

一类非线性系统的函数观测器设计

高虹, 蔡秀珊[†]

(浙江师范大学数理与信息工程学院, 浙江金华 321004)

摘要: 研究单边Lipschitz非线性系统的函数观测器设计. 基于线性矩阵不等式获得了函数观测器增益矩阵存在的条件, 然后提出函数观测器增益矩阵的设计方法. 通过一个仿真实例, 验证所设计的函数观测器不仅能够估计系统的状态, 而且可使观测误差快速收敛到零.

关键词: 函数观测器; 单边Lipschitz; 渐近收敛; 线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Functional observer design for a class of nonlinear systems

GAO Hong, CAI Xiu-Shan[†]

(College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China)

Abstract: A functional observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems is investigated. The existence conditions for gain matrices of a functional observer are derived based on linear matrix inequalities. Then, a design method for gain matrices of the functional observer is presented. Simulation results show that the proposed approach estimate the states of the system with a high convergence rate of the estimation errors.

Key words: functional observer; one-sided Lipschitz; asymptotic convergence; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

自从Thau^[1]提出非线性系统状态观测器的概念以来, 非线性系统的观测器设计问题一直受到研究者的重视并提出了众多的设计方法, 如扩展的Kalman滤波器方法^[2-3]、坐标变换法^[4]、类Lyapunov方法^[5-8]等. 在实际问题中, 作为状态反馈的实施手段, 对非线性系统观测器的研究是十分有必要的^[5]. 文献[6]提出了一类Lipschitz非线性系统的观测器设计方法, 文献[7]对此类非线性系统给出了确保观测器渐近稳定的充分必要条件, 并提出观测器增益矩阵的设计方法. 文献[8]将文献[7]的研究结果推广到降维观测器的设计中.

通常基于Lipschitz条件得到的观测器增益矩阵的设计具有较大的保守性, 为了减小保守性, 数学界引入单边Lipschitz条件. 文献[9]扩展性地提出了单边Lipschitz条件的概念, 给出了单边Lipschitz非线性系统观测器增益矩阵存在的充分条件, 但没有给出有效的观测器增益矩阵的设计方法. 文献[10]在文献[9]的基础上, 通过求解线性矩阵不等式得到观测器的增益矩阵. 文献[11]得到单边Lipschitz非线性系统降维观测器增益矩阵存在的充分条件. 文献[12]提出了单边Lipschitz非线性系统的观测器设计的新方法, 利用

二次内积有界性给出了观测器增益矩阵存在的充分条件, 此条件须解非线性矩阵不等式, 该文进一步将该条件改进为解线性矩阵不等式, 给出了观测器增益矩阵的设计方法. 文献[13-14]利用Lyapunov方法, 给出了观测误差渐近稳定的条件, 并将观测器的设计问题转化为一组线性矩阵不等式的求解问题, 通过求解线性矩阵不等式直接设计观测器的增益矩阵. 文献[15]基于代数Riccati方程, 给出了单边Lipschitz非线性系统降维、全维观测器的具体设计方法. 然而, 文献[9-15]给出的有关单边Lipschitz非线性系统的观测器设计都是针对状态观测器, 还没有见到针对此类非线性系统函数观测器的设计. 控制工程中函数观测器专指重构状态反馈的函数的一类观测器. 直接重构状态反馈的函数有可能使观测器的维数较降维状态观测器维数更低, 因而对单边Lipschitz非线性系统函数观测器的研究是十分有必要的. 本文研究了单边Lipschitz非线性系统的函数观测器设计问题. 基于线性矩阵不等式给出了函数观测器存在的条件, 然后给出函数观测器增益矩阵的设计方法.

本文中用到以下符号: \mathbb{R}^n 表示 n 维欧氏空间; $(\cdot)^+$ 表示矩阵的Moore-Penrose伪逆; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示欧几里德内积. 例如, 已知 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 那么有 $\langle x, y \rangle = x^T y$, 其中:

x^T 是 $x \in \mathbb{R}^n$ 的转置; $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数, 即 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

2 系统的描述与预备知识(System description and preliminaries)

考虑如下非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \Phi(x, u), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ 分别表示系统的状态、输入和输出; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 为已知的实矩阵, $\Phi(x, u)$ 关于 x, u 都为连续的非线性函数.

