

均方根嵌入式容积卡尔曼滤波

张鑫春[†], 郭承军

(电子科技大学 电子科学技术研究院, 四川 成都 611731)

摘要: 传统容积卡尔曼滤波(CKF)的基础是三阶球面-径向容积准则, 该准则不仅要求计算 n 维超球体上的面积分, 还需将容积准则与扩展高斯-拉盖尔准则配合使用, 不易推导出高阶CKF滤波算法. 此外, CKF推导所采用的三阶球面容积准则也存在缺陷, 这极大地限制了CKF的滤波精度. 为避免以上问题, 本文基于嵌入式容积准则和均方根滤波技术, 提出一种加性噪声环境下, 用于非线性动态系统状态估计的全新容积卡尔曼滤波算法——三阶均方根嵌入式容积卡尔曼滤波(SICKF). SICKF具有滤波精度高、数值稳定性强等诸多优点, 适用于动态目标跟踪、非线性系统控制等. 仿真结果表明, SICKF的滤波精度显著优于传统的非线性滤波算法.

关键词: 控制系统; 卡尔曼滤波; 嵌入式容积准则; 非线性滤波; 完全对称点

中图分类号: V556, TP13 **文献标识码:** A

Square-root imbedded cubature Kalman filtering

ZHANG Xin-chun[†], GUO Cheng-jun

(Research Institute of Electronic Science and Technology, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 611731, China)

Abstract: It is well known that the core of the cubature Kalman filter (CKF) is the third-degree spherical-radial cubature rule. This rule not only requires computing the integrals over an n -dimensional spherical region but also needs to combine the third-degree spherical cubature rule with the first-degree Gauss-Laguerre rule; these cause difficulties in obtaining compact forms for higher-degree filters. Moreover, the third-degree cubature rule-based filter has some drawbacks in approximation. To tackle these problems, we use the imbedded family of cubature formulae to derive an accurate but simple third-degree nonlinear filter called square-root imbedded cubature Kalman filter (SICKF). This SICKF has advantages in numerical stability and high filtering accuracy, making it the ideal algorithm for target tracking, nonlinear system control, etc. Experimental results obtained by the proposed methods demonstrate that the performances of the SICKF are superior to the conventional nonlinear filters.

Key words: control systems; Kalman filters; imbedded cubature rule; nonlinear filtering; fully symmetric point

1 引言(Introduction)

最优估计理论是现代控制理论的核心之一. 20世纪60年代, Kalman提出著名的卡尔曼滤波理论^[1], 突破了传统维纳滤波的局限, 奠定了现代控制理论的基础. 卡尔曼滤波器能够应用于多输入多输出线性系统、平稳和非平稳随机系统, 在系统故障诊断、动态目标跟踪和宏观经济预测等领域^[2-3]获得广泛关注. 然而, 现实世界中的各类系统本质上都具有非线性特征, 当非线性较为严重时, 使用线性卡尔曼滤波技术必然导致滤波结果不够准确, 甚至滤波发散. 因而, 近几十年来, 非线性滤波技术的发展受到高度关注.

非线性滤波问题来源于含噪声观测值非线性随机系统的状态估计问题^[4]. 尽管贝叶斯推理给出了动态系统状态估计的最优解析解, 但它要求传播所有的概

率密度特征, 这几乎是不可能实现的^[5-6]. 因此, 当前的研究放弃了寻找最优非线性滤波算法, 转而发展次优滤波技术.

在贝叶斯滤波框架下, 通过作适当的近似, 已发展出一系列实用的次优非线性滤波技术. 其中, 由Sunahara和Yamashita^[7], Bucy和Senne^[8]提出的扩展卡尔曼滤波器(EKF), 被广泛应用于航空航天、目标跟踪、系统控制等诸多领域. 然而, EKF只是简单地将非线性系统模型局部线性化, 存在严重的模型描述误差. 对于强非线性系统, EKF仍会导致滤波发散^[9].

