

设计稳定约束最小二乘无限冲击响应滤波器的序列最小化方法

孟海龙, 赖晓平[†]

(杭州电子科技大学 信息与控制研究所, 浙江 杭州 310018)

摘要: 无限冲击响应(infinite impulse response, IIR)数字滤波器不具有内禀稳定性, 因此在其实际设计中要施加稳定性约束. 稳定三角形条件是一种充分必要且线性的稳定性约束条件, 为了充分利用该条件, 本文使用基于二阶因子迭代更新的序列最小化技术将IIR滤波器的约束最小二乘设计问题转化为一系列的约束最小二乘子问题, 在每一个子问题中, 有且只有一个二阶分母因子连同整个分子被优化, 其他的二阶分母因子保持不变. 设计实例表明此方法能比现有方法得到性能更好的滤波器.

关键词: 无限冲击响应数字滤波器; 约束最小二乘设计; 稳定三角形; 序列最小化

中图分类号: TN911.72 文献标识码: A

A sequential minimization procedure for constrained least-squares design of stable infinite impulse response filters

MENG Hai-long, LAI Xiao-ping[†]

(Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

Abstract: Infinite impulse response (IIR) digital filters do not have intrinsic stability; thus, stability constraints should be imposed on their practical designs. The stability-triangle is a necessary-sufficient linear stability condition for IIR digital filters. In order to make good use of the stability-triangle condition, a sequential minimization procedure based on second-order factor is employed to convert the constrained least-squares design of IIR digital filters into a sequence of constrained least-squares sub-problems, each of which optimizes only one second-order denominator factor while keeping all the rest denominator factors unchanged. Design examples show that the proposed procedure provides better filtering performances than other existing methods.

Key words: IIR digital filters; constrained least-squares design; stability triangle; sequential minimization

1 引言(Introduction)

无限冲击响应(infinite impulse response, IIR)数字滤波器比有限冲击响应(finite impulse response, FIR)数字滤波器有更高的频率选择性和计算效率, 因此更具实用价值. 但是IIR数字滤波器不具有内禀稳定性和常数群延迟, 其设计问题形成的数学模型通常也是非凸规划模型, 因此IIR数字滤波器设计比FIR数字滤波器设计更具挑战性.

在IIR数字滤波器设计中, 其传递函数的分母通常采用首一多项式表示, 针对这一首一多项式现存多种充分的稳定性约束条件. 例如: 正实性条件^[1]、广义正实性条件^[2]和Rouche's定理^[3]等, 但是这些条件均为保证滤波器稳定的充分非必要条件, 因此具有良好性能的滤波器可能被排除在由它们所确定的稳定域之外. 除了将传递函数的分母采用首一多项式表示外, 还可以将其分母表示为二阶因子级联形式^[4-6], 其频

率响应的分母则相应为所有二阶因子频率响应的乘积, 此时本文可以使用一种基于二阶因子稳定三角形^[4,7]的充分必要稳定性约束条件. 但是分母为所有二阶因子频率响应乘积的系统频率响应与单一多项式分母表示的系统频率响应相比, 增大了频率响应与分母多项式系数之间的非线性, 从而增大了优化设计中得到全局最优解的难度. 为了克服这一困难, 文献[8]提出了一种基于二阶因子迭代更新的序列最小化的方法(sequential minimization procedure based on second-order factor updates, SMSOF), 将原设计问题转化为一系列的子问题, 每个子问题仅更新分母的一个二阶因子, 相当于求解一个分母为二阶的IIR滤波器minimax设计子问题, 避免了优化模型非线性的增加. 目前, 这种方法仅用在了IIR数字滤波器的minimax设计中, 存在设计耗时长不足. 为充分利用SMSOF方法的优点, 同时避免minimax设计耗时长的缺点, 本

文考虑将此方法推广到IIR数字滤波器的约束最小二乘设计.

针对IIR数字滤波器的约束最小二乘设计, 将问题形成的非凸规划模型转化为二阶锥规划(second-order cone programming, SOCP)和二次规划(quadratic programming, QP)是人们较常采用的求解方法. 文献[3]应用高斯牛顿(GN)策略并结合基于Rouche’s定理的稳定性约束把非凸规划问题转化为一系列QP问题来完成设计. 文献[9–10]把SOCP方法分别与基于辐角原理(argument principle, AP)^[11]和传递函数分母正实性的稳定性约束相结合, 来求解IIR滤波器的约束最小二乘设计问题. 文献[12]则采用最小 p -方误差准则($p = 2$ 对应约束最小二乘设计)和基于传递函数分母正实性的稳定性约束, 把问题转化为QP来求解.

