O-x'y'z'$ 的相对关系如图2所示<sup>[16]</sup>. 其中:  $Ox'$ 轴与导弹质心的速度矢量 $\mathbf{V}_M$ 重合,  $Oy'$ 轴位于包含 $\mathbf{V}_M$ 的铅垂平面内, 且垂直于 $Ox'$ 轴;  $\theta_V$ 和 $\psi_V$ 分别表示弹道倾角和弹道偏角. 设弹道坐标系 $O-x'y'z'$ 中沿3个坐标轴方向的合外力分量分别为 $F_V, F_\theta$ 和 $F_\psi$ , 则导弹质心运动的动力学方程为<sup>[16]</sup>

$$ma_V = m\dot{V}_M = F_V, \quad (3a)$$

$$ma_\theta = mV_M \dot{\theta}_V = F_\theta, \quad (3b)$$

$$ma_\psi = -mV_M \cos \theta_V \dot{\psi}_V = F_\psi, \quad (3c)$$

其中:  $a_V = \dot{V}_M$ 为加速度矢量在弹道切线( $Ox'$ )上的投影, 又称为切向加速度;  $a_\theta = V_M \dot{\theta}_V$ 为加速度矢量在弹道法线( $Oy'$ )上的投影, 又称为法向加速度;  $a_\psi = -V_M \cos \theta_V \dot{\psi}_V$ 为加速度矢量在 $Oz'$ 轴上的投影分量, 也称为侧向加速度.

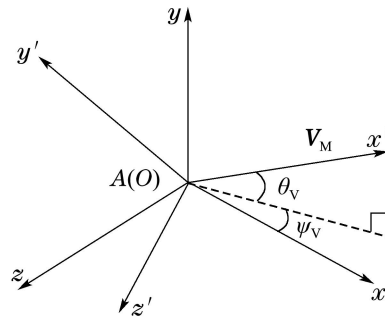


图2 导弹与目标的运动

Fig. 2 Relative motion between missile and target

若已知地面坐标系 $A-xyz$ 中的列矢量 $x, y, z$ , 可利用下式求在弹道坐标系 $O-x'y'z'$ 各轴上的分量 $x', y', z'$ <sup>[16]</sup>:

$$[x' \ y' \ z']^T = \mathbf{L}(\psi_V, \theta_V)[x \ y \ z]^T, \quad (4)$$

其中变换矩阵为

$$\mathbf{L}(\psi_V, \theta_V) = \begin{bmatrix} \cos \theta_V \cos \psi_V & \sin \theta_V & -\cos \theta_V \sin \psi_V \\ -\sin \theta_V \cos \psi_V & \cos \theta_V & \sin \theta_V \sin \psi_V \\ \sin \psi_V & 0 & \cos \psi_V \end{bmatrix},$$

因此, 根据式(4)以及弹道倾角和弹道偏角的定义知导弹在弹道坐标系和视线坐标系中加速度的转化关系式为

$$[a_{M_r} \ a_{M_{\theta_L}} \ -a_{M_{\varphi_L}}]^T = \mathbf{L}(\varphi_L - \frac{\pi}{2}, \theta_L) \mathbf{L}^{-1}(\psi_V, \theta_V)[a_V \ a_\theta \ a_\psi]^T. \quad (5)$$

导弹控制系统的特性用带有动态不确定项的一阶惯性环节描述<sup>[9, 12]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{a}_\theta = -\frac{1}{\tau} a_\theta + \frac{1}{\tau} u_1 + \Delta_\theta, \\ \dot{a}_\psi = -\frac{1}{\tau} a_\psi + \frac{1}{\tau} u_2 + \Delta_\psi, \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $\tau$ 为自动驾驶仪的时间常数,  $\Delta_\theta, \Delta_\psi$ 为扰动,  $u_1, u_2$ 分别为弹道法向控制输入和弹道侧向控制输入.

方程组(2)-(3)(5)-(6)构成了导弹与目标相对运动动力学与运动学方程.

