

# 基于对偶四元数的卫星主从式编队姿轨跟踪的优化控制

吴锦杰<sup>†</sup>, 刘 昆, 韩大鹏, 张 峰

(国防科学技术大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 在对偶四元数的框架下研究了主从式编队卫星相对姿态和相对位置跟踪控制的优化问题. 首先, 给出了用对偶四元数描述的编队卫星六自由度的相对运动模型. 接着, 把系统模型拆分为标称系统和扰动系统, 对于标称系统, 使用李雅普诺夫优化控制技术和轨迹跟踪优化的方法来得到非线性系统的次优解, 而对于扰动系统, 利用滑模控制来确保闭环系统的鲁棒性, 为此把最优控制和滑模控制结合起来提出了一种优化的积分滑模控制器, 并通过李雅普诺夫方法严格地证明了整个闭环系统的全局渐近稳定性. 最后, 通过数学仿真来验证设计方法的有效性和可行性, 结果表明本文的方法能够实现编队卫星姿轨跟踪的精确控制, 收敛速度较快, 得到的性能指标更小, 且对模型参数不确定性和外部有界干扰具有较强鲁棒性.

**关键词:** 优化的积分滑模控制; 跟踪控制; 李雅普诺夫优化控制; 轨迹跟踪优化; 李雅普诺夫方法; 对偶四元数; 编队卫星

中图分类号: V448.21 文献标识码: A

## Optimized tracking-control for attitude and orbit of satellite formation flying using dual quaternion

WU Jin-jie<sup>†</sup>, LIU Kun, HAN Da-peng, ZHANG Feng

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

**Abstract:** This paper investigates the optimized tracking-control problem of the relative attitude and relative position between two satellites of a leader-follower satellite formation, in the framework of dual quaternion. First, a six degrees-of-freedom relative motion model of satellite formation flying (SFF) is introduced with dual quaternion. Then, the system model is divided into the nominal part and the disturbed part. For the nominal part, the Lyapunov optimizing control technique and the trajectory-following optimization are utilized to obtain a sub-optimal result of the nonlinear system. For the disturbed part, the sliding-mode control is adopted to ensure the robustness of the closed-loop system. Thus, an optimized integral sliding-mode controller that combines optimal control and sliding-mode control is developed. The resulting closed-loop system is proved to be globally asymptotically stable by using Lyapunov method. Numerical simulations are performed to demonstrate the effectiveness and validity of the proposed controller; the results indicate that the proposed controller can realize accurate tracking-control of the relative attitude and relative position for SFF with fast convergence rate, small performance indices, and robustness to model uncertainties and bounded external disturbances.

**Key words:** optimized integral sliding mode control; tracking-control; Lyapunov optimizing control; trajectory-following optimization; Lyapunov methods; dual quaternion; satellite formation flying

### 1 引言(Introduction)

卫星编队飞行是卫星应用的重要研究领域, 它通过一定的空间构型, 相互作用, 协同工作来完成空间任务. 对于编队卫星而言, 不仅对相对位置有要求, 而且要求相对姿态满足一定的关系. 因此, 六自由度的相对姿态与轨道动力学之间的耦合控制使得编队卫星控制成为一项具有挑战性的工作.

诸多学者对编队卫星的建模和控制进行了大量研究. 文献[1]给出了相对姿态和一阶近似的相对轨道动

力学方程, 基于线性反馈和李雅普诺夫稳定性理论来设计控制策略; 文献[2]研究了采用单个连续小推力器和反作用飞轮作为执行机构的编队卫星相对轨道与姿态耦合控制问题, 利用高斯伪谱法求解带约束的耦合控制的优化问题; 文献[3]研究了存在参数不确定性和干扰的主-从卫星编队飞行六自由度协同控制问题, 提出了一种满足控制输入有界的自适应 $L_2$ 增益干扰抑制控制方法. 在这些文献的研究中, 他们考虑了编队卫星的姿轨耦合特性, 但是在编队卫星的动力学建

模中,轨道和姿态是分开描述的,这种参数表示的不统一,为运算带来了困难.

针对这个问题,文献[4]研究了利用四元数来描述航天器轨道的方法,并建立了相应的轨道动力学方程;文献[5]分析了四维刚体旋转运动与航天器姿态和轨道运动之间的类推关系,将姿态运动模型的形式扩展到航天器一般空间运动的表示中;文献[6]应用矢阵方法将航天器的姿态和轨道运动统一到同一个代数框架内,建立了主从编队卫星相对姿态和轨道的耦合动力学模型.这些研究在一定程度上实现了两种运动参数表示上和动力学模型形式上的统一,但是四元数仅能够表示3个独立的变量,还不能实现姿态和轨道模型的完全统一.对此,有学者采用对偶四元数这个数学工具来分析航天器六自由度的相对运动.文献[7]研究了利用对偶数来表示刚体在三维空间中的一般运动;文献[8]研究了与单位对偶四元数相关的几何结构和李群特性,并应用于运动学的控制;文献[9-12]则在对偶四元数的框架下建立航天器的相对运动模型,并且设计了不同类型的控制律.从这些研究成果来看,对偶四元数是四元数的自然扩展,其运算方式、结构特点与四元数类似,单位四元数的几何内容很容易推广到对偶四元数<sup>[8]</sup>.另外,对偶四元数包含了转动和平动,能够与编队卫星六自由度的相对运动相对应.