本文将文献[8]中提出的SMSOF方法, 应用到IIR数字滤波器的约束最小二乘设计, 把问题转化为一系列约束最小二乘设计子问题. 每个子问题除优化传递函数的分子外, 只优化分母的一个二阶因子(保持其他分母因子不变), 相当于一个分母为二阶的IIR数字滤波器的最小二乘设计子问题. 这样, 在每个子问题中, 稳定性约束可采用稳定三角形条件, 同时保证了约束的线性性质和稳定性条件的充要性. 笔者采用Levy-Sanathanan-Koerner(LSK)^[8]策略将非凸的最小二乘设计子问题转化为QP问题, 然后利用文献[13]中提出的高效CPCLS-GI算法进行求解. 设计实例表明, 本文方法能得到性能更好的滤波器.

2 序列最小化方法(Sequential minimization procedure)

考虑设计一个分子、分母阶数分别为 M 和 N 的IIR滤波器(简便起见, 假设 N 为偶数). 其传递函数可表示为一个多项式与级联二阶因子相除的形式:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{A_1(z)A_2(z)\cdots A_P(z)}, \quad (1a)$$

$$B(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_Mz^{-M}, \quad (1b)$$

$$A_p(z) = 1 + a_{p1}z^{-1} + a_{p2}z^{-2}, \quad p = 1, 2, \dots, P, \quad (1c)$$

其中: $p = N/2, b_m (m = 0, 1, \dots, M), a_{p1}, a_{p2} (p = 1, 2, \dots, P)$ 为滤波器系数. 令 $\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_M]^T, \mathbf{a}_p = [a_{p1} \ a_{p2}]^T, \mathbf{a} = [\mathbf{a}_1^T \ \mathbf{a}_2^T \ \cdots \ \mathbf{a}_P^T]^T$, 上标 $[\cdot]^T$ 表示转置.

由式(1)可知, 二阶因子的零点即为传递函数的极点. 假设要求滤波器的极点落在半径为 $\rho < 1$ 的圆内, 那么滤波器的稳定域可以表示为 $S = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N | \text{所有 } A_p(z) (p = 1, 2, \dots, P) \text{ 的零点均在半径为 } \rho \text{ 的圆内}\}$, 其中 \mathbb{R} 表示实数域. 令 $S_p = \{\mathbf{a}_p \in \mathbb{R}^2 | A_p(z) \text{ 的零点均在半径为 } \rho \text{ 的圆内}\}$, 则根据二阶因子的稳定三角形

条件, S_p 可表示为

$$S_p = \{\mathbf{a}_p \in \mathbb{R}^2 | |\rho a_{p1}| - a_{p2} < \rho^2, a_{p2} < \rho^2\}, \quad (2)$$

则滤波器的稳定域可表示为 $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_P$, 其中“ \times ”表示笛卡尔积.

设 $D(\omega)$ 为定义在离散集合 $\Omega \subseteq [0, \pi]$ 上的期望频率响应(frequency response, FR). 定义

$$E(\omega) = H(e^{j\omega}) - D(\omega) \quad (3)$$

为实际频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与期望频率响应 $D(\omega)$ 之间的逼近误差, 称为频率响应误差. IIR数字滤波器的约束最小二乘设计就是在满足约束条件(本文仅讨论施加稳定性约束和频率响应误差约束)的情况下将频率响应误差的平方和最小化, 即

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{b}, \mathbf{a} \in S} e_{LS}(\Omega) &\equiv \sum_{\omega \in \Omega} |E(\omega)|^2 = \\ &\sum_{\omega \in \Omega} |H(e^{j\omega}) - D(\omega)|^2, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\text{s.t. } |H(e^{j\omega}) - D(\omega)| < \rho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_p \cup \Omega_s, \quad (4b)$$

其中: S 为由稳定性约束条件确定的稳定域, $\rho(\omega)$ 为给定的频率响应误差约束上界.

将式(1)所示的分母为级联二阶因子形式的传递函数代入上式中的 $H(e^{j\omega})$, 问题可进一步表示为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{b}, \mathbf{a} \in S} \sum_{\omega \in \Omega} \left| \frac{B(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})A_2(e^{j\omega})\cdots A_P(e^{j\omega})} - D(\omega) \right|^2, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\text{s.t. } |H(e^{j\omega}) - D(\omega)| < \rho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_p \cup \Omega_s. \quad (5b)$$