下列的定义1-2由文献[13]给出.

定义1 D 为包含原点的区域, 如果存在 $\rho \in \mathbb{R}$, 使得对任意的 $x_1, x_2 \in D$,

$$\langle \Phi(x_1, u^*) - \Phi(x_2, u^*), x_1 - x_2 \rangle \leq \rho \|x_1 - x_2\|^2, \quad (2)$$

那么称函数 $\Phi(x, u)$ 为关于 ρ 的单边Lipschitz函数, 其中 ρ 为单边Lipschitz常数, 可以是正数、零或负数, 条件(2)被称为单边Lipschitz条件.

定义2 \bar{D} 为包含原点的闭区域, 对任意的 x_1, x_2 , 如果存在 $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$, 使得

$$\langle \Phi(x_1, u^*) - \Phi(x_2, u^*) \rangle^T \langle \Phi(x_1, u^*) - \Phi(x_2, u^*) \rangle \leq \beta \|x_1 - x_2\|^2 + \alpha \langle x_1 - x_2, \Phi(x_1, u^*) - \Phi(x_2, u^*) \rangle, \quad (3)$$

则称函数 $\Phi(x, u)$ 在区域 \bar{D} 上为二次内部有界.

3 函数观测器设计(Function observer design)

对非线性系统(1), 设计如下形式的函数观测器:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= Q\eta(t) + Sy(t) + T\Phi(K^+\hat{\xi}, u), \\ \hat{\xi}(t) &= \eta(t) + \varphi y(t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$, $0 < r \leq n$, $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 为一给定的矩阵, K^+ 为矩阵 K 的伪逆. $\hat{\xi}(t)$ 为 $Kx(t)$ 的状态重构向量, 要求 $\hat{\xi}(t)$ 渐近收敛于 $Kx(t)$, $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, 其中: $S \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\varphi \in \mathbb{R}^{r \times p}$ 为待定矩阵.

给定 $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 记 $Y = \begin{bmatrix} C \\ I_n \end{bmatrix}$, Y^+ 为

Y 的伪逆. 考虑到 $\varphi C + T = K$ 可以表示成下式:

$$[\varphi \quad T] \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} = K, \quad (5)$$

易知 $\text{rank } Y = \text{rank} \begin{bmatrix} Y \\ K \end{bmatrix}$ 成立, 因此方程(5)的一般解为

$$[\varphi \quad T] = KY^+ + Z(I_{p+n} - YY^+), \quad (6)$$

其中 Z 是 $r \times (n+p)$ 维的任意矩阵. 令

$$\begin{cases} J_1 = KY^+ \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}, F_1 = (I_{p+n} - YY^+) \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}, \\ J_2 = KY^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}, F_2 = (I_{p+n} - YY^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (7)$$

则有 $\varphi = J_1 + ZF_1$, $T = J_2 + ZF_2$.

引理1 给定 $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 若有矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{r \times (n+p)}$ 使得 $\varphi = J_1 + ZF_1$ 满足以下条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} K - \varphi C \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} K - \varphi C \\ C \\ (K - \varphi C)A \end{bmatrix}, \quad (8)$$

那么存在矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $S \in \mathbb{R}^{r \times p}$ 使得下式成立:

$$QT + SC - TA = 0. \quad (9)$$

证 由于式(9)可以表示成下式:

$$[Q \quad S] \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = TA, \quad (10)$$

考虑到 $T = K - \varphi C$, 令 $\phi = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}$, ϕ^+ 为 ϕ 的伪逆.

由条件(8)成立, 可得方程(10)的一般解为

$$[Q \quad S] = (TA)\phi^+ + X(I_{r+p} - \phi\phi^+), \quad (11)$$

其中 X 为 $r \times (r+p)$ 维的任意矩阵. 令

$$\begin{cases} M_1 = (TA)\phi^+ \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, N_1 = (I_{r+p} - \phi\phi^+) \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \\ M_2 = (TA)\phi^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}, N_2 = (I_{r+p} - \phi\phi^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (12)$$

则有 $Q = M_1 + XN_1$, $S = M_2 + XN_2$, 引理1证毕.