针对EKF的不足, Julier和Uhlmann^[10-11]率先提出了无迹卡尔曼滤波(UKF)算法. UKF通过选取确定数目的sigma点, 捕获状态向量的均值和方差, 从而克服了EKF局部线性化引起的误差. 相对于EKF, UKF的

优势在于,它能更好地捕获非线性变换的高阶矩,且滤波精度也明显提高。但是,UKF仍存在较大误差,而UKF所依赖的UT变换也是数值不稳定的^[12]。

通过假设概率密度函数近似服从高斯或混合高斯分布,Ito和Xiong等证明了UKF实际上是高斯滤波器(GF)的一个特例^[4]。除UKF外,Ito和Xiong还给出另外两种性能更优的高斯滤波器:高斯-厄米特滤波器(GHF)和中心差分滤波器(CDF)^[4]。

2009年,Arasaratnam和Haykin等^[12-13]提出一种新颖的非线性滤波算法—容积卡尔曼滤波(CKF)。CKF利用三阶球面-径向容积准则近似估计非线性滤波问题中的概率积分。相比于UKF算法,CKF具有更强的数值稳定性和更高的滤波精度^[12]。因而,近年来,CKF在导航定位、系统控制、多目标跟踪等领域获得广泛应用^[14-16]。然而,三阶球面-径向容积准则也存在一些不容忽视的缺陷,这极大地限制了CKF的滤波精度和高阶扩展性。

针对CKF的不足,本文提出一种全新的均方根嵌入式容积卡尔曼滤波算法(SICKF),SICKF的推导仅利用了嵌入式容积准则,避免了球面-径向容积准则的固有缺陷。同时,SICKF运用了均方根滤波思想,因而滤波误差更小,数值稳定性更高。

本文利用运动目标角测量跟踪(bearing-only tracking, BOT)模型对所提算法进行验证,仿真结果表明SICKF对运动目标跟踪的能力明显强于传统的非线性滤波算法。

2 CKF的不足(Drawbacks of the CKF)

离散控制系统状态方程和量测方程的非线性模型为^[12]

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 表示 k 时刻的状态向量, \mathbf{f} 和 \mathbf{h} 为非线性函数, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ 为测量值, $\mathbf{u}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_u}$ 为控制输入, \mathbf{v}_{k-1} 和 \mathbf{w}_k 为零均值、协方差分别为 \mathbf{Q}_{k-1} 和 \mathbf{R}_k 的加性高斯白噪声。

传统CKF算法由高斯域贝叶斯滤波理论推导而来。在该理论框架下,非线性滤波问题可归结为非线性函数与高斯概率密度函数乘积的数值积分问题,即

$$I(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3)$$

其中: \mathbf{f} 为已知的非线性函数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为积分区域, $w(\mathbf{x}) = \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x})$ 为权函数。

CKF利用三阶球面-径向容积准则计算非线性滤波问题中的积分^[12]。对于如式(3)的积分,该准则选取一组 $2n$ 个等权值的容积点(采样点)来实现积分的数值逼近,即

$$I(\mathbf{f}) \approx \sum_{i=1}^{2n} \omega_i \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_i), \quad (4)$$

其中: $\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{n}[\mathbf{1}]_i$ 为容积点, $\omega_i = 1/(2n)$ 为权值, $i = 1, \dots, 2n$ 。 $[\mathbf{1}]_i \in \mathbb{R}^n$ 为完全对称点集 $[\mathbf{1}]$ 的第 i 个元素,容积点集 $[\mathbf{1}]$ 具有如下形式:

$$[\mathbf{1}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

事实上,逼近式(4)存在一些不足之处,如:当 n 足够大时,容积点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 有可能超出积分区域 Ω 。此外,该逼近公式只能取正的权值,而坚持正的权值有可能导致计算不便,比如容积点超出定义区间,或者容积点为复数等^[17]。此外,CKF推导过程中所采用的三阶球面-径向容积准则结合了三阶容积准则和一阶广义高斯-拉盖尔准则,将其推广至高阶CKF时,需同时提升容积准则和高斯-拉盖尔准则的阶数。同时,该准则要求计算 n 维超球体上的面积分,计算过程十分复杂。因此,三阶球面-径向容积准的高阶扩展性较差。