上述方法实现了利用对偶四元数来对航天器六自由度的相对运动进行建模和控制,在控制精度和收敛速度上均取得了较好的结果,但是它们在控制器设计中并没有考虑到能量消耗的最优性.然而,在轨能量的消耗会影响到航天器的使用寿命,这在实际工程应用中是不能回避的,所以有必要对该问题进行深入研究.文献[13]在双星编队的初始化控制中,采用松弛法来处理非凸的约束,得到了一种燃料最优的控制器,但相对轨道控制器和姿态跟踪控制器是分开设计的;文献[14]为了控制航天器靠近和对齐翻滚的空间目标,采用 $\theta$ -D非线性最优控制技术,通过一个扰动步骤来寻找HJB(Hamilton-Jacobian-Bellman)方程的近似解.然而,对于高维的非线性系统,没有一种有效的算法能够求得HJB偏微分方程的解析解,且它的数值解也较难得到.因此,在编队卫星六自由度的相对运动控制中,设计一种易于实现、能够节省能量消耗且对模型不确定性和外界干扰具有鲁棒性的优化控制器是十分必要的.

本文针对主从式编队卫星姿轨跟踪控制的优化问题,用对偶四元数来建立六自由度的相对运动模型,基于积分滑模控制的思想,设计了一种优化且鲁棒的控制器.该控制器不仅考虑了卫星转动惯量的不确定性和质量的变化,而且考虑了外界干扰力矩和 $J_2$ 摄动力,同时还能够最小化给定的性能指标.最后,用仿真实验来验证了本文方法是有效的和可行的.

## 2 系统模型(System model)

### 2.1 坐标系定义(Definition of coordinate frames)

考虑两个绕地球飞行的低轨道刚性卫星,其中一个为主星,另一个为从星,假定它们可以视为一个质点.为了方便描述两个卫星之间的相对运动,首先定义3个坐标系.如图1所示: $O_I-XYZ$ 为地心惯性坐标系( $F_I$ ); $o_1-x_1y_1z_1$ 为主星的轨道坐标系( $F_1$ ),其中 $O_1$ 为主星的质心, $y_1$ 沿着地心指向主星, $z_1$ 沿着轨道面的负法线方向, $x_1$ 构成右手坐标系; $o_b-xyz$ 为卫星的本地坐标系( $F_b$ ),3个坐标轴方向分别沿着卫星的主轴方向,假定主星和从星的本地坐标系分别为 $F_{1b}$ 和 $F_{fb}$ .

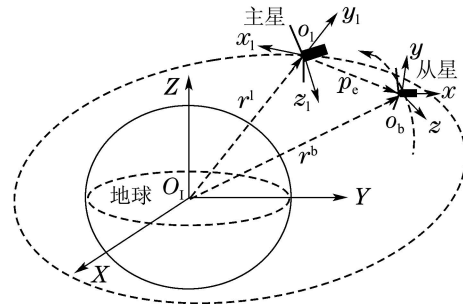


图1 编队卫星的坐标系示意图

Fig. 1 Sketch diagram of coordinate frames for SFF

### 2.2 六自由度的相对运动模型(Relative model of 6 DOF)

由上述定义的坐标系,编队卫星六自由度的相对运动可以用 $F_{fb}$ 相对于 $F_{1b}$ 的螺旋运动来描述,它包含了由四元数 $q$ 表示的旋转和由位置矢量 $P$ 表示的平移.这种螺旋运动可以用一个对偶四元数(定义见附录A)来表示<sup>[12]</sup>:

$$\hat{q}_{f1} = q_{f1} + \varepsilon \frac{1}{2} q_{f1} \circ P_{f1}^f, \quad (1)$$

其中 $q_{f1}$ 和 $P_{f1}^f$ 分别为 $F_{fb}$ 相对于 $F_{1b}$ 的四元数和位置矢量.

分别考虑从星和主星在 $F_I$ 中的运动,用对偶四元数来表示它们的运动学方程:

$$\dot{\hat{q}}_{fi} = \frac{1}{2} \hat{q}_{fi} \circ \hat{\omega}_{fi}^f, \quad (2)$$

$$\dot{\hat{q}}_{li} = \frac{1}{2} \hat{q}_{li} \circ \hat{\omega}_{li}^l, \quad (3)$$

其中: $\hat{\omega}_{fi}^f = \omega_{fi}^f + \varepsilon(\dot{P}_{fi}^f + \omega_{fi}^f \times P_{fi}^f)$ ,  $\hat{\omega}_{li}^l = \omega_{li}^l + \varepsilon(\dot{P}_{li}^l + \omega_{li}^l \times P_{li}^l)$ .类似地,可以用误差对偶四元数来表示从星与主星之间的相对运动

$$\hat{q}_{fi} = \hat{q}_{li}^* \circ \hat{q}_{fi}. \quad (4)$$

与式(2)和式(3)类似,主从星之间的相对误差运动学方程为

$$\begin{cases} \dot{\hat{q}}_{f1} = \frac{1}{2} \hat{q}_{f1} \circ \hat{\omega}_{f1}^f, \\ \dot{\hat{\omega}}_{f1}^f = \omega_{f1}^f + \varepsilon(\dot{P}_{f1}^f + \omega_{f1}^f \times P_{f1}^f), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\hat{\omega}_{f1}^f, \omega_{f1}^f$ 和 $P_{f1}^f$ 分别为 $F_{fb}$ 相对于 $F_{fb}$ 的速度旋量、角速度和位置矢量在 $F_{fb}$ 中的分量.  $\hat{\omega}_{f1}^f$ 也可以表示为

$$\hat{\omega}_{f1}^f = \hat{\omega}_{f1}^f - \hat{q}_{f1}^* \circ \hat{\omega}_{li}^1 \circ \hat{q}_{f1}. \quad (6)$$