如果 $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 为行满秩矩阵, 则 $K^+ = K^T(KK^T)^{-1}$ 为矩阵 K 的伪逆, 且

$$K(K^+\hat{\xi} - x) = \hat{\xi} - Kx, \quad (13)$$

其中: $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^r$, $x \in \mathbb{R}^n$, 存在可逆矩阵 $\Upsilon \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得 $K = \Upsilon^{-1}(I_r \ 0)\Psi^{-1}$, 由此可以推出下式:

$$K^+\hat{\xi} - x = \Psi \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \Upsilon(\hat{\xi} - Kx). \quad (14)$$

定理1 考虑系统(1). 假设存在常数 $\rho, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得非线性函数 $\Phi(x, u)$ 满足条件(2)-(3). 给定行满秩矩阵 $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$, 如果有矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{r \times (n+p)}$, 使得条件(8)成立, 且存在矩阵 $P = P^T > 0$, X , 以及常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 满足如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Omega + (\varepsilon_1\rho + \varepsilon_2\beta)\Gamma^T\Gamma & A \\ A^T & -\varepsilon_2I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

其中: $\Omega = P(M_1 + XN_1) + (M_1 + XN_1)^T P$, $\Gamma =$

$\Psi[I_r \ 0]^T \Upsilon$, 可逆矩阵 $\Upsilon \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得 $K = \Upsilon^{-1}(I_r \ 0)\Psi^{-1}$, 矩阵 M_1, N_1 由式(12)给定, $\Lambda = PT + \frac{(-\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2)\gamma^T[I_r \ 0]\Psi^T}{2}$, 那么函数观测器(4)的观测

误差收敛于零. 此时, 矩阵 $\varphi = J_1 + ZF_1$, $T = J_2 + ZF_2$, 若线性矩阵不等式(15)有可行解, 则存在矩阵 $P = P^T > 0, X$, 那么有 $Q = M_1 + XN_1, S = M_2 + XN_2$.

证 取 $T = K - \varphi C$, 由观测器(4)可得观测误差为

$$e(t) = \hat{\zeta} - Kx(t) = \eta(t) - Tx(t), \quad (16)$$

因此观测误差动态方程满足

$$\dot{e}(t) = \dot{\eta}(t) - T\dot{x}(t). \quad (17)$$

将系统(1)与(4)代入式(17), 整理后可得

$$\dot{e}(t) = Qe(t) + (QT + SC - TA)x(t) + T\Delta\Phi, \quad (18)$$

其中 $\Delta\Phi = \Phi(K^+\hat{\zeta}, u) - \Phi(x, u)$. 如果存在矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{r \times (n+p)}$ 满足引理1的条件, 那么误差动态方程(18)可表示成下式:

$$\dot{e}(t) = Qe(t) + T\Delta\Phi, \quad (19)$$

其中 $Q = M_1 + XN_1$.

选取Lyapnov函数

$$V(e) = e(t)^T Pe(t), \quad P = P^T > 0, \quad (20)$$

则 $V(e)$ 沿着闭环系统轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e(t)^T \Omega e(t) + 2e(t)^T PT\Delta\Phi = \\ & \begin{bmatrix} e(t) \\ \Delta\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega & PT \\ T^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \Delta\Phi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

由于非线性函数 $\Phi(x, u)$ 满足条件(2)–(3), 考虑到式(14)(16), 因此对任意的正数 ε_1 , 有

$$\varepsilon_1 \begin{bmatrix} e(t) \\ \Delta\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho\Gamma^T\Gamma & -\frac{\Gamma^T}{2} \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \Delta\Phi \end{bmatrix} \geq 0. \quad (22)$$

对任意的正数 ε_2 , 有

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} e(t) \\ \Delta\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta\Gamma^T\Gamma & \frac{\alpha\Gamma^T}{2} \\ * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \Delta\Phi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (23)$$

其中 $\Gamma = \Psi[I_r \ 0]^T \Upsilon$.