依照SMSOF方法的思想, 把上述问题(5)转化为一系列如式(6)所示的分母为二阶的IIR数字滤波器之加权最小二乘设计子问题. 在该(第 p 个)子问题中, 除了分子 $B(e^{j\omega})$ 的系数向量 \mathbf{b} 外, 仅对 $A_p(e^{j\omega})$ 的第 p 个二阶因子 $A_p(e^{j\omega})$ 的系数向量 \mathbf{a}_p 进行优化, 其他因子式 $A_1(e^{j\omega}), \dots, A_{p-1}(e^{j\omega}), A_{p+1}(e^{j\omega}), \dots, A_P(e^{j\omega})$ 的系数则保持不变:

$$\min_{\mathbf{b}, \mathbf{a}_p} \sum_{\omega \in \Omega} \left| \frac{\hat{A}_p^{-1}(e^{j\omega})\boldsymbol{\psi}^T(\omega)\mathbf{b}}{A_p(e^{j\omega})} - D(\omega) \right|^2, \quad (6a)$$

$$\text{s.t. } \rho a_{p1} - a_{p2} < \rho^2, -\rho a_{p1} - a_{p2} < \rho^2, a_{p2} < \rho^2, \quad (6b)$$

$$\left| \frac{\hat{A}_p^{-1}(e^{j\omega})\boldsymbol{\psi}^T(\omega)\mathbf{b}}{A_p(e^{j\omega})} - D(\omega) \right| < \rho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_p \cup \Omega_s, \quad (6c)$$

其中:

$$\boldsymbol{\psi}(\omega) = [1 \ e^{j\omega} \ \cdots \ e^{jN\omega}]^T,$$

$$\hat{A}_p(e^{j\omega}) = A_1(e^{j\omega}) \cdots A_{p-1}(e^{j\omega}) A_{p+1}(e^{j\omega}) \cdots A_P(e^{j\omega}),$$

式(6a)中,

$$\frac{\hat{A}_p^{-1}(e^{j\omega})\boldsymbol{\psi}^T(\omega)\mathbf{b}}{A_p(e^{j\omega})} - D(\omega) = \frac{[\boldsymbol{\varphi}_p^T(\omega)\mathbf{x}_p - D(\omega)]}{A_p(e^{j\omega})}.$$

令

$$\mathbf{x}_p = (\mathbf{b}^T, \mathbf{a}_p^T)^T = (b_0, b_1, \dots, b_M, a_{p1}, a_{p2})^T, \quad (7a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_p(\omega) = \left(\frac{\boldsymbol{\psi}^T(\omega)}{\hat{A}_p(e^{j\omega})}, -D(\omega)e^{j\omega}, -D(\omega)e^{j2\omega} \right)^T, \quad (7b)$$

利用式(7), 最小二乘子问题(6)可表示为

$$\min_{\mathbf{x}_p} \sum_{\omega \in \Omega} \left| \frac{\boldsymbol{\varphi}_p^T(\omega) \mathbf{x}_p - D(\omega)}{A_p(e^{j\omega})} \right|^2, \quad (8a)$$

$$\text{s.t. } \rho a_{p1} - a_{p2} < \rho^2, \quad -\rho a_{p1} - a_{p2} < \rho^2, \quad a_{p2} < \rho^2, \quad (8b)$$

$$\left| \frac{\boldsymbol{\varphi}_p^T(\omega) \mathbf{x}_p - D(\omega)}{A_p(e^{j\omega})} \right| < \rho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_p \cup \Omega_s. \quad (8c)$$

由于问题(8)是非凸的, 本文采用LSK策略将其转化为凸问题来求解. 假设在第 k 次迭代中已经得到的系数向量 $\mathbf{x}_p(k) = (b_0(k), b_1(k), \dots, b_M(k), a_{p1}(k), a_{p2}(k))^T$, 那么在第 $k+1$ 次迭代中, 使用已经得到的 $a_{p1}(k), a_{p2}(k)$ 替换(8a)中分母 $A_p(e^{j\omega})$ 的多项式系数 a_{p1} 和 a_{p2} . 然后, 求解下面问题得到 $\mathbf{x}_p(k+1)$:

$$\min_{\mathbf{x}_p} \sum_{\omega \in \Omega} \left| \frac{\boldsymbol{\varphi}_p^T(\omega) \mathbf{x}_p - D(\omega)}{A_p(k, e^{j\omega})} \right|^2, \quad (9a)$$

$$\text{s.t. } \rho a_{p1} - a_{p2} < \rho^2, \quad -\rho a_{p1} - a_{p2} < \rho^2, \quad a_{p2} < \rho^2, \quad (9b)$$

$$\left| \frac{\boldsymbol{\varphi}_p^T(\omega) \mathbf{x}_p - D(\omega)}{A_p(k, e^{j\omega})} \right| < \rho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_p \cup \Omega_s, \quad (9c)$$

其中 $A_p(k, e^{j\omega}) = 1 + a_{p1}(k)e^{-j\omega} + a_{p2}(k)e^{-j2\omega}$. 问题(9)是一个容易求解的二次规划问题, 本文使用文献[9]中的CPCLS-GI算法来求解.