对式(6)求导, 并根据式(5)得到

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_{f1}^f &= \dot{\hat{\omega}}_{f1}^f - (\hat{q}_{f1}^* \circ \hat{\omega}_{li}^1 \circ \hat{q}_{f1})' = \\ &= -\hat{M}_f^{-1}(\hat{\omega}_{f1}^f \times \hat{M}_f \hat{\omega}_{f1}^f) + \hat{M}_f^{-1} \hat{F}_f^f - \\ &= \hat{q}_{f1}^* \circ \dot{\hat{\omega}}_{li}^1 \circ \hat{q}_{f1} + \hat{\omega}_{f1}^f \times (\hat{q}_{f1}^* \circ \hat{\omega}_{li}^1 \circ \hat{q}_{f1}), \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)即为编队卫星在 $F_{fb}$ 中的相对误差动力学方程. 其中:  $\hat{M}_f$ 为从星的对偶惯量矩阵(表达式见附录A),  $\hat{F}_f^f$ 为从星受到的对偶力. 由对偶数的理论, 式(7)可以拆分为实数部分和对偶部分<sup>[12]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{f1}^f &= \\ J_f^{-1}[-(\omega_{f1}^f + C_{f1} \omega_{li}^1) \times J_f(\omega_{f1}^f + C_{f1} \omega_{li}^1)] - \\ C_{f1} \dot{\omega}_{li}^1 + \omega_{f1}^f \times C_{f1} \omega_{li}^1 + J_f^{-1}(T_u^f + T_d^f), \quad (8) \\ \dot{P}_{f1}^f &= (\dot{P}_{f1}^f + \omega_{f1}^f \times P_{f1}^f)' = \\ -2C_{f1} \omega_{li}^1 \times \dot{P}_{f1}^f - C_{f1} \omega_{li}^1 \times (C_{f1} \omega_{li}^1 \times P_{f1}^f) - \\ C_{f1} \dot{\omega}_{li}^1 \times P_{f1}^f + \frac{\mu}{\|P_{li}^1\|^3} C_{f1} P_{li}^1 - 2\omega_{f1}^f \times \dot{P}_{f1}^f - \\ \omega_{f1}^f \times (\omega_{f1}^f \times P_{f1}^f) - 2C_{f1} \omega_{li}^1 \times (\omega_{f1}^f \times P_{f1}^f) - \\ \frac{\mu}{\|P_{fi}^f\|^3} P_{fi}^f + \frac{F_u^f}{m_f} + \frac{F_d^f}{m_f}, \quad (9) \end{aligned}$$

其中:  $T_u^f, T_d^f, F_u^f$ 和 $F_d^f$ 分别为从星的控制力矩、扰动力矩、控制力和扰动力,  $C_{f1}$ 为 $F_{fb}$ 相对于 $F_{fb}$ 的方向余弦阵.

如式(9)所示, 位置的变化包含了姿态的分量 $\omega_{f1}^f$ 和 $C_{f1}$ . 因此, 在对偶四元数的框架下, 编队卫星姿态和轨道的耦合特性得到了体现.

### 3 姿轨跟踪的优化控制(Optimized tracking control of attitude and orbit)

#### 3.1 问题表述与分析(Problem statements and analysis)

在编队卫星的跟踪控制中, 为了使得主星与从星之间的相对姿态和相对位置达到期望的变化轨迹, 一般将当前值与期望值的误差 $\hat{e}$ 作为控制对象, 它的定义如下:

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} \hat{e}_\delta \\ \hat{e}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\ln \hat{e}_q)_v \\ \hat{\omega}_{f1}^f - \hat{\omega}_{f1,d}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\delta + \varepsilon e_p \\ e_\omega + \varepsilon e_v \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中:  $(\cdot)_v$ 为对应的向量部分,  $\ln \hat{e}_q$ 为 $\hat{e}_q$ 的对数运算(运算定义见附录A),  $\hat{e}_q = e_q + \varepsilon e'_q$ ,  $e_\delta = (e_q)_v = (q_{f1,d}^* \circ q_{f1})_v$ ,  $e_p = 2(e_q^* \circ e'_q)_v$ .

因此, 本文的控制目标可以概括为两个部分: 1) 在考虑卫星模型参数不确定和外部扰动的情况下, 使得误差 $\hat{e}$ 收敛到0附近; 2) 为了提高收敛速率, 同时节省控制过程中的能量消耗, 需要最小化预定义的两

个性能指标 $I_1$ 和 $I_2$ :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty ([e_\omega^T \ e_\delta^T] Q_1 [e_\omega^T \ e_\delta^T]^T + (T_u^f)^T R_1 T_u^f) dt, \quad (11)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty ([e_v^T \ e_p^T] Q_2 [e_v^T \ e_p^T]^T + (F_u^f)^T R_2 F_u^f) dt, \quad (12)$$

其中 $Q_1, R_1, Q_2$ 和 $R_2$ 均为对称正定矩阵.

为方便问题分析, 首先给出2个合理的假设:

**假设 1** 从星的惯量矩阵 $J_f$ 未知, 它的质量 $m_f$ 也是变化的, 但是满足如下条件:

$$J_f = J_{fn} + \Delta J_f, \quad (13)$$

$$m_f = m_{fn} + \Delta m_f, \quad (14)$$

其中:  $J_{fn}$ 为已知的标称部分, 它是一个对角矩阵;  $\Delta J_f$ 为未知的不确定部分;  $m_{fn}$ 为已知的初始质量;  $\Delta m_f$ 为质量的变化量.

**假设 2** 从星的扰动力矩和扰动力的变化规律未知, 但是满足如下条件:

$$|T_{d,i}^f(t)| \leq \bar{T}_d^f, |F_{d,i}^f(t)| \leq \bar{F}_d^f, i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

其中 $\bar{T}_d^f$ 和 $\bar{F}_d^f$ 分别为扰动力矩和扰动力在惯量主轴3个方向上的最大值, 且 $\bar{T}_d^f$ 和 $\bar{F}_d^f$ 已知.