3 均方根嵌入式容积卡尔曼滤波(Square-root imbedded cubature Kalman filtering)

鉴于球面-径向容积准则本质上的缺陷,本文采用嵌入式容积准则和均方根滤波技术,推导出一种全新的均方根嵌入式容积卡尔曼滤波算法。

3.1 嵌入式容积准则(Imbedded cubature rules)

1983年,Genz和Malik等^[18]构造出一种有限乘积区间上,完全对称的嵌入式积分族,实现了积分的数值逼近。Cools和Haegemans等^[19]对该准则作了适当修正,并将其推广至实数域内的任意积分区间。本文采用该广义嵌入式容积准则构造SICKF。

考虑实数域 \mathbb{R}^n 上的无穷积分

$$I(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1) \dots w(x_n) \times \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (5)$$

其中: $w(x_i) = \exp(-x_i^2)$, $i = 1, \dots, n$ 。利用嵌入式容积准则可以构造出一组完全对称的集合族 \mathbf{R} , 从而逼近积分 $I(\mathbf{f})$ 。令 $R^{(m,n)}$ 为集合 \mathbf{R} 中满足多项式拟合阶数为 $2m + 1$ 的元素,则

$$R^{(m,n)}(\mathbf{f}) = I(\mathbf{f}) \quad (6)$$

使得 n 维多项式的拟合精度至多为 $2m + 1$ 阶。

令 $P^{(m,n)}$ 是由整数 $0, 1, \dots, m$ 组成的集合 \mathbf{p} 的一个 n -划分,并且对于 $i \neq j$, 有 $P^{(m_i, n_i)} \neq P^{(m_j, n_j)}$ 。将 $P^{(m,n)}$ 的 n -划分按降序排列,则有

$$P^{(m,n)} =$$

$$\{(p_1, \dots, p_n) | m \geq p_1 \geq \dots \geq p_n \geq 0, |p| \leq m\}, \tag{7}$$

其中 $|p| = \sum_{i=1}^n p_i$.

给定一组非负并且元素各异的容积点生成器(generator): u_0, u_1, \dots, u_k , 其中 $u_0 = 0$. 令 $u = (u_{p_1}, u_{p_2}, \dots, u_{p_n})$, 则可定义

$$f[u] = \sum_{q \in \Pi_p} \sum_s f(s_1 u_{q_1}, s_2 u_{q_2}, \dots, s_n u_{q_n}), \tag{8}$$

式中: Π_p 表示 p 所有变换构成的集合, 并且对所有 $u_{q_i} \neq 0$ 的 i , 有 $s_i = \pm 1$.

令 $\delta = (\delta, \dots, \delta)$, 其中 $\delta \in \mathbb{R}^+$ 且数值已知, 则 $R^{(m,n)}$ 可表示为^[18-19]

$$R^{(m,n)}(f) = \sum_{p \in P^{(m-1,n)}} W_p^{(m,n)} f[u] + W^{(m,n)} f[\delta], \tag{9}$$

其中: $W_p^{(m,n)}, W^{(m,n)}$ 为相应的权值, 式(9)的数值由 δ 的取值完全确定.

由于 $R^{(m,n)}$ 包含了 $R^{(m-1,n)}$ 所有的函数值, R 因此被称为嵌入式族.

3.2 三阶SICKF(The third-degree SICKF)

由于三阶SICKF能给出较好的滤波效果, 在某些情况下, 能获得渐进五阶的滤波精度, 并且相对于五阶及更高阶滤波器所需的运算量更小. 因此, 本文仅给出三阶SICKF的推导.