由式(21)–(23)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq \\ & \begin{bmatrix} e(t) \\ \Delta\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega + (\varepsilon_1\rho + \varepsilon_2\beta)\Gamma^T\Gamma & \Lambda \\ \Lambda^T & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \Delta\Phi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

若存在矩阵 $P = P^T > 0, X$ 以及正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 使得线性矩阵不等式(15)成立, 则对任意 $e(t) \neq 0$, 有

$$\dot{V}(e) < 0, \quad (25)$$

这表明当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e(t) \rightarrow 0$. 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\zeta}(t) \rightarrow Kx(t)$. 定理1证毕.

综上可得函数观测器(4)增益矩阵的具体设计步骤:

步骤1 给定矩阵 $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$, 按式(7)计算矩阵 J_1, J_2, F_1, F_2 , 那么有 $\varphi = J_1 + ZF_1, T = J_2 + ZF_2$, 其中 Z 是 $r \times (n+p)$ 维的任意矩阵.

步骤2 验证矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{r \times (n+p)}$ 是否使得条件(8)成立. 若成立则进入下一步, 否则返回步骤1或者停止.

步骤3 按式(12)计算矩阵 M_1, M_2, N_1, N_2 . 并按定理1要求求解线性矩阵不等式(15).

步骤4 若存在矩阵 $P, X_1 = PX$ 和正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 满足线性矩阵不等式(15), 那么有 $X = P^{-1}X_1, Q = M_1 + XN_1, S = M_2 + XN_2$. 函数观测器增益矩阵设计完毕.

4 仿真实例(Simulation example)

考虑形如式(1)的非线性系统, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.26 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1.95 & 0 & -48.6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\Phi(x, u) = [0 \ 21.6u \ 0 \ -x_4^{\frac{1}{2}}], \quad u = \sin t.$$

给定行满秩矩阵 $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 由于

$\text{rank}(K) = 3 < 4$, 那么所设计的函数观测器(4)为降维观测器, 取 $Z = 0$, 按定理1设计函数观测器, 得到

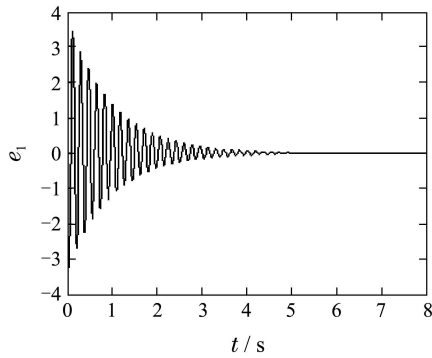
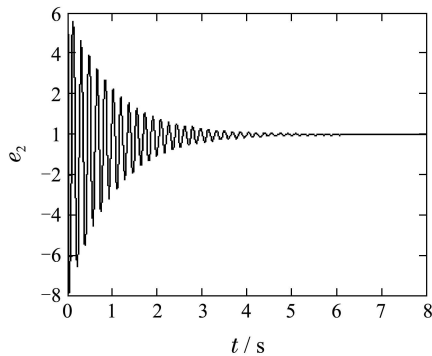
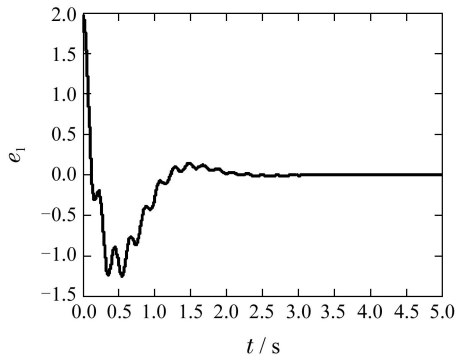
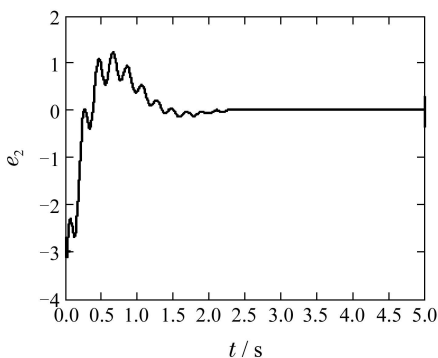
$$P = \begin{bmatrix} 3.4409 & 0.8012 & -0.3015 \\ 0.8012 & 2.8874 & -2.0486 \\ -0.3015 & -2.0486 & 1.8802 \end{bmatrix},$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -2.9026 & -24.3 & 24.3 \\ 1.2338 & 48.6 & -48.6 \\ -30.6032 & 58.6 & -48.6 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -24.3 & 0.8213 \\ 1.95 & -0.6169 \\ 1.95 & 15.3016 \end{bmatrix}.$$