将式(10)代入式(8)和式(9), 并利用上述两个假设条件, 得到用误差 $\hat{e}$ 表示的系统的矩阵形式为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= [\dot{e}_\omega \ \dot{e}_\delta \ \dot{e}_v \ \dot{e}_p]^T = \\ &= \begin{bmatrix} f_{1n} \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{fn}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{fn}} E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_u^f \\ F_u^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{d}_T \\ 0 \\ \hat{d}_F \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $f_{1n}, f_2, f_3, f_4, \hat{d}_T$ 和 $\hat{d}_F$ (表达式见附录B)分别为系统状态的函数. 在式(16)中, 等号右边的前两项为标称系统, 而第3项为扰动系统. 当系统状态远离平衡点时, 标称系统占主导作用; 而当系统状态接近平衡点时, 扰动系统将成为影响系统性能的主要因素. 为了实现控制目标, 本文采用积分滑模控制的思想来设计控制律. 对于标称系统, 利用最优控制, 使得系统沿着较优的状态轨迹收敛到平衡点附近; 而对于扰动系统, 利用滑模控制, 使得系统对模型参数不确定性和外界干扰具有较强的鲁棒性.

#### 3.2 标称系统的次优控制(Suboptimal control of nominal system)

将式(16)中的标称系统划分为两个子系统:

$$\begin{cases} \dot{X}_{1n} = F_{1n} + G_{1n} T_u^f, \\ \dot{X}_{2n} = F_2 + G_{2n} F_u^f, \end{cases} \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{1n} &= [\mathbf{e}_{\omega n}^T \ \mathbf{e}_{\delta n}^T]^T, \quad \mathbf{X}_{2n} = [\mathbf{e}_{v n}^T \ \mathbf{e}_{p n}^T]^T, \\ \mathbf{F}_{1n} &= [\mathbf{f}_{1n}^T \ \mathbf{f}_{2n}^T]^T, \quad \mathbf{F}_2 = [\mathbf{f}_3^T \ \mathbf{f}_4^T]^T, \\ \mathbf{G}_{1n} &= [\mathbf{J}_{f n}^{-1} \ \mathbf{0}]^T, \quad \mathbf{G}_{2n} = \left[ \frac{1}{m_{f n}} \mathbf{E} \ \mathbf{0} \right]^T. \end{aligned}$$

寻找式(17)所示标称系统的最优控制律需要求解HJB偏微分方程,这对于高维的非线性系统很少能够得到它的解析解,而求解它的数值解则相当繁琐.因此,寻找一种次优的控制律则显得较为实际.李雅普诺夫优化控制技术<sup>[15-17]</sup>具有最优控制的特征,能够解决两点边值的问题.它的具体思想是通过构造一个李雅普诺夫函数,使得该函数具有对于目标集合下降或者收敛的度量特征<sup>[18]</sup>,再利用轨迹跟踪优化的方法来设计一种在线计算的次优控制律使得该函数递减,从而能够使得该目标集合是渐近稳定的.

**定义1** 函数 $\Phi(x)$ 是目标集合 $\Omega$ 的下降函数,如果在目标集合 $\Omega$ 的能控点上满足如下条件<sup>[17]</sup>:

- 1)  $\Phi(x)$ 是一个连续函数,且它在集合 $\Omega$ 的外部和集合 $\Omega$ 的边界上是连续可微的;
- 2)  $\Phi(x) \leq v$ 的区域是一个嵌套的集合.即如果 $v_1 \leq v_2$ 则 $\{x | \Phi(x) \leq v_1\} \subset \{x | \Phi(x) \leq v_2\}$ ;
- 3) 目标集合 $\Omega$ 包含在 $\Phi(x) \leq v$ 的区域内;
- 4) 如果目标集合 $\Omega$ 是有界的,那么 $\Phi(x) \leq v$ 的区域也是有界的.

**定义2** 对于非线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入,  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ 是连续且连续可微的.目标集合 $\Omega$ 的能控集合 $\Xi$ 定义为<sup>[17]</sup>:在容许控制 $\mathbf{u}$ 的作用下,能够在有限时间内转移到目标集合 $\Omega$ 的系统所有初始状态的集合.

对于式(16)所示系统,选取目标集合 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 为

$$\Omega_1 = \{\mathbf{X}_{1n} | \|\mathbf{e}_{\omega n}\| \leq \zeta_1, \|\mathbf{e}_{\delta n}\| \leq \zeta_2\}, \quad (18)$$

$$\Omega_2 = \{\mathbf{X}_{2n} | \|\mathbf{e}_{v n}\| \leq \zeta_3, \|\mathbf{e}_{p n}\| \leq \zeta_4\}, \quad (19)$$

其中 $\zeta_1 > 0$ ,  $\zeta_2 > 0$ ,  $\zeta_3 > 0$ 和 $\zeta_4 > 0$ 均为较小的实数.

选定两个函数 $\Phi_1(\mathbf{X}_{1n})$ 和 $\Phi_2(\mathbf{X}_{2n})$ 为

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{X}_{1n}) &= \\ & \frac{1}{2}(a_1 \mathbf{e}_{\omega n}^T \mathbf{J}_{f n} \mathbf{e}_{\omega n} + 2b_1 \mathbf{e}_{\omega n}^T \mathbf{J}_{f n} \mathbf{e}_{\delta n} + c_1 \mathbf{e}_{\delta n}^T \mathbf{e}_{\delta n}), \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{X}_{2n}) &= \\ & \frac{1}{2}(a_2 m_{f n} \mathbf{e}_{v n}^T \mathbf{e}_{v n} + 2b_2 m_{f n} \mathbf{e}_{v n}^T \mathbf{e}_{p n} + c_2 \mathbf{e}_{p n}^T \mathbf{e}_{p n}), \quad (21) \end{aligned}$$

其中 $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ ,  $c_i > 0$  ( $i=1, 2$ )为可调参数.显然,式(20)–(21)满足定义1中的4个条件.因此, $\Phi_1(\mathbf{X}_{1n})$ 和 $\Phi_2(\mathbf{X}_{2n})$ 分别为目标集合 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 的下降函数.