在实际空中交战中, 导弹的速度大小一般不可控, 而只能改变其飞行方向, 因此这里假设导弹以最大速度飞行, 即 $a_V = 0$ . 而当末制导开始时, 导弹和目标相对距离变化率小于零, 因此只要控制视线角速率为零, 就能确保成功拦截. 基于以上思想, 定义状态变量

$$\begin{cases} x_1 = \omega_\theta = \dot{\theta}_L, & x_2 = \omega_\phi = \dot{\phi}_L \triangleq \dot{\phi}_L \cos \theta_L, \\ z_1 = a_\theta, & z_2 = a_\psi, \end{cases} \quad (7)$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} \sin \theta_L \sin \theta_V \sin(\varphi_L - \psi_V) + \cos \theta_L \cos \theta_V & -\sin \theta_L \cos(\psi_V - \varphi_L) \\ -\sin \theta_V \cos(\varphi_L - \psi_V) & -\sin(\varphi_L - \psi_V) \end{bmatrix}.$$

### 3 导引律设计(Guidance law design)

#### 3.1 鲁棒非线性控制研究(Robust nonlinear control research)

首先不失一般性地考虑系统

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)z + d_1(t), \quad (9a)$$

$$\dot{z} = P(x, z) + Q(x, z)u + d_2(t), \quad (9b)$$

其中: 向量函数 $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $P: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; 矩阵函数 $G: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ; 扰动向量函数 $d_1: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $d_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . 设函数 $f, P, G, Q$ 在所讨论的定义域内足够光滑, 且 $f(t, 0) = 0$ .

对系统(9)有如下定理成立:

**定理 1** 考虑系统(9), 设其矩阵函数 $Q(x, z)$ 和 $G(t, x)$ 均可逆, 则有控制律

$$u = -Q^{-1}(x, z)[k_2(z - \rho(t, x)) + G^T(t, x)x + P(x, z) - \frac{\partial \rho}{\partial x}(f(t, x) + G(t, x)z) - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2\delta_3^2} \|\frac{\partial \rho}{\partial x}\|^2(z - \rho(t, x))], \quad (10a)$$

$$\rho(t, x) = G^{-1}(t, x)[-k_1x - f(t, x)], \quad (10b)$$

其中:  $k_i = c_i + 0.5/\delta_i^2$ ,  $c_i > 0$ ,  $\delta_j > 0$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ , 使得系统在无扰动时具有指数稳定性, 有扰动时对 $t \geq 0$ 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \\ & e^{-ct} \left\| \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{bmatrix} \right\| + \delta \sqrt{\frac{1 - e^{-2ct}}{2c}} \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left\| \begin{bmatrix} d_1(\tau) \\ d_2(\tau) \end{bmatrix} \right\| \right), \quad (11) \end{aligned}$$

其中:  $\xi = x$ ,  $\eta = z - \rho(t, x)$ ,  $c = \min\{c_1, c_2\}$ ,  $\delta =$

则

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2\frac{V_r}{r}x_1 - x_2^2 \tan \theta_L \\ -2\frac{V_r}{r}x_2 + x_1x_2 \tan \theta_L \end{bmatrix} - B(x)\frac{\dot{z}}{r} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} a_{T\theta_L} \\ a_{T\varphi_L} \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \Delta_\theta \\ \Delta_\psi \end{bmatrix}, \quad (8b)$$

其中:  $x = [x_1 \ x_2]^T$ ,  $z = [z_1 \ z_2]^T$ ,  $V_r = \dot{r}$ ,

$$\max\{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_3^2}, \delta_2\}.$$

**证** 考虑子系统(9), 视 $z$ 为控制输入、 $x$ 为状态变量, 取虚拟控制为

$$\rho(t, x) = G^{-1}(t, x)(-k_1x - f(t, x)), \quad (12)$$

其中 $k_1$ 为正常数. 做变换

$$\xi = x, \quad \eta = z - \rho(t, x). \quad (13)$$

取Lyapunov函数

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi^T \xi + \frac{1}{2}\eta^T \eta, \quad (14)$$

则 $V(\xi, \eta)$ 沿系统(9)的变化率为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \eta^T(G^T \xi + P + Qu - \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial x}(f + Gz)) - \\ & k_1 \xi^T \xi + \xi^T d_1 + \eta^T d_2 - \eta^T \frac{\partial \rho}{\partial x} d_1. \quad (15) \end{aligned}$$