定理 1 完全对称的 $R^{(m,n)}$ 被称为是精确到 $(2m + 1)$ 阶的当且仅当^[18-19]

$$R^{(m,n)}(x^{2i}) = I(x^{2i}), \forall i \in P^{(m,n)}. \tag{10}$$

定理的证明可参阅文献[18-19].

该定理蕴含着嵌入式容积准则对所有奇次拟合多项式的积分为0, 因而它对所有奇次项的积分都是精确的. 对于三阶准则, 仅需考虑 f 在偶次拟合多项式集合 $\{1, x_1^2\}$ 的积分, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 2^n \delta^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_0^{(1,n)} \\ W^{(1,n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中:

$$I_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x^T x) dx = \sqrt{\pi^n}, \tag{12}$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^2 \exp(-x^T x) dx = \sqrt{\pi^n}/2. \tag{13}$$

式(13)利用了Gamma函数的如下性质:

$$\Gamma(1/2 + n) = \frac{(2n - 1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \tag{14}$$

求解线性方程组(11), 则

$$W_0^{(1,n)} = (1 - \frac{1}{2\delta^2}) I_0, \tag{15}$$

$$W^{(1,n)} = (\frac{1}{2^n \delta^2}) I_2, \tag{16}$$

权值 $W_0^{(1,n)}, W^{(1,n)} \geq 0$ 当且仅当 $\delta^2 \geq 1/2$. 则

$$I(f) = R^{(1,n)}(f) = \sum_{p \in P^{(0,n)}} W_0^{(1,n)} f[0] + W^{(1,n)} f[\delta]. \tag{17}$$

将积分变换至标准高斯分布, 则进一步可得

$$\begin{aligned} I_N(f) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) N(0, I) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\sqrt{2}x) \exp(-x^T x) dx = \\ &= \sum_{p \in P^{(0,n)}} ((1 - \frac{1}{2\delta^2}) f[0] + \frac{1}{2^{n+1}\delta^2} f[\sqrt{2}\delta]) \triangleq \\ &= \sum_{i=1}^m \omega_i f(\xi_i), \end{aligned} \tag{18}$$

其中: 0 为零向量, I 为单位向量, $N(\cdot, \cdot)$ 表示高斯分布, 相应的容积点和权值为

$$\xi_i = \begin{cases} [0]_i, & i = 1, \\ \sqrt{2}[\delta]_i, & i = 2, \dots, 2^n + 1, \end{cases} \tag{19}$$

$$\omega_i = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2\delta^2}, & i = 1, \\ \frac{1}{2^{n+1}\delta^2}, & i = 2, \dots, 2^n + 1. \end{cases} \tag{20}$$

考虑到矩阵求逆、矩阵开方等对数值计算十分敏感, 在滤波过程中会引入较大的计算误差, 使状态误差协方差的正定性逐步丧失, 最终可能导致滤波算法失效. 因此, 本文结合均方根滤波技术, 给出均方根嵌入式容积卡尔曼滤波算法.

SICKF通过传播预测协方差和后验协方差矩阵的均方根, 避免了矩阵开方运算, 从而减小了计算误差, 提高了滤波精度和数值计算的稳定性.

给定初始条件 $P_{0|0}$ 和 $\hat{x}_{0|0}$, 由式(18)-(20), 可构造如下三阶标准SICKF算法:

$$P_{0|0} = S_{0|0} S_{0|0}^T. \tag{21}$$

1) 时间更新:

$$X_{i,k-1|k-1} = S_{k-1|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k-1|k-1}, \tag{22}$$

$$X_{i,k-1|k-1}^* = f(X_{i,k-1|k-1}, u_{k-1}), \tag{23}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^v \omega_i X_{i,k|k-1}^*, \tag{24}$$

$$\chi_{k|k-1}^* = [\omega_i (X_{i,k-1|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1})]_{i=1}^v, \tag{25}$$

$$S_{k|k-1} = qr([\chi_{k|k-1}^* \quad S_{Q,k-1}]). \tag{26}$$

2) 量测更新

$$X_{i,k|k-1} = S_{k|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1}, \tag{27}$$

$$Z_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1}, u_k), \tag{28}$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^v \omega_i Z_{i,k|k-1}, \tag{29}$$

$$\mathbf{Z}_{k|k-1} = [\omega_i(\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})]_{i=1}^v, \quad (30)$$

$$\mathbf{S}_{zz,k|k-1} = qr([\mathbf{Z}_{k|k-1}, \mathbf{S}_{R,k}]), \quad (31)$$

$$\chi_{k|k-1} = [\omega_i(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})]_{i=1}^v, \quad (32)$$