LSK策略下求解约束最小二乘子问题(6)的算法总结如下: 给定初始迭代序号 $k=0$ 和初始系数向量 $\mathbf{x}_p(0)$, 使用CPCLS-GI算法迭代求解二次规划问题(9), 每次迭代后令 $k=k+1$, 若 k 大于某个预先给定的最大迭代次数 K , 又或者 $\|\mathbf{x}_p(k) - \mathbf{x}_p(k-1)\| < \Delta \|\mathbf{x}_p(k)\|$ (其中, Δ 为预先给定的容许误差)时, 迭代停止, 并把得到的 $\mathbf{x}_p(k)$ 看作是问题(6)的解. 本文中, 容许误差参数 Δ 和最大迭代次数 K 分别设定为0.001和100.

有了约束最小二乘子问题(6)的求解算法之后, 本文就可在SMSOF的框架下, 求解约束最小二乘设计问题(5). 该SMSOF算法包括一个外循环、一个内循环和一个LSK循环, 外循环用以反复执行内循环, 内循环对 P 个二阶分母因子进行循环迭代, 而LSK循环则用LSK策略迭代求解每一个约束最小二乘子问题. 具体的SMSOF算法步骤为:

第1步 初始化 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} .

第2步 外循环. 对 $q=1, \dots, Q$ (Q 为最大的外循环次数), 执行第3步到第5步.

第3步 内循环. 对 $p=1, \dots, P$, 执行第4步.

第4步 LSK循环. 在LSK策略下求解约束最小二乘子问题(6), 得到 $\hat{\mathbf{b}}$ 和 $\hat{\mathbf{a}}_p$.

第5步 满足条件时终止外循环. 分别用 $\hat{\mathbf{a}}_p$ 和 $\hat{\mathbf{b}}$ 替换分母 $A(e^{j\omega})$ 的第 p 个二阶因子 $A_p(e^{j\omega})$ 的系数向量 \mathbf{a}_p 及分子 $B(e^{j\omega})$ 的系数向量 \mathbf{b} . 计算频率响应误差平方和 $e_{\text{LS}}(\Omega)$, 如果 $e_{\text{LS}}(\Omega)$ 足够小或者两个外循环之间决策变量 $\mathbf{x}_p = (\mathbf{b}^T, \mathbf{a}_p^T)^T$ 的变化足够小, 则终止外部循环; 否则, 继续外循环.

如果设计问题中没有频率响应误差约束条件, 则式(4b)(5b)(6c)(8b)(9c)是不需要的.

3 设计实例(Design examples)

下面给出两个设计实例来表明本文的稳定IIR数字滤波器设计的SMSOF算法的有效性. 所有实例均在DELL Precision T3400计算机(英特尔酷睿四核CPU Q9300, 2.5 GHz)上进行, 而离散集合可以取为 $\{k\pi/400, k=0, 1, \dots, 400\}$.

在对滤波器的性能进行比较时, 本文考虑频率响应误差平方和 $e_{\text{LS}}(\Omega)$ 、幅值误差的最大值和 L_2 度量以及群延迟误差的最大值和 L_2 度量. 频率响应误差平方和 $e_{\text{LS}}(\Omega)$ 如式(4)定义, 幅值误差和群延迟误差分别定义为

$$E_m(\omega) = |H(e^{j\omega})| - |D(\omega)|,$$

$$E_g(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] - \tau(\omega),$$

其中 $\text{grd}[H(e^{j\omega})]$ 和 $\tau(\omega)$ 分别代表 $H(e^{j\omega})$ 和 $D(\omega)$ 的群延迟.

$E_m(\omega)$ 和 $E_g(\omega)$ 在某个频率子集 $\Theta \subset \Omega$ 上的最大值以及 L_2 度量则定义为

$$\max[E_m(\Theta)] = \max_{\omega \in \Theta} |E_m(\omega)|,$$

$$\max[E_g(\Theta)] = \max_{\omega \in \Theta} |E_g(\omega)|,$$

$$L_2[E_m(\Theta)] = \sqrt{T^{-1}(\Theta) \sum_{\omega \in \Theta} |E_m(\omega)|^2},$$

$$L_2[E_g(\Theta)] = \sqrt{T^{-1}(\Theta) \sum_{\omega \in \Theta} |E_g(\omega)|^2},$$

其中 $T(\Theta)$ 表示频率子集 Θ 的元素个数.