将不等式

$$\xi^T d_1 \leq \frac{1}{2\delta_1^2} \|\xi\|^2 + \frac{\delta_1^2}{2} \|d_1\|^2, \quad (16a)$$

$$\eta^T d_2 \leq \frac{1}{2\delta_2^2} \|\eta\|^2 + \frac{\delta_2^2}{2} \|d_2\|^2, \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} & -\eta^T \frac{\partial \rho}{\partial x} d_1 \leq \\ & |-\eta^T \frac{\partial \rho}{\partial x} d_1| \leq \|\eta\| \|\frac{\partial \rho}{\partial x}\| \|d_1\| \leq \\ & \frac{1}{2\delta_3^2} \|\eta\|^2 \|\frac{\partial \rho}{\partial x}\|^2 + \frac{\delta_3^2}{2} \|d_1\|^2, \quad (16c) \end{aligned}$$

其中 $\delta_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ 代入, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(k_1 - \frac{1}{2\delta_1^2}) \|\xi\|^2 + \eta^T [G^T \xi + P + Qu - \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial x}(f + Gz) + \frac{1}{2\delta_3^2} \|\frac{\partial \rho}{\partial x}\|^2 \eta + \frac{1}{2\delta_2^2} \eta] + \end{aligned}$$

$$\frac{\delta_1^2 + \delta_3^2}{2} \|d_1\|^2 + \frac{\delta_2^2}{2} \|d_2\|^2. \quad (17)$$

令  $k_1 - \frac{1}{2\delta_1^2} \triangleq c_1 > 0$ , 并将控制律(10a)代入式(17)得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -c_1 \|\xi\|^2 - c_2 \|\eta\|^2 + \frac{\delta_1^2 + \delta_3^2}{2} \|d_1\|^2 + \frac{\delta_2^2}{2} \|d_2\|^2 \leq \\ & -2cV + \frac{\delta^2}{2} (\|d_1\|^2 + \|d_2\|^2), \end{aligned} \quad (18)$$

其中:  $c = \min\{c_1, c_2\}$ ,  $\delta = \max\{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_3^2}, \delta_2\}$ . 对式(18)两边乘以  $e^{2ct}$  并在区间  $[0, t]$  上积分得

$$\begin{aligned} V(t) \leq & \frac{\delta^2}{2} \int_0^t e^{-2c(t-\tau)} (\|d_1(\tau)\|^2 + \\ & \|d_2(\tau)\|^2) d\tau + e^{-2ct} V(0) \leq \\ & \delta^2 \frac{1 - e^{-2ct}}{4c} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\|d_1(\tau)\|^2 + \\ & \|d_2(\tau)\|^2) + e^{-2ct} V(0), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

两边开方, 并将式(14)代入即可得式(11). 由式(11)知, 当扰动  $d_1 = d_2 = 0$  时, 有  $\xi(t) \rightarrow 0$ ,  $\eta(t) \rightarrow 0$ , 由  $f(t, 0) = 0$  知  $\rho(t, 0) = 0$ , 因此当  $x(t) \rightarrow 0$  时, 有  $z(t) \rightarrow 0$ , 即无扰动时闭环系统(9)-(10)为指数稳定的.

此外, 当扰动  $d_1(t), d_2(t)$  不为零时, 由式(11)知, 变换后的状态  $\xi(t), \eta(t)$  对扰动具有输入-状态稳定性<sup>[17]</sup>, 且可通过增大  $c_1, c_2$  或减小  $\delta_j (j = 1, 2, 3)$  对

$$G(t) = -\frac{1}{r(t)} \begin{bmatrix} \sin \theta_L \sin \theta_V \sin(\varphi_L - \psi_V) + \cos \theta_L \cos \theta_V & -\sin \theta_L \cos(\psi_V - \varphi_L) \\ -\sin \theta_V \cos(\varphi_L - \psi_V) & -\sin(\varphi_L - \psi_V) \end{bmatrix}.$$

设  $(i_x, i_y, i_z)$  为沿地面坐标系  $A-xyz$  各轴方向的单位向量, 则由图1可知, 视线  $r$  和导弹速度  $V_M$  可分别表示为

$$\begin{aligned} r = & r \cos \theta_L \sin \varphi_L i_x + r \sin \theta_L i_y + \\ & r \cos \theta_L \cos \varphi_L i_z, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} V_M = & V_M \cos \theta_V \cos \psi_V i_x + V_M \sin \theta_V i_y - \\ & V_M \cos \theta_V \sin \psi_V i_z. \end{aligned} \quad (22b)$$