为了使得 $\mathbf{X}_{1n}$ 和 $\mathbf{X}_{2n}$ 分别收敛到目标集合 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ ,同时最小化性能指标 $I_1$ 和 $I_2$ ,构建两个增广的下

降函数 $\bar{\Phi}_1(\mathbf{X}_{1n})$ 和 $\bar{\Phi}_2(\mathbf{X}_{2n})$ 分别为

$$\bar{\Phi}_1(\mathbf{X}_{1n}) = I_1 + \Phi_1(\mathbf{X}_{1n}), \quad (22)$$

$$\bar{\Phi}_2(\mathbf{X}_{2n}) = I_2 + \Phi_2(\mathbf{X}_{2n}). \quad (23)$$

由式(22)和式(23)可见,增广的下降函数分别包含了性能指标 $I_1$ 和 $I_2$ .因此,把寻找次优控制律的问题转变为设计控制律使得系统能控集合 $\Xi$ 上的所有状态渐近收敛到目标集合 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ ,并且最小化 $\dot{\bar{\Phi}}_1(\mathbf{X}_{1n})$ 和 $\dot{\bar{\Phi}}_2(\mathbf{X}_{2n})$ ,即

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{T}_u^f} \dot{\bar{\Phi}}_1(\mathbf{X}_{1n}), \\ \min_{\mathbf{F}_u^f} \dot{\bar{\Phi}}_2(\mathbf{X}_{2n}), \end{cases} \quad \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{X}_{1n} \in \Xi \rightarrow \mathbf{X}_{1n} \in \Omega_1, \\ \mathbf{X}_{2n} \in \Xi \rightarrow \mathbf{X}_{2n} \in \Omega_2. \end{cases} \quad (24)$$

为了能够最小化 $\dot{\bar{\Phi}}_1(\mathbf{X}_{1n})$ 和 $\dot{\bar{\Phi}}_2(\mathbf{X}_{2n})$ ,那么沿着状态轨迹的每个点需要满足的必要条件为

$$\left[ \frac{\partial \dot{\bar{\Phi}}_1}{\partial \mathbf{T}_u^f} \right]^T = \mathbf{0}, \quad \left[ \frac{\partial \dot{\bar{\Phi}}_2}{\partial \mathbf{F}_u^f} \right]^T = \mathbf{0}. \quad (25)$$

取 $\mathbf{g}_1 = \left[ \frac{\partial \dot{\bar{\Phi}}_1}{\partial \mathbf{T}_u^f} \right]^T$ 和 $\mathbf{g}_2 = \left[ \frac{\partial \dot{\bar{\Phi}}_2}{\partial \mathbf{F}_u^f} \right]^T$ ,根据牛顿法<sup>[18]</sup>,对于式(25)可以通过设计 $\dot{\mathbf{T}}_u^f$ 和 $\dot{\mathbf{F}}_u^f$ 使得当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{g}_1$ 和 $\mathbf{g}_2$ 收敛到0,因此可以取 $\dot{\mathbf{g}}_1 = -\mathbf{g}_1$ 和 $\dot{\mathbf{g}}_2 = -\mathbf{g}_2$ .

又由

$$\dot{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{X}_{1n}} \dot{\mathbf{X}}_{1n} + \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{T}_u^f} \dot{\mathbf{T}}_u^f, \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_2 = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{X}_{2n}} \dot{\mathbf{X}}_{2n} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{F}_u^f} \dot{\mathbf{F}}_u^f, \quad (27)$$

令 $\mathbf{G}_1 = \frac{\partial^2 \dot{\bar{\Phi}}_1}{\partial (\mathbf{T}_u^f)^2}$ 和 $\mathbf{G}_2 = \frac{\partial^2 \dot{\bar{\Phi}}_2}{\partial (\mathbf{F}_u^f)^2}$ ,得到控制律为

$$(\dot{\mathbf{T}}_u^f)_{\text{opt}} = -\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{g}_1 + \dot{\mathbf{g}}_1), \quad (28)$$

$$(\dot{\mathbf{F}}_u^f)_{\text{opt}} = -\mathbf{G}_2^{-1}(\mathbf{g}_2 + \dot{\mathbf{g}}_2). \quad (29)$$

然而,式(28)和式(29)中的 $\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 可能会出现奇异的情况.为此,采用梯度增强的牛顿算法<sup>[19-21]</sup>,它在 $\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 中引入摄动项,具有全局收敛特性、非奇异性和非刚性特征,并且收敛速度比牛顿法更快.因此得到标称系统的次优控制律 $(\hat{\mathbf{F}}_u^f)_{\text{opt}} = (\mathbf{F}_u^f)_{\text{opt}} + \varepsilon(\mathbf{T}_u^f)_{\text{opt}}$ 为

$$(\hat{\mathbf{T}}_u^f)_{\text{opt}} = -[r_1(\|\mathbf{g}_1\| + \|\dot{\mathbf{g}}_1\|)\mathbf{E} + \mathbf{G}_1]^{-1}(\mathbf{g}_1 + \dot{\mathbf{g}}_1), \quad (30)$$

$$(\hat{\mathbf{F}}_u^f)_{\text{opt}} = -[r_2(\|\mathbf{g}_2\| + \|\dot{\mathbf{g}}_2\|)\mathbf{E} + \mathbf{G}_2]^{-1}(\mathbf{g}_2 + \dot{\mathbf{g}}_2), \quad (31)$$

其中 $r_1$ 和 $r_2$ 均为大于0的常数.