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \chi_{k|k-1} \mathbf{Z}_{k|k-1}^T, \quad (33)$$

$$\mathbf{W}_k = (\mathbf{P}_{xz,k|k-1} / \mathbf{S}_{zz,k|k-1}^T) / \mathbf{S}_{zz,k|k-1}, \quad (34)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}), \quad (35)$$

$$\mathbf{S}_{k|k} = qr([\chi_{k|k-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{Z}_{k|k-1} \quad \mathbf{W}_k \mathbf{S}_{R,k}]), \quad (36)$$

其中: $qr(\cdot)$ 表示矩阵的QR分解, $\mathbf{S}_{Q,k-1}$, $\mathbf{S}_{R,k}$ 分别为 \mathbf{Q}_{k-1} , \mathbf{R}_k 的均方根, $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 为一步预测协方差矩阵; $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 和 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$ 分别表示状态向量和量测值的一步状态预测; $\mathbf{P}_{zz,k|k-1}$ 和 $\mathbf{P}_{xz,k|k-1}$ 分别为状态和量测向量的一步预测协方差和互协方差矩阵; \mathbf{W}_k 为卡尔曼滤波增益, $\mathbf{P}_{k|k}$ 为状态估计协方差矩阵.

与CKF相比, SICKF仅采用了嵌入式容积准则和均方根滤波技术, 计算误差更小、数值稳定性更好, 并且能方便的推导出高阶SICKF滤波算法.

4 逼近误差分析(Error of approximation)

本节主要分析和比较三阶球面-径向容积准则和三阶嵌入式容积准则的逼近误差. 对于三阶容积准则, 仅需满足它对 $\{1, x_1^2\}$ 的积分是精确的. 因此, 逼近误差主要来自于 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 中所含的四阶项的积分.

不失一般性, 考虑 $I(\mathbf{f})$ 在四阶项 $x_1^4, x_1^2x_2^2$ 处的积分. 对于三阶球面-径向容积准则, 其逼近误差^[20]分别为

$$r_1 = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^4 \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{\sqrt{\pi^n}}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{f}(\sqrt{\frac{n}{2}} [1]_i) = \frac{3-n}{4} \sqrt{\pi^n}, \quad (37)$$

$$r_2 = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^2 x_2^2 \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{\sqrt{\pi^n}}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{f}(\sqrt{\frac{n}{2}} [1]_i) = \frac{\sqrt{\pi^n}}{4}. \quad (38)$$

总的逼近误差为

$$r = [c_1(3-n) + c_2] \frac{\sqrt{\pi^n}}{2880} \mathbf{f}^{(4)}(\boldsymbol{\zeta}), \quad \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n, \quad (39)$$

其中 c_1, c_2 分别为四阶项 $x_1^4, x_1^2x_2^2$ 的系数.

考虑到SICKF算法要求 $\delta^2 \geq 1/2$, 故三阶嵌入式容积准则的自由变量 δ 可取为 $\delta^2 = 1$. 类似于式(37)–(39)的推导, 可得其总的逼近误差为

$$\tilde{r} = (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2) \frac{\sqrt{\pi^n}}{2880} \mathbf{f}^{(4)}(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}), \quad \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \in \mathbb{R}^n, \quad (40)$$

其中 \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 分别为四阶项 $x_1^4, x_1^2x_2^2$ 的系数.