容易验证  $\det(G(t)) = \frac{r \cdot V_M}{r^2 V_M}$ , 注意到当导弹速度方向与视线方向垂直时有  $\det(G(t)) = 0$ , 这时矩阵  $G(t)$  不可逆, 然而在导弹拦截目标的过程中, 速度

$$G^{-1} = \frac{1}{\det(G)} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_L - \psi_V) & \sin \theta_L \cos(\psi_V - \varphi_L) \\ \sin \theta_V \cos(\varphi_L - \psi_V) & \sin \theta_L \sin \theta_V \sin(\varphi_L - \psi_V) + \cos \theta_L \cos \theta_V \end{bmatrix},$$

并且

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -G^{-1} \dot{G} G^{-1} [-k_1 x - a(t)x] - G^{-1} \dot{a}(t)x, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = G^{-1} [-k_1 - a(t)], \quad (24)$$

扰动进行抑制, 进而使  $\xi(t), \eta(t)$  更接近零点. 可以看出, 控制律(10)只与系统状态  $x, z$  以及时间  $t$  有关, 因此只要系统(9)的形式已知时, 即可求出控制律(10)的解析表达式.

**注1** 本文在定理1提出的控制律与文献[13]不同: 文献[13]通过backstepping设计的控制律包含状态的导数, 而状态的导数中涉及扰动项, 这使得其控制律在实际中难以实现; 本文在控制律的设计过程中, 利用不等式(16c)将在对状态求导时出现的扰动项分离出来, 因此与文献[13]相比, 所设计的导引律不包含未知扰动.

### 3.2 鲁棒导引律设计(Guidance law design)

本节将利用定理1的结论设计导引律, 并验证通过选取如式(7)所示的状态变量可消除视线角速率的交叉耦合项对制导效果的影响.

首先不考虑式(8a)中视线角速率的交叉耦合项, 这时式(8a)简化为

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t)z + \frac{1}{r} a_T, \quad (20a)$$

$$\dot{z} = -Qz + Qu + \Delta, \quad (20b)$$

其中:

$$f(t, x) = -2 \frac{V_r(t)}{r(t)} x \triangleq a(t)x, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$a_T = \begin{bmatrix} a_{T\theta_L} \\ a_{T\varphi_L} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_\theta \\ \Delta_\psi \end{bmatrix},$$

方向与视线方向的夹角通常为锐角, 因此这里假设不会出现导弹速度方向与视线方向垂直的情况, 即矩阵  $G(t)$  可逆, 根据定理1可设计导引律

$$\begin{aligned} u = & -Q^{-1} [k_2(z - \rho(t, x)) + G^T(t)x - \\ & Qz - \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial x} (f(t, x) + G(t)z) + \\ & \frac{1}{2\delta_3^2} \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\|^2 (z - \rho(t, x))], \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\rho(t, x) = G^{-1}(t) [-k_1 x - a(t)x], \quad (23b)$$

其中:  $k_i = c_i + 0.5/\delta_i^2$ ,  $c_i > 0$ ,  $\delta_j > 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 中包含矩阵 $G$ 的导数,对 $G$ 求导后出现的角速率 $\dot{\theta}_L, \dot{\theta}_V, \dot{\varphi}_L$ 和 $\dot{\psi}_V$ 可根据系统的状态变量 $x, z$ 通过式(3)(7)计算得到.实际上,这里获得的导引律(23)与视线角速率交叉耦合项无关,由式(20)设计的导引律(23)也可用于系统(8),有如下定理:

**定理 2** 考虑制导系统(8),假设在拦截过程中不会出现导弹速度方向与视线垂直的情况,将 $[a_{T_{\theta_L}} \ a_{T_{\varphi_L}}]^T$ 和 $[\Delta_\theta \ \Delta_\psi]^T$ 视为有界扰动输入,则在导引律(23)的作用下,式(8a)对扰动具有输入-状态稳定性;此外当扰动为零时,系统(8)具有指数稳定性.