### 3.3 优化的积分滑模控制(Optimized integral sliding model control)

在 $(\hat{\mathbf{F}}_u^f)_{\text{opt}}$ 的作用下能够使得标称系统的状态渐近收敛到目标集合 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ ,同时最小化 $I_1$ 和 $I_2$ .但

是, 当系统状态接近平衡点时, 由卫星模型参数的不确定性和外界干扰引起的扰动将成为影响控制精度的主要因素. 为确保系统的鲁棒性, 把滑模控制与式(30)–(31)所示的次优控制律结合起来, 设计了优化的积分滑模控制器, 给出如下定理:

**定理 1** 对于式(16)表示的编队卫星系统, 在假设1和假设2的条件下, 设计控制器为

$$\hat{\mathbf{F}}_u^f = \mathbf{F}_u^f + \varepsilon \mathbf{T}_u^f = ((\mathbf{F}_u^f)_{\text{opt}} - \beta \text{sig}(\mathbf{S}_2)^\gamma) + \varepsilon((\mathbf{T}_u^f)_{\text{opt}} - \alpha \text{sig}(\mathbf{S}_1)^\gamma), \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_2 + \varepsilon \mathbf{S}_1 = (\varphi_2 - \psi_2) + \varepsilon(\varphi_1 - \psi_1), \quad (33)$$

$$\varphi_1 = p_1 \mathbf{e}_\omega + p_2 \mathbf{e}_\delta, \quad (34)$$

$$\varphi_2 = p_3 \mathbf{e}_v + p_4 \mathbf{e}_p, \quad (35)$$

$$\psi_1 = \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}_1} (\mathbf{F}_{1n} + \mathbf{G}_{1n} (\mathbf{T}_u^f)_{\text{opt}}) d\tau, \quad (36)$$

$$\psi_2 = \int_0^t \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{X}_2} (\mathbf{F}_2 + \mathbf{G}_{2n} (\mathbf{F}_u^f)_{\text{opt}}) d\tau, \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_T = \mathbf{J}_{fn} \hat{\mathbf{d}}_T, \quad \hat{\mathbf{d}}_F = m_{fn} \hat{\mathbf{d}}_F, \quad (38)$$

其中:  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_2 + \varepsilon \mathbf{S}_1$  为闭环系统的滑模面;  $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ,  $\beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ ,  $\gamma, p_1, p_2, p_3$  和  $p_4$  均为设计参数, 满足  $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0, \alpha_i > 0, \beta_i > 0 (i = 1, 2, 3), 0 < \gamma < 1$ .  $\text{sig}(\mathbf{x})^\gamma$  的定义为

$$\text{sig}(\mathbf{x})^\gamma = [\text{sgn } x_1 |x_1|^\gamma, \text{sgn } x_2 |x_2|^\gamma, \text{sgn } x_3 |x_3|^\gamma]^\text{T}, \quad (39)$$

那么, 闭环系统的滑模面  $\mathbf{S}_1$  和  $\mathbf{S}_2$  将在有限时间内分别收敛到有界区域  $\eta_1 > 0$  和  $\eta_2 > 0$ , 即

$$\|\mathbf{S}_1\| \leq \eta_1 = (\bar{\bar{d}}_T / \underline{\alpha})^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \|\mathbf{S}_2\| \leq \eta_2 = (\bar{\bar{d}}_F / \underline{\beta})^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (40)$$

其中:  $\underline{\alpha} = \min(\alpha_i), \underline{\beta} = \min(\beta_i), \bar{\bar{d}}_T = \max(|\bar{\bar{d}}_{Ti}|), \bar{\bar{d}}_F = \max(|\bar{\bar{d}}_{Fi}|) (i = 1, 2, 3)$ . 然后, 闭环系统的跟踪误差则分别渐近收敛到有界区域, 即

$$\|\mathbf{e}_\omega\| \leq \varepsilon_1, \quad \|\mathbf{e}_\delta\| \leq \varepsilon_2, \quad (41)$$

$$\|\mathbf{e}_v\| \leq \varepsilon_3, \quad \|\mathbf{e}_p\| \leq \varepsilon_4, \quad (42)$$

其中:  $\varepsilon_1(p_1, p_2, \eta_1, \zeta_1) > 0$  和  $\varepsilon_2(p_1, p_2, \eta_1, \zeta_1) > 0$  是  $p_1, p_2, \eta_1, \zeta_1$  的函数,  $\varepsilon_3(p_3, p_4, \eta_2, \zeta_2) > 0$  和  $\varepsilon_4(p_3, p_4, \eta_2, \zeta_2) > 0$  是  $p_3, p_4, \eta_2, \zeta_2$  的函数.

**证** 定理的证明过程包含两部分. 首先, 证明滑模面  $\mathbf{S}_1$  和  $\mathbf{S}_2$  分别在有限时间内收敛到有界区域  $\eta_1$  和  $\eta_2$ ; 然后, 证明跟踪误差分别渐近收敛到有界区域  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  和  $\varepsilon_4$ .

1) 为了证明滑模面  $\mathbf{S}_1$  和  $\mathbf{S}_2$  的有限时间收敛性, 选取李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{S}_1^\text{T} \mathbf{J}_{fn} \mathbf{S}_1 + \frac{1}{2} m_{fn} \mathbf{S}_2^\text{T} \mathbf{S}_2. \quad (43)$$

对式(43)左右两边求导得到

$$\dot{V} = \mathbf{S}_1^\text{T} \mathbf{J}_{fn} \dot{\mathbf{S}}_1 + m_{fn} \mathbf{S}_2^\text{T} \dot{\mathbf{S}}_2, \quad (44)$$

其中:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_1 &= \dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}_1 = \\ &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}_1} \dot{\mathbf{X}}_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}_1} (\mathbf{F}_{1n} + \mathbf{G}_{1n} (\mathbf{T}_u^f)_{\text{opt}}) = \\ &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}_1} (-\mathbf{G}_{1n} \alpha \text{sig}(\mathbf{S}_1)^\gamma + [\hat{\mathbf{d}}_T^\text{T}, \mathbf{0}]^\text{T}) = \\ &= -p_1 \mathbf{J}_{fn}^{-1} \alpha \text{sig}(\mathbf{S}_1)^\gamma + p_1 \hat{\mathbf{d}}_T, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_2 &= \dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}_2 = \\ &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{X}_2} \dot{\mathbf{X}}_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{X}_2} (\mathbf{F}_2 + \mathbf{G}_{2n} (\mathbf{F}_u^f)_{\text{opt}}) = \\ &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{X}_2} (-\mathbf{G}_{2n} \beta \text{sig}(\mathbf{S}_2)^\gamma + [\hat{\mathbf{d}}_F^\text{T}, \mathbf{0}]^\text{T}) = \\ &= -\frac{p_3}{m_{fn}} \beta \text{sig}(\mathbf{S}_2)^\gamma + p_3 \hat{\mathbf{d}}_F. \end{aligned} \quad (46)$$