显然, 三阶球面-径向容积准则的逼近误差 r 与状态变量的维数密切相关. 当变量维数 n 足够大时, 其逼近误差将近似线性增长. 而三阶嵌入式容积准则的逼近误差 \tilde{r} 较为稳定, 与状态变量的维数 n 无关.

此外, 若四阶项 x_1^4 与 $x_1^2x_2^2$ 具有相同的系数, 三阶嵌入式容积准则可获得渐进五阶的积分精度, 这是三阶球面-径向容积准则所无法比拟的. 故在 Gaussian 加性噪声环境下, 三阶SICKF的滤波精度通常要高于传统的CKF算法.

5 验证与分析(Verification and analysis)

本文采用角测量跟踪(BOT)模型, 对SICKF算法进行验证分析, 并与传统的EKF, UKF, CKF等非线性滤波算法进行比较. BOT模型来自于国防科技领域, 并在文献[5–6, 21–23]中被广泛研究. 该模型描述的是一个二维平面内的动态目标跟踪问题, 其数学模型为

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\phi} \mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{v}_{k-1}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (41)$$

其中:

$$\mathbf{x}_k = (x, \dot{x}, y, \dot{y})^T, \quad \mathbf{v}_{k-1} = (v_x, v_y)_{k-1}^T,$$

且

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这里 x, y 为运动目标在笛卡尔坐标系下的坐标值, \dot{x} 和 \dot{y} 分别表示目标在 x, y 方向的速度, 系统噪声服从高斯分布, 且 $\mathbf{v}_{k-1} \sim N(0, Q\mathbf{I}_2)$, 其中 \mathbf{I}_2 为 2×2 单位矩阵. 固定点观察者观测到的角测量方程为

$$z_k = \arctan(y_k/x_k) + \mathbf{w}_k, \quad (42)$$

其中: 量测噪声服从分布 $\mathbf{w}_k \sim N(0, R)$, 其余数据的取值为 $Q = 0.0005^2, R = 0.001^2, N = 35, \delta^2 = 1$. 系统初始状态为

$$\mathbf{x}_0 = (-0.05, 0.001, 0.7, -0.055)^T,$$

初始状态估计取为 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0$, 并且初始协方差矩阵取为

$$\mathbf{P}_{0|0} = \text{diag}\{0.1^2, 0.005^2, 0.1^2, 0.01^2\}.$$

为了公平比较各非线性滤波算法, 进行100次独立 Monte Carlo 仿真取其平均, 图1给出了动态目标的跟踪轨迹.

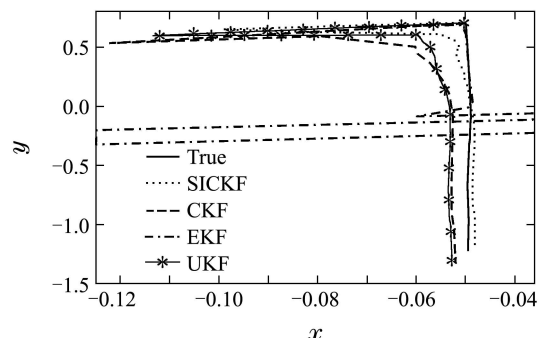


图 1 目标跟踪轨迹

Fig. 1 Tracking trajectory

由图1可见,在初始协方差矩阵误差较大时,SICKF,UKF和CKF都能很快收敛,但SICKF算法的收敛速度更快,跟踪误差更小。相比之下,EKF发散十分严重,仅能保持初始时刻极短时间内的跟踪。

为定量比较各非线性滤波算法,定义均方误差(RMSE)为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^2}, \quad (43)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 为 \mathbf{x}_k 的估计值。