**证** 做变换

$$\xi = x, \eta = z - \rho(t, x), \quad (25)$$

并取

$$\rho(t, x) = G^{-1}(t)(-k_1 x - f(t, x)), \quad (26)$$

其中 $k_1$ 为正常数. Lyapunov函数

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi^T \xi + \frac{1}{2}\eta^T \eta. \quad (27)$$

沿系统(8)的变化率为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \xi^T(f(t, x) + [-\xi_2^2 \tan \theta_L, \xi_1 \xi_2 \tan \theta_L]^T + \\ & G(t)z + \frac{1}{r}a_T) + \eta^T(-Qz + Qu + \Delta - \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial x}(f(t, x) + G(t)z + \frac{1}{r}a_T)) = \\ & \xi^T(f + Gz + \frac{1}{r}a_T) + \eta^T(-Qz + \\ & Qu + \Delta - \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial x}(f + Gz + \frac{1}{r}a_T)). \quad (28) \end{aligned}$$

若令 $d_1 = \frac{1}{r}a_T, d_2 = \Delta$ 及 $P(x, z) = -Qz$ ,则式(28)与式(15)相同,以下证明同定理1.

由定理1-2知,视线角速率在导引律(23)的作用下对目标机动和导弹控制系统的扰动具有输入-状态稳定性,由式(11)可知通过调节制导系数 $c_i, \delta_j$  ( $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ )可对扰动进行抑制,进而使视线角速率维持在零点附近,且式(8b)中的交叉耦合项不会影响制导效果.

**注 2** 为了获得更好的制导效果,亦可选用时变的制导系数 $c_i(t), \delta_j(t)$  ( $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ ):当 $r$ 较大时,扰动输入 $\frac{1}{r}a_T$ 较小,这时可以使用较小的 $c_i$ 或较大的 $\delta_j$ ,从而避免过大的控制输入;随着 $r$ 减小,扰动输入 $\frac{1}{r}a_T$ 将增大,由于导弹和目标都有一定的尺寸,只要二者的相对距离减小至外壳相碰即可实现零脱靶量打击<sup>[4]</sup>,因此 $\frac{1}{r}a_T$ 在拦截过程中可视为有界扰动,通过选取较大的 $c_i$ 或较小的 $\delta_j$  ( $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ )可以对其进行抑制,从而使视线角速率仍然维持在零点附近,并获得满意的脱靶量.

### 4 仿真算例(Simulation)

导弹与目标相对位置的初始值取为

$$r(0) = 3000 \text{ m}, \theta_L(0) = 60^\circ, \varphi_L(0) = 30^\circ;$$

假设进入末制导阶段时,导弹以最大速度飞行,导弹的弹道倾角和弹道偏角的初始值分别为

$$\theta_V(0) = 45^\circ, \psi_V(0) = -64.3^\circ,$$

速度 $V_M = 350 \text{ m/s}$ ,法向和侧向加速度的初值为

$$a_\theta(0) = a_\psi(0) = 0,$$

假设导弹弹道坐标系中两个法向通道的最大允许过载为 $5 \text{ g}$ ;由于导弹和目标的相对运动产生的相对速度和视线角速率初始值为

$$V_r(0) = -143 \text{ m/s},$$

$$\omega_\theta(0) = 0.85 \text{ (}^\circ\text{)/s}, \omega_\phi(0) = 0.24 \text{ (}^\circ\text{)/s};$$

目标机动加速度和扰动项取为

$$a_{T_{\theta_L}} = 20 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) \text{ m/s}^2, a_{T_{\varphi_L}} = 20 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \text{ m/s}^2,$$

$$\Delta_\theta = \cos(0.1t) \text{ m/s}^2, \Delta_\psi = \sin(0.1t) \text{ m/s}^2;$$

各制导系数及导弹控制系统动态参数分别取

$$c_1 = c_2 = 20, \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.05, \tau = 2.$$

为了验证所设计导引律的性能,在相同的初始拦截条件下对增广比例导引(APNG)和文献[9]所提出的导引律也进行了仿真,增广比例导引制导指令为

$$u_1 = -5V_r\omega_\theta + a_{T_{\theta_L}}, u_2 = -5V_r\omega_\phi + a_{T_{\varphi_L}}.$$

文献[9]中的导引律所需的制导参数除选取 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 15$ 外,其他参数的选取均与文献[9]的仿真相同,另外这里假设增广比例导引指令和文献[9]中的导引律所需的目标机动信息可通过观测器<sup>[4]</sup>精确得到.仿真结果如图3-5所示.