例1 设计一个阶数 $M=N=18$ 的低通滤波器, 其期望的频率响应为

$$D(\omega) = \begin{cases} e^{-j15\omega}, & \forall \omega \in \Omega_p, \\ 0, & \forall \omega \in \Omega_s, \end{cases} \quad (10)$$

其中: $\Omega_p = [0, 0.5\pi]$, $\Omega_s = [0.55\pi, \pi]$. 本例曾被文献[9-10]作为最小二乘设计例子, 用以说明其算法的有效性. 文献[9-10]得到的滤波器的最大极点半径分别为0.973和0.961.

本文先不对频率响应误差施加任何约束条件. 首

先取最大极点半径为 $\rho = 0.97$, 并且初始极点为 $0.5e^{\pm j(p-0.5)\pi/9}$ ($p = 1, 2, \dots, 9$). 程序经过2000次外部迭代、用时64.95 s后, 得到一个最大极点半径为0.97的滤波器.

表1列出了本文的SMSOF算法以及文献[9]的SOCP方法得到的滤波器的几个误差性能, 包括: 通带最大 $\max[E_m(\Omega_p) \cap \Omega]$ (MMPE) 和 L_2 幅值误差

$$L_2[E_m(\Omega_p) \cap \Omega] \text{ (EMPE)},$$

阻带最大 $\max[E_m(\Omega_s) \cap \Omega]$ (MMSE) 和 L_2 幅值误差

$$L_2[E_m(\Omega_s) \cap \Omega] \text{ (EMSE)},$$

通带最大 $\max[E_g(\Omega_p) \cap \Omega]$ (MGDE) 和 L_2 群延迟误差 $L_2[E_g(\Omega_p) \cap \Omega]$ (EGDE) 等. 分析数据可得, 相比文献[9]方法得到的滤波器, 除通带 L_2 群延迟误差稍大外, 本文方法设计的滤波器有较小的通带最大群延迟误差以及小得多的通带最大幅值误差、通带 L_2 幅值误差、阻带最大幅值误差和阻带 L_2 幅值误差.

表 1 本文方法与文献[9]方法的比较

Table 1 A comparison of SMSOF and SOCP in [9]

方法	MMPE/ EMPE/dB	MMSE/ EMSE/dB	MGDE/ EGDE
文献[9]	-29.668/ -47.348	-35.001/ -47.305	3.675/ 0.222
本文	-46.758/ -55.820	-38.777/ -52.414	2.942/ 0.241

表2列出了SMSOF方法与文献[10]的SOCP方法得到的滤波器的几种误差性能, 包括: 通带 L_2 幅值误差EMPE、阻带 L_2 幅值误差EMSE、通带 L_2 群延迟误差EGDE及频率响应误差平方和 $e_{LS}(\Omega)$. 需要指出, 由于文献[10]的离散频率集合 Ω 是101个频率点的集合 $\{k\pi/100, k = 0, 1, \dots, 100\}$, 本文的 Ω 则有401个频率点, 因此需将本文得到的 $e_{LS}(\Omega)$ 数据大约除4后(结果为 1.32×10^{-4}) 方能与文献[10]的结果比较. 可以看到, 除了通带 L_2 群延迟误差稍大外, 本文方法得到的其他各项误差均比文献[10]方法得到的小得多.

表 2 本文方法与文献[10]方法的比较

Table 2 A comparison of SMSOF and SOCP in [10]

方法	EMPE/dB	EMSE/dB	EGDE	$e_{LS}(\Omega) (\times 10^{-4})$
文献[10]	-47.879	-43.755	0.222	2.56*
本文	-55.820	-52.414	0.241	5.26**

*表示 $\Omega = \{k\pi/100, k=0, 1, \dots, 100\}$; **表示 $\Omega = \{k\pi/400, k=0, 1, \dots, 400\}$.

用文献[12]的方法对本例进行设计得到的滤波器, 最大极点半径为0.949. 为与之公平比较, 本文取最大极点半径参数 $\rho = 0.95$ 后, 用SMSOF算法对本例进行

了第2次设计. 程序经过2000次外部迭代、用时82.53 s后, 得到一个最大极点半径为0.95的滤波器.

表3列出了本文方法及文献[12]的基于QP的最小 p -方误差方法得到的滤波器的几种误差性能, 包括: 通带最大和 L_2 幅值误差MMPE、EMPE, 阻带最大和 L_2 幅值误差MMSE、EMSE以及通带最大和 L_2 群延迟误差MGDE、EGDE. 数据表明, 本文方法得到的滤波器的各项误差均远小于文献[12]的QP方法得到的滤波器.