图2给出各方向轴的状态估计均方误差RMSE。表1列出了图2中各算法 x, y, \dot{x} 和 \dot{y} 轴的状态估计RMSE数值。

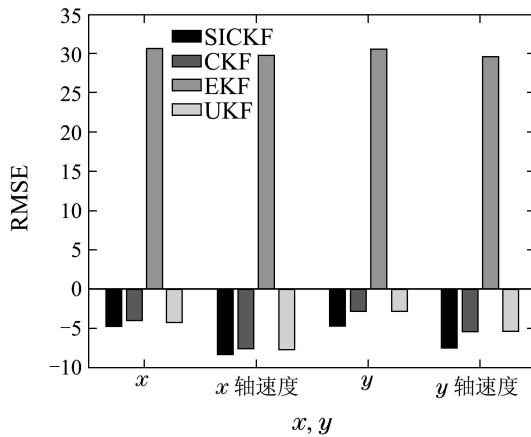


图2 状态估计均方误差(取自然对数)

Fig. 2 Average RMSE of all four coordinates (logarithmic in vertical axis)

图2和表1表明SICKF在各坐标方向的滤波误差明显小于其他非线性滤波器。UKF和CKF的均方误差性能基本相当,逊于SICKF但远好于EKF。

表1 状态估计均方误差(取自然对数)

Table 1 Average RMSE of all four coordinates (logarithmic in all four coordinates)

轴	RMSE			
	SICKF	CKF	EKF	UKF
x	-4.7898	-4.0678	30.6493	-4.3419
\dot{x}	-8.4394	-7.6396	29.6843	-7.7301
y	-4.7122	-2.9155	30.6493	-2.9079
\dot{y}	-7.5031	-5.5290	29.6843	-5.4739

定义 k 时刻的位置均方误差为

$$\text{RMSE}_{\text{pos}}(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N ((x_n - \hat{x}_{n|n})^2 + (y_n - \hat{y}_{n|n})^2)}. \quad (44)$$

类似地,可写出 k 时刻的速度均方误差 RMSE_{vel} 。位置

跟踪 RMSE_{pos} 和速度跟踪 RMSE_{vel} 如图3(a)–3(b)所示。

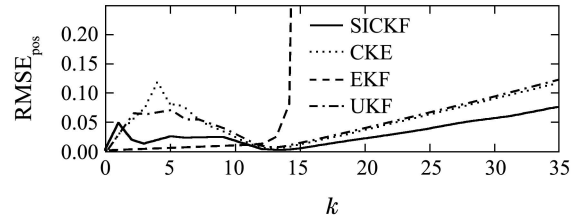


图3(a) 位置跟踪均方误差

Fig. 3(a) RMSE in position

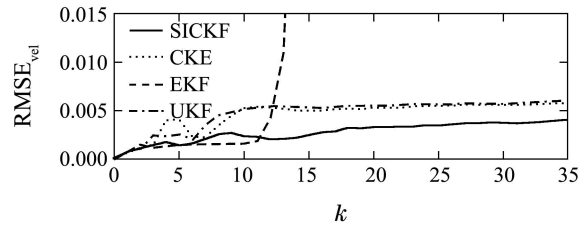


图3(b) 速度跟踪均方误差

Fig. 3(b) RMSE in velocity

图3(a)–3(b)表明SICKF对运动目标位置和速度均具有最强的跟踪能力。CKF与UKF的跟踪能力基本相当,但CKF要略优于UKF,并且3种算法均远好于EKF,这与理论分析一致。

6 结论(Conclusions)

本文主要针对传统容积卡尔曼滤波算法存在的问题,提出了一种均方根嵌入式容积卡尔曼滤波算法,所做的工作包括以下3个方面:

- 1) 指出了传统CKF算法存在的不足;
- 2) 引入嵌入式容积准则,并结合均方根滤波技术,推导出三阶SICKF算法;
- 3) 对三阶球面-径向容积准则和三阶嵌入式容积准则的逼近误差作了理论分析和比较。

利用角测量跟踪模型仿真的结果表明,SICKF算法具有较高的滤波精度和较强的数值稳定性,非常适合于动态目标跟踪、非线性系统控制等。接下来的研究侧重以下两个方面:

- 1) 将SICKF算法应用于非线性系统控制、导航解算等,代替传统的EKF,UKF算法;
- 2) 由于SICKF算法的推导过程中仅考虑了加性白噪声的情形,因此,有必要研究SICKF算法在有噪声下的滤波性能,提高算法在非白噪声下的鲁棒性。

参考文献(References):

- [1] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 1960, 82(1): 35–45.
- [2] WANG Y, ZHANG Y. Kalman filter based fault diagnosis of networked control system with white noise [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2005, 3(1): 55–59.