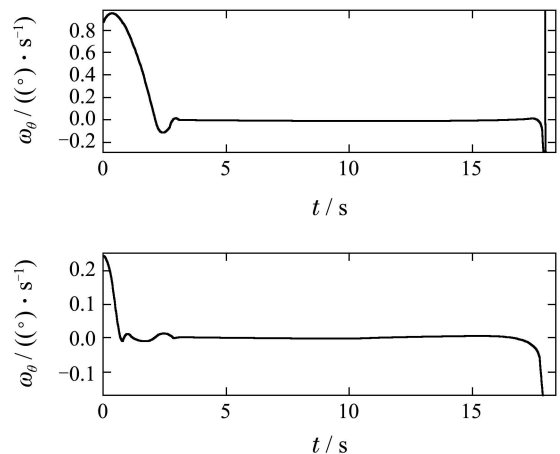


图 3 使用本文导引律时的视线角速率

Fig. 3 Variation of LOS rate with our guidance law

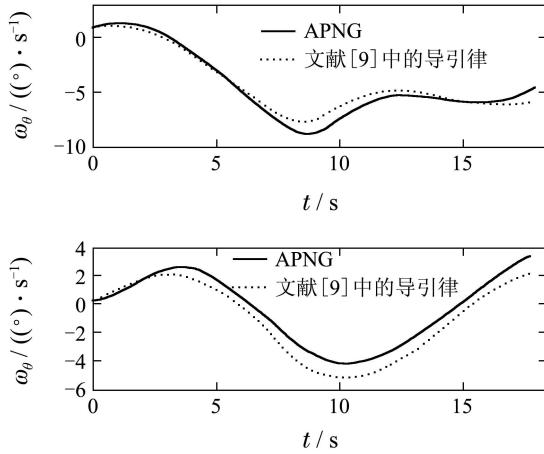


图4 使用APNG和文献[9]中的导引律时的视线角速率  
Fig. 4 Variation of LOS rate with APNG and the guidance law in [9]

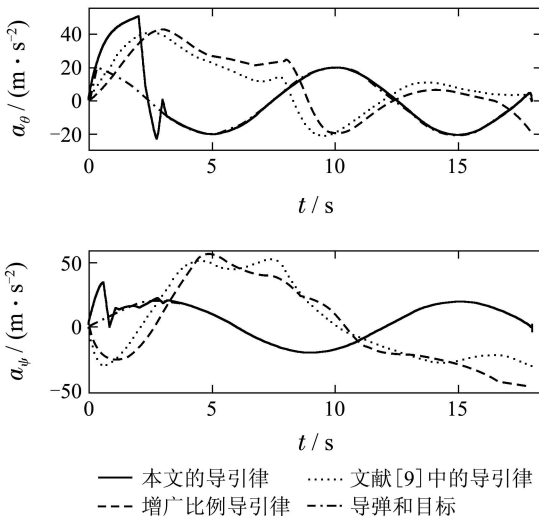


图5 视线坐标系中导弹与目标法向加速度变化曲线  
Fig. 5 Variation of missile and target normal acceleration in the LOS coordinate

由图3可见,在导引律(23)的作用下,视线角速率迅速收敛到零点附近,不仅对目标机动和外来有界扰动具有较强的鲁棒性,而且抑制了导弹控制系统动态特性的影响,本例中脱靶量约为0.046 m。图4为应用增广比例导引和文献[9]中的导引律时的视线角速率曲线。由于导弹的控制系统直接影响弹道坐标系下的法向加速度和侧向加速度,并且控制系统的动态特性和不确定性也体现在此法向加速度和侧向加速度上,但增广比例导引和文献[9]中的导引律均是在视线坐标系中设计得到的,而且增广比例导引未考虑导弹控制系统的动态特性和不确定性、文献[9]中的导引律未考虑导弹控制系统的动态特性和不确定性,因此当应用增广比例导引和文献[9]中的导引律时,即使在可精确获得目标机动的情况下,也不能使视

线角速率收敛,从而得不到满意的脱靶量。

图5给出了分别使用本文所设计的导引律、增广比例导引和文献[9]中的导引律时,导弹和目标在视线坐标系中的法向加速度曲线。可见,增广比例导引的法向加速度响应难以跟踪目标机动加速度,这是由于该导引算法在设计过程中既没有考虑视线坐标系和弹道坐标系之间的差异,也没有补偿导弹控制系统的动态特性和不确定性,在制导末端对目标的机动反应慢,使得视线角速率发散,产生较大的脱靶量;文献[9]中的导引律虽然在设计时考虑了导弹控制系统的动态特性,但不能克服视线坐标系和弹道坐标系之间的差异及导弹控制系统的动态特性和不确定性,因此其制导效果与增广比例导引类似;而在应用本文所设计的导引律时,导弹在视线坐标系中的法向加速度可快速跟上目标机动加速度,并使视线角速率一直保持在零点的小邻域内,从而具有较高的制导精度。