状态 x_2 和 x_4 的误差响应曲线如图1–2所示, 其中: 初值为 $x_2(0) = 0, \hat{x}_2(0) = -1, x_4(0) = -2, \hat{x}_4(0) = 1$, 仿真结果表明, 状态 x_2 和 x_4 的误差响应曲线能够在6s内收敛到0.

给定矩阵 $K = I_4$, 函数观测器(4)为全维观测器, 状态 x_2 和 x_4 的误差响应曲线如图3–4所示. 仿真结果表明, 状态 x_2 和 x_4 的误差响应曲线能够在5s内收敛到0.

图1 状态 x_2 的误差响应曲线Fig. 1 Observer error dynamics of state x_2 图2 状态 x_4 的误差响应曲线Fig. 2 Observer error dynamics of state x_4 图3 状态 x_2 的误差响应曲线Fig. 3 Observer error dynamics of state x_2 图4 状态 x_4 的误差响应曲线Fig. 4 Observer error dynamics of state x_4

5 总结(Conclusions)

本文研究了单边Lipschitz非线性系统的函数观测器设计问题,通过求解线性矩阵不等式(LMI)给出了

函数观测器增益矩阵存在的条件.当矩阵 K 的秩小于状态的维数,所设计的函数观测器实现了降维观测器的功能;矩阵 K 的秩等于状态的维数,所设计的函数观测器实现了全维观测器的功能.仿真结果表明本文设计方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] THAU F. Observing the state of nonlinear dynamic systems [J]. *International Journal of Control*, 1973, 17(3): 471 – 479.
- [2] REIF F, SONNEMANN F, UNBEHAUEN R. Nonlinear state observation using-filtering Riccati design [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 203 – 208.
- [3] OISIOVICI R M, CRUZ S L. State estimation of batch distillation columns using an extended Kalman filter [J]. *Chemical Engineering Science*, 2000, 50(22): 4667 – 4680.
- [4] HOU M, PUGH A C. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 37(1): 1 – 9.
- [5] 马克茂, 马萍. Lipschitz非线性系统观测器设计新方法 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(4): 644 – 646.
(MA KEMAO, MA Ping. Novel observer design method for Lipschitz nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(4): 644 – 646.)
- [6] RAJAMANI R. Observers for Lipschitz nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(3): 397 – 401.
- [7] RAJAMANI R, CHO Y M. Existence and design of observer for nonlinear systems: relation to distance to unobservability [J]. *International Journal of Control*, 1998, 69(5): 717 – 731.
- [8] ZHU F, HAN Z. A note on observer for Lipschitz nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1751 – 1754.
- [9] HU G D. Observers for one-sided Lipschitz nonlinear systems [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2006, 23(4): 395 – 401.
- [10] ZHAO Y B, TAO J, SHI N Z. A note on observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(1): 66 – 71.
- [11] XU M Y, HU G D, ZHAO Y B. Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2009, 26(3): 299 – 313.
- [12] ABBASZADEH M, MARQUEZ H J. Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Baltimore: IEEE, 2010, 8: 5285 – 5289.
- [13] ZHANG W, YAN L, SHENG H S, et al. LMI-based observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems [C] // *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*. Yantai: IEEE, 2011: 256 – 260.
- [14] ZHANG W, YAN L, SHENG H S, et al. Non-linear observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems: an linear matrix inequality approach [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 9(6): 1297 – 1303.
- [15] ZHANG W, SU H S, WANG H W, et al. Full-order and reduced-order observers for one-sided Lipschitz nonlinear systems using Riccati equations [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 349(10): 4968 – 4977.

作者简介:

高虹 (1988-), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统的理论与应用, E-mail: 729642890@qq.com;

蔡秀珊 (1966-), 女, 博士, 教授, 主要研究方向为非线性系统的理论与应用等, E-mail: xiushan@zjnu.cn.