- [3] STRID I, VALENTIN K. Block Kalman filtering for large-scale DSGE models [J]. *Computational Economics*, 2009, 33(3): 277 – 304.
- [4] ITO K, XIONG K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 910 – 927.
- [5] ARULAMPALAM M S, MASKELL S, GORDON N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(2): 174 – 188.
- [6] WU Y, HU D, WU M, et al. Quasi-Gaussian particle filtering [C] // *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer, 2006, 3991: 689 – 696.
- [7] SUNAHARA Y, YAMASHITA K. An approximate method of state estimation for non-linear dynamical systems with state-dependent noise [J]. *International Journal of Control*, 1970, 11(6): 957 – 972.
- [8] BUCY R S, SENNE K D. Digital synthesis of non-linear filters [J]. *Automatica*, 1971, 7(3): 287 – 298.
- [9] Analytic Sciences Corporation. *Applied Optimal Estimation* [M]. Cambridge: The MIT Press, 1974.
- [10] JULIER S J, UHLMANN J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems [C] // *Proceedings of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*. New York: SPIE, 1997: 182 – 193.
- [11] JULIER S J, UHLMANN J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2004, 92(3): 401 – 422.
- [12] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254 – 1269.
- [13] ARASARATNAM I, HAYKIN S, HURD T R. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: Theory and simulations [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(10): 4977 – 4993.
- [14] LI W, JIA Y. Location of mobile station with maneuvers using an IMM-based cubature Kalman filter [J]. *IEEE Transactions on Industry Electronics*, 2012, 59(11): 4338 – 4348.
- [15] MACAGNANO D, FREITAS DE ABREU G T. Adaptive gating for multitarget tracking with Gaussian mixture filters [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(3): 1533 – 1538.
- [16] TANG X, WEI J, CHEN K. Square-root adaptive cubature Kalman filter with application to spacecraft attitude estimation [C] // *The 15th International Conference on Information Fusion (FUSION)*. New York: IEEE, 2012: 4338 – 4348.
- [17] MCNAMEE J, STENGER F. Construction of fully symmetric numerical integration formulas [J]. *Numerische Mathematik*, 1967, 10(4): 327 – 344.
- [18] GENZ A C, MALIK A A. An imbedded family of fully symmetric numerical integration rules [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1983, 20(3): 580 – 588.
- [19] COOLS R, HAEGEMANS A. An imbedded family of cubature formulae for n-dimensional product regions [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1994, 51(2): 251 – 262.
- [20] IYENGAR S R K, JAIN R K. *Numerical Methods* [M]. New Delhi: New Age International Publisher, 2009: 159 – 167.
- [21] GORDON N J, SALMOND D J, SIMITH A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. *IEE Proceedings-F*, 1993, 140(2): 107 – 113.
- [22] KITAGAWA G. Non-Gaussian state-space modeling of nonstationary time-series [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1987, 82(400): 1032 – 1041.
- [23] KOTECHEA J H, DJURIC P A. Gaussian particle filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(10): 2592 – 2601.

作者简介:

张鑫春 (1989–), 男, 硕士研究生, 目前担任IET-Radar, Sonar & Navigation等期刊审稿人, 主要研究方向为非线性控制理论及应用、组合导航技术等, E-mail: irving_zhang@163.com;

郭承军 (1985–), 男, 博士研究生, 主要研究领域为GNSS兼容互操作、GNSS增强系统等, E-mail: guochengjun@uestc.edu.cn.