表 3 本文方法与文献[12]方法的比较

Table 3 A comparison of SMSOF and QP in [12]

方法	MMPE/ EMPE	MMSE/ EMSE	MGDE/ EGDE
文献[12]	0.0678/ 0.0057	0.0785/ 0.0138	4.0087/ 0.4306
本文	0.0254/ 0.0032	0.0279/ 0.0042	1.2239/ 0.1285

图1-3分别给出了本文方法与文献[12]方法得到的频率响应幅值曲线、频率响应误差曲线和通带群延迟曲线. 由图可知, 本文的SMSOF方法得到了更大的阻带衰减、更小的频率响应误差和更小的通带群延迟误差, 不足之处是过渡带的幅频响应有较明显的过冲.

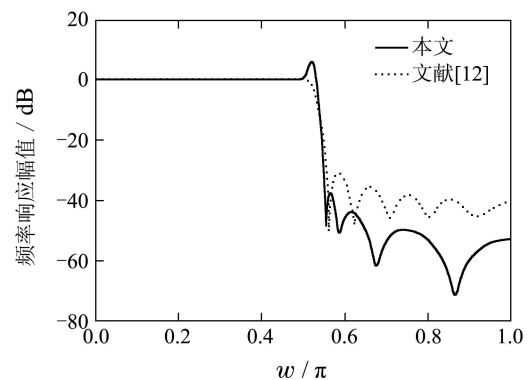


图 1 例1的第2个设计及用 [12]方法得到的频率响应幅值
Fig. 1 FR magnitude responses of the filters designed by QP in [12] and the 2nd design in Example 1

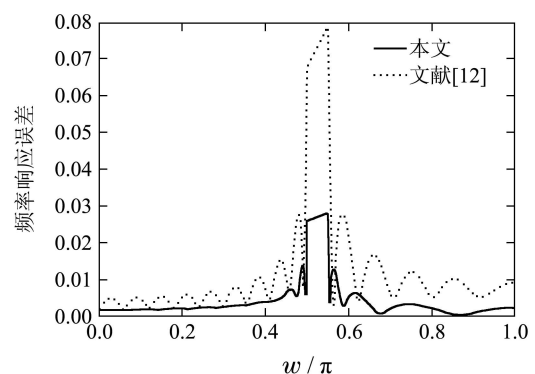


图 2 例1的第2个设计及用 [12]方法得到的频率响应误差
Fig. 2 FR-errors by QP in [12] and 2nd design in Example 1

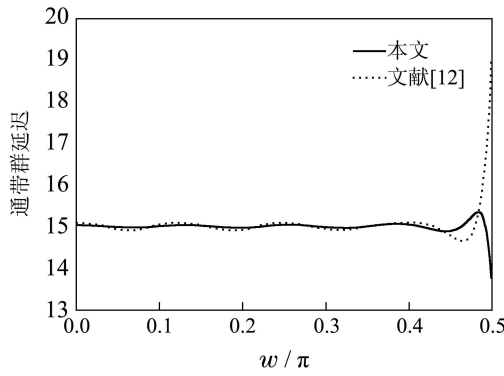


图3 例1的第2个设计及用 [12]方法得到的通带群延迟
Fig. 3 Passband group-delay by QP in [12] and the 2nd design in Example 1

接下来本文加上频率响应误差约束, 其上界设为 $\rho(\omega) = 0.0059$. 最大极点半径参数取 $\rho = 0.97$, 初始极点为 $0.97e^{\pm j(p-0.5)\pi/9}$ ($p = 1, 2, \dots, 9$).

本文方法与文献[8]方法得到的滤波器最大极半径均为0.97, 通带与阻带最大频率响应误差幅值 $\delta(\Omega)$ 分别为0.0059, 0.0057.

图4给出了本文方法与文献[8]方法得到的频率响应误差幅值曲线. 图5为本文方法与文献[8]方法得到的频率响应幅值曲线.