将式(45)和式(46)代入式(44)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -p_1 \mathbf{S}_1^\text{T} \alpha \text{sig}(\mathbf{S}_1)^\gamma + p_1 \mathbf{S}_1^\text{T} \mathbf{J}_{fn} \hat{\mathbf{d}}_T - \\ &= p_3 \mathbf{S}_2^\text{T} \beta \text{sig}(\mathbf{S}_2)^\gamma + p_3 m_{fn} \mathbf{S}_2^\text{T} \hat{\mathbf{d}}_F. \end{aligned} \quad (47)$$

再将式(38)代入式(47)则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -p_1 \sum_{i=1}^3 \alpha_i |S_{1i}|^{\gamma+1} + p_1 \sum_{i=1}^3 \bar{\bar{d}}_{Ti} S_{1i} - \\ &= p_3 \sum_{i=1}^3 \beta_i |S_{2i}|^{\gamma+1} + p_3 \sum_{i=1}^3 \bar{\bar{d}}_{Fi} S_{2i} \leq \\ &= -p_1 \sum_{i=1}^3 (\alpha_i |S_{1i}|^{\gamma+1} - |\bar{\bar{d}}_{Ti}| |S_{1i}|) - \\ &= p_3 \sum_{i=1}^3 (\beta_i |S_{2i}|^{\gamma+1} - |\bar{\bar{d}}_{Fi}| |S_{2i}|) = \\ &= -p_1 \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - |\bar{\bar{d}}_{Ti}| |S_{1i}|^{-\gamma}) |S_{1i}|^{\gamma+1} - \\ &= p_3 \sum_{i=1}^3 (\beta_i - |\bar{\bar{d}}_{Fi}| |S_{2i}|^{-\gamma}) |S_{2i}|^{\gamma+1} \leq \\ &= -p_1 (\underline{\alpha} - \bar{\bar{d}}_T \|\mathbf{S}_1\|^{-\gamma}) \|\mathbf{S}_1\|^{\gamma+1} - p_3 (\underline{\beta} - \\ &= \bar{\bar{d}}_F \|\mathbf{S}_2\|^{-\gamma}) \|\mathbf{S}_2\|^{\gamma+1}. \end{aligned} \quad (48)$$

又由  $\mathbf{S}_1^\text{T} \mathbf{J}_{fn} \mathbf{S}_1 \leq \sigma_{\max}(\mathbf{J}_{fn}) \|\mathbf{S}_1\|^2$  ( $\sigma_{\max}(\mathbf{J}_{fn})$  为  $\mathbf{J}_{fn}$  的最大特征值) 和  $m_{fn} \mathbf{S}_2^\text{T} \mathbf{S}_2 = m_{fn} \|\mathbf{S}_2\|^2$ , 并根据引理1 (见附录C) 可以得到

$$\begin{aligned} (2V)^{\frac{\gamma+1}{2}} &\leq \\ &= (\sigma_{\max} \|\mathbf{S}_1\|^2 + m_{fn} \|\mathbf{S}_2\|^2)^{\frac{\gamma+1}{2}} \leq \\ &= (\sigma_{\max})^{\frac{\gamma+1}{2}} \|\mathbf{S}_1\|^{\gamma+1} + (m_{fn})^{\frac{\gamma+1}{2}} \|\mathbf{S}_2\|^{\gamma+1} \leq \\ &= \bar{M} (\|\mathbf{S}_1\|^{\gamma+1} + \|\mathbf{S}_2\|^{\gamma+1}), \end{aligned} \quad (49)$$

其中  $\bar{M} = \max((\sigma_{\max})^{\frac{1+\gamma}{2}}, (m_{fn})^{\frac{1+\gamma}{2}})$ .

在式(49)中, 如果有  $\underline{\alpha} - \bar{d}_T \|S_1\|^{-\gamma} \geq 0$  和  $\underline{\beta} - \bar{d}_F \|S_2\|^{-\gamma} \geq 0$ , 即  $\|S_1\| > \eta_1$  和  $\|S_2\| > \eta_2$ , 那么根据式(48)和式(49)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_1 \|S_1\|^{\gamma+1} - \lambda_2 \|S_2\|^{\gamma+1} \leq \\ &-\lambda (\|S_1\|^{\gamma+1} + \|S_2\|^{\gamma+1}) \leq -\frac{\lambda}{M} (2V)^{\frac{1+\gamma}{2}}, \end{aligned} \quad (50)$$

其中:

$$\begin{aligned} \lambda &= \min(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1 = p_1 (\underline{\alpha} - \bar{d}_T \|S_1\|^{-\gamma}), \\ \lambda_2 &= p_3 (\underline{\beta} - \bar{d}_F \|S_2\|^{-\gamma}). \end{aligned}$$

由引理2(见附录C), 有界区域  $\|S_1\| \leq \eta_1$  和  $\|S_2\| \leq \eta_2$  能够在有限时间内达到.