## 5 结论(Conclusions)

本文考虑到导弹的控制系统直接影响弹道坐标系中垂直于速度的加速度,并且考虑控制系统动态特性及可能存在的动态特性,基于零化视线角速率的原则,应用反步设计法和输入-状态稳定性理论在弹道坐标系中设计了一种三维非线性鲁棒导引律。理论分析和数值仿真表明所设计的导引律可克服控制系统动态特性对制导精度的影响,并且使视线角速率对目标机动和控制系统所受外来有界扰动具有输入-状态稳定性,通过状态变换和分块反步设计技巧消除了视线角速率的非线性耦合项对制导效果的影响。

## 参考文献(References):

- [1] YANG C D, YANG C C. A unified approach to proportional navigation [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1997, 33(2): 557 - 567.
- [2] YANG C D, CHEN H Y. Nonlinear  $H_\infty$  robust guidance law for homing missiles [J]. *Journal of Guidance, Control, Dynamics*, 1998, 21(6): 882 - 890.
- [3] ZHOU D, MU C, XU W. Adaptive sliding-mode guidance of a homing missile [J]. *Journal of Guidance, Control, Dynamics*, 1999, 22(4): 589 - 594.
- [4] SHTESSEL Y B, SHKOLNIKOV I A, LEVANT A. Smooth second-order sliding modes: Missile guidance application [J]. *Automatica*, 2007, 43(8): 1470 - 1476.
- [5] SUN S, ZHOU D. A guidance law with finite time convergence accounting for autopilot lag [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2013, 25(1): 132 - 137.
- [6] ZHOU D, SUN S. Guidance laws with finite time convergence [J]. *Journal of Guidance, Control, Dynamics*, 2009, 32(6): 1838 - 1842.

- [7] BEZICK S, RUSNAK I, GRAY W S. Guidance of a homing missile via nonlinear geometric control methods [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, 18(3): 441 – 448.
- [8] YAN H, JI H. Guidance laws based on input-to-state stability and high-gain observers [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(3): 2518 – 2529.
- [9] 孙胜, 周荻. 考虑导弹自动驾驶仪动特性的三维非线性导引律 [J]. 宇航学报, 2009, 30(3): 1052 – 1056.  
(SUN Sheng, ZHOU Di. Three-dimensional nonlinear guidance law with consideration of autopilot dynamics [J]. *Journal of Astronautics*, 2009, 30(3): 1052 – 1056.)
- [10] CHWA D, CHOI J Y. Adaptive nonlinear guidance law considering control loop dynamics [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(4): 1134 – 1143.
- [11] CHWA D, CHOI J Y, ANAVATTI S G. Observer-based adaptive guidance law considering target uncertainties and control loop dynamics [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(1): 112 – 123.
- [12] SHIMA T, GOLAN O M. Linear quadratic differential games guidance law for dual controlled missiles [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(3): 834 – 842.
- [13] 毕胜, 季海波. 基于分块反步设计的飞行器姿态稳定鲁棒控制 [J]. 宇航学报, 2008, 29(6): 1878 – 1882.  
(BI Sheng, JI Haibo. Robust attitude control of aircraft based on partitioned backstepping [J]. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(6): 1878 – 1882.)
- [14] YAN H, JI H. Integrated guidance and control for dual-control missiles based on small-gain theorem [J]. *Automatica*, 2012, 48(10): 2686 – 2692.
- [15] IDAN M, SHIMA T, GOLAN O M. Integrated sliding mode autopilot-guidance for dual-control missiles [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(4): 1081 – 1089.
- [16] 李新国, 方群. 有翼导弹飞行动力学 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2004.  
(LI Xinguo, FANG Qun. *Winged Missile Flight Dynamics* [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2004.)
- [17] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. 3rd edition. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.

### 作者简介:

**严 晗** (1985–), 男, 博士研究生, 从事飞行器制导与飞行控制方面的研究, E-mail: yanhan@mail.ustc.edu.cn;

**季海波** (1964–), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制理论及应用、飞行器制导与控制等方面的研究, E-mail: jihb@ustc.edu.cn.