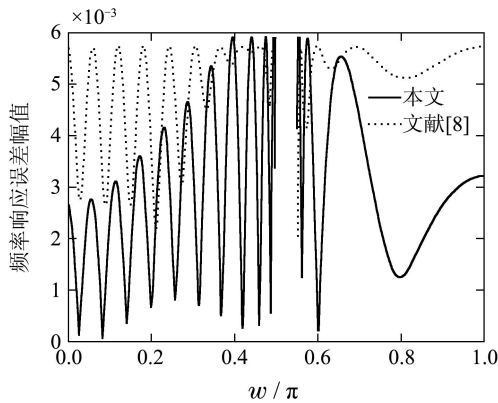


图4 例1设计本文与文献[8]方法得到的频率响应误差幅值
Fig. 4 FR-error magnitude responses of the filters designed by least-squares and minimax in [8] in Example 1

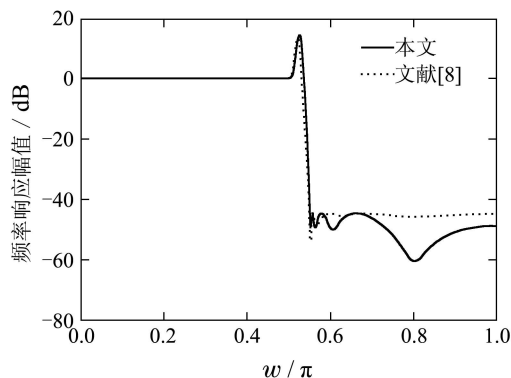


图5 例1设计本文方法与文献[8]方法得到的频率响应幅值
Fig. 5 FR magnitude responses of the filters designed by least-squares and minimax in [8] in Example 1

表4列出了本文方法与文献[8]方法得到的滤波器的性能指标, 包括: 通带与阻带最大幅值误差MMPE、MMSE, 通带与阻带幅值误差能量EMPE、EMSE, 通带最大和 L_2 群延迟误差MGDE、EGDE以及完成各自设计所需要的时间. 分析数据可得, 相比文献[8]方法, 本文方法得到的滤波器, 虽然通带阻带最大幅值误差、通带群延迟稍大, 但幅值误差能量小得多; 另外, 本文方法设计所需时间也大幅减小.

表4 例1设计本文方法与文献[8]方法比较

Table 4 A comparison of SMSOF and QP in [8] in Example 1

方法	MMPE/ EMPE	MMSE/ EMSE	MGDE/ EGDE	时间 / s
文献[8]	0.0057/ 0.0035	0.0057/ 0.0054	1.3771/ 0.1220	1920
本文	0.0059/ 0.0023	0.0059/ 0.0033	1.4790/ 0.1405	860

例2 设计一个阶数 $M = 19$, $N = 22$ 的带通滤波器, 其期望的频率响应为

$$D(\omega) = \begin{cases} e^{-j30\omega}, & \forall \omega \in \Omega_p, \\ 0, & \forall \omega \in \Omega_s, \end{cases}$$

其中:

$$\Omega_p = [0.2\pi, 0.6\pi], \quad \Omega_s = [0, 0.15\pi] \cup [0.65\pi, \pi].$$

频率响应误差约束上界设为 $\rho(\omega) = 0.0180$. 最大极点半径参数取为 $\rho = 0.99$, 而取滤波器的初始极点为 $0.5e^{\pm j(p-0.5)\pi/11}$ ($p = 1, 2, \dots, 11$).

本文方法与文献[8]方法得到的滤波器最大极半径分别为0.9702和0.9598, 通带与阻带最大频率响应误差幅值 $\delta(\Omega)$ 分别为0.0180和0.0219.

表5列出了本文方法与文献[8]方法得到的滤波器的性能指标, 包括: 通带与阻带最大幅值误差MMPE、MMSE, 通带与阻带幅值误差能量EMPE、EMSE, 通带最大和 L_2 群延迟误差MGDE、EGDE以及完成各自设计所需要的时间. 分析数据可得, 相比文献[8]方法得到的滤波器, 本文方法得到的滤波器各项误差均较小, 设计所需时间也大幅减小.

表5 例2设计本文方法与文献[8]方法比较

Table 5 A comparison of least-squares and minimax in [8] in Example 2

方法	MMPE/ EMPE	MMSE/ EMSE	MGDE/ EGDE	时间 / s
文献[8]	0.0219/ 0.0092	0.0219/ 0.0032	4.5440/ 0.6994	4987
本文	0.0170/ 0.0066	0.0180/ 0.0069	4.4959/ 0.6017	528

图6给出了例2本文方法与文献[8]方法得到的频率响应误差幅值曲线. 可以看出本文方法得到了比文献[8]方法更小的最大频率响应误差幅值以及更小的误差能量.

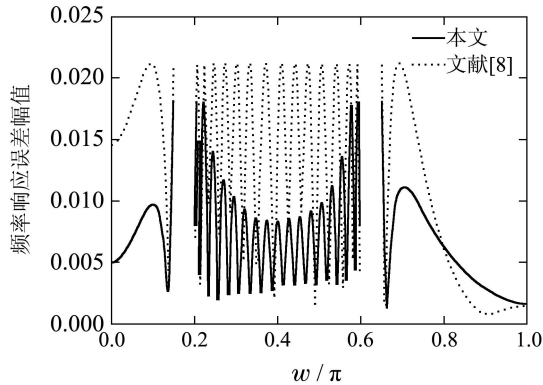


图 6 例2本文方法与文献[8]方法得到的频率响应误差幅值
Fig. 6 FR-error magnitude responses of the filters designed by least-squares and minimax in [8] in Example 2

图7为例2本文方法与文献[8]方法得到的频率响应幅值曲线.

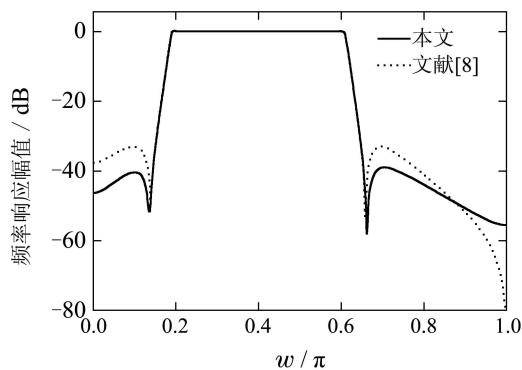


图 7 例2本文方法与文献[8]方法得到的频率响应幅值
Fig. 7 FR magnitude responses of the filters designed by least-squares and minimax in [8] in Example 2

4 结束语(Conclusions)

本文研究了IIR数字滤波器约束最小二乘设计问题. 为了得到性能好的稳定滤波器, 本文采用基于稳定三角形的稳定性约束条件, 并应用基于二阶因子迭代更新的序列最小化方法SMSOF, 将设计问题转化为一系列分母为二阶的IIR数字滤波器之约束最小二乘设计子问题; 然后应用LSK策略将非凸约束最小二乘设计子问题转化为容易求解的线性约束二次规划问题, 并利用CPCLS-GI算法进行求解. 仿真实例表明, 与现有的IIR数字滤波器最小二乘设计方法相比, 本

文方法能得到更小的幅值误差和群延迟误差; 与基于序列最小化的IIR数字滤波器minimax设计相比, 本文方法能得到更小的最大频率响应误差、更小的误差能量, 完成设计所需的时间也大幅减小.

参考文献(References):

- [1] CHOTTERA A T, JULLIEN G A. A linear programming approach to recursive digital filter design with linear phase [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1982, 29(3): 139 – 149.
- [2] DUMITRESCU B, NIEMISTO R. Multistage IIR filter design using convex stability domains defined by positive realness [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(4): 962 – 974.
- [3] LANG M C. Least-squares design of IIR filters with prescribed magnitude and phase responses and a pole radius constraint [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(11): 3109 – 3121.
- [4] ANTONIOU A. *Digital Filters: Analysis, Design and Applications* [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1993.
- [5] LANG M C. *Constrained design of digital filters with arbitrary magnitude and phase responses* [D]. Vienna, Austria: Vienna University of Technology, 1999.
- [6] LU W S, HINAMOTO T. Optimal design of stable filters with robust stability using conic quadratic-programming updates [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(6): 1581 – 1592.
- [7] LU W S. Design of recursive digital filters with prescribed stability margin: a parameterization approach [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, II: Analog and Digital Signal Processing*, 1998, 45(9): 1289 – 1298.
- [8] LAI X P, LIN Z P, KWAN H K. A sequential minimization procedure for minimax design of IIR filters based on second-order factor updates [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, II*, 2011, 58(1): 51 – 55.
- [9] JIANG A M, KWAN H K. IIR digital filter design with new stability constraint based on argument principle [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, I*, 2009, 56(3): 583 – 593.
- [10] JIANG A M, KWAN H K. WLS IIR digital filter design using SOCP [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Communications, Circuits and Systems*. Xiamen: IEEE, 2008: 478 – 788.
- [11] LU W S. An argument-principle based stability criterion and application to the design of IIR digital filters [C] // *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. Kos Island, Greece: IEEE, 2006: 4431 – 4434.
- [12] TSENG C C. Design of stable IIR digital filter based on least p-power error criterion [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, I*, 2004, 51(9): 1879 – 1888.
- [13] LAI X P. Optimal design of nonlinear-phase FIR filters with prescribed phase error [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(9): 3399 – 3410.

作者简介:

孟海龙 (1988-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为数字滤波器设计, E-mail: hl.meng528@gmail.com;

赖晓平 (1965-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为数字滤波器设计、优化方法、模式识别, E-mail: laixp@hdu.edu.cn.