2) 当滑模面  $S_1$  和  $S_2$  收敛到有界区域  $\eta_1$  和  $\eta_2$  时, 由式(33)有

$$\|\varphi_1 - \psi_1\| \leq \eta_1, \quad \|\varphi_2 - \psi_2\| \leq \eta_2, \quad (51)$$

那么可以得到

$$\|\varphi_1\| \leq \eta_1 + \|\psi_1\|, \quad \|\varphi_2\| \leq \eta_2 + \|\psi_2\|. \quad (52)$$

由于在次优控制律  $(\hat{F}_u^f)_{opt}$  的作用下, 标称系统的状态能够分别渐近收敛到目标集合  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ . 根据式(17)–(19)和式(36)–(37)有

$$\begin{aligned} \|\psi_1\| &= \|p_1 e_{\omega n} + p_2 e_{\delta n}\| \leq \\ &\max(p_1, p_2) (\|e_{\omega n}\| + \|e_{\delta n}\|) \leq \\ &\max(p_1, p_2) (\zeta_1 + \zeta_2), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \|\psi_2\| &= \|p_3 e_{v n} + p_4 e_{p n}\| \leq \\ &\max(p_3, p_4) (\|e_{v n}\| + \|e_{p n}\|) \leq \\ &\max(p_3, p_4) (\zeta_3 + \zeta_4). \end{aligned} \quad (54)$$

把式(52)代入上两式有

$$\|\varphi_1\| \leq \eta_1 + \max(p_1, p_2) (\zeta_1 + \zeta_2), \quad (55)$$

$$\|\varphi_2\| \leq \eta_2 + \max(p_3, p_4) (\zeta_3 + \zeta_4). \quad (56)$$

因此, 必然存在  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_4 > 0$ , 满足

$$p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2 \leq \eta_1 + \max(p_1, p_2) (\zeta_1 + \zeta_2), \quad (57)$$

$$p_3 \varepsilon_3 + p_4 \varepsilon_4 \leq \eta_2 + \max(p_3, p_4) (\zeta_3 + \zeta_4) \quad (58)$$

的约束条件, 使得式(41)和式(42)成立. 即闭环系统的跟踪误差分别渐近收敛到有界区域  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  和  $\varepsilon_4$ .

证毕.

**注1** 在上述证明过程中, 不仅考虑了卫星转动惯量的不确定性和外界干扰力矩, 而且还考虑了卫星质量的变化和  $J_2$  摄动力. 因此, 该控制器对模型参数不确定性和外部扰动具有鲁棒性.

**注2** 由式(57)和式(58)可以推断, 为了使得  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  和  $\varepsilon_4$  较小, 必须使得  $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  和  $\zeta_4$  较小, 同时也可以通过调整  $p_1, p_2, p_3$  和  $p_4$  的取值使得跟踪误差较小.

#### 4 仿真分析与验证(Simulation analysis and validation)

为了验证本文方法的有效性和可行性, 以双星编队队形初始化优化控制为例进行数学仿真. 考虑对从星进行姿态和轨道的跟踪控制, 使得从星与主星之间的相对位置和相对姿态到达期望的时变轨迹

$$\begin{cases} p_{fl,d}^1(t) = [R_a \cos(\omega_n t) \quad 0 \quad R_b \sin(\omega_n t)]^T \text{ m}, \\ \omega_{fl,d}^f(t) = 0.001 \times [-\sin(n_0 t) \quad 2 \cos(2n_0 t) \\ \quad - 3 \sin(3n_0 t)]^T (^\circ)/\text{s}, \\ q_{fl,d}(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \end{cases} \quad (59)$$

其中:  $R_a = 400$  m 和  $R_b = 600$  m 分别为椭圆轨道的短半轴和长半轴,  $\omega_n = \pi/2T, n_0 = 100\pi/T, T = 5553.62$  s 为主星的轨道周期. 主星的轨道参数如表1所示, 且假定主星的本体系与轨道系重合.

表1 主星轨道参数

Table 1 Orbital parameters of the leader satellite

半长轴/km	偏心率	轨道倾角/(°)	近地点角距/(°)	升交点赤经/(°)	真近点角/(°)
6778.14	0.02	97.0346	50	256.566	0

从星的真实质量和真实转动惯量为

$$m = 100 \text{ kg}, \quad J_f = \begin{bmatrix} 13.5 & 0.07 & -0.1 \\ 0.07 & 15.8 & 0.4 \\ -0.1 & 0.4 & 12.3 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad (60)$$

但是在实际应用中只能得到转动惯量的估计值

$$J_{fn} = \text{diag}\{13, 15, 12\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

从星在轨飞行中受到外部扰动力和外部扰动力矩的

干扰. 其中: 外部扰动力为  $J_2$  摄动力,

$$J_2 = 0.0010826,$$

外部扰动力矩假定为

$$\begin{aligned} T_d^f &= 0.0001 \times [4 \cos(20\pi t) \quad 3 \sin(30\pi t) \\ &\quad - \cos(40\pi t)]^T \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned} \quad (61)$$

在对从星的控制过程中, 假定在其主轴的3个方向上能够获得连续变化的控制力和控制力矩. 主星与从星之间相对姿态和相对位置的初始误差如

表2所示.

表 2 初始相对误差  
Table 2 Initial relative errors

相对位置/m	相对角度/(°)
$[-30.5 \quad -15.2 \quad 20.8]^T$	$[20.6 \quad 62.7 \quad -79.8]^T$
相对速度/(m·s <sup>-1</sup> )	相对角速度/(°·s <sup>-1</sup> )
$[0.085 \quad -0.039 \quad 0.158]^T$	$[0.001 \quad -0.004 \quad -0.003]^T$

式(32)所示控制器的参数取值为

$$\begin{cases} a_1 = 25.3, b_1 = 1.5, c_1 = 0.3, r_1 = 0.01, \\ a_2 = 600, b_2 = 20, c_2 = 0.2, r_1 = 0.01, \\ p_1 = 5, p_2 = 0.01, p_3 = 1, p_4 = 0.01, \\ \alpha = \text{diag}\{0.1, 0.1, 0.1\}, \\ \beta = \text{diag}\{1, 1, 1\}, \gamma = 0.8. \end{cases} \quad (62)$$

式(11)和式(12)中 $Q_1, Q_2, R_1, R_2$ 的取值为

$$Q_1 = Q_2 = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \quad (63)$$

$$R_1 = \text{diag}\{10, 10, 10\}, R_2 = \text{diag}\{15, 15, 15\}. \quad (64)$$

图2-7给出了在300 s内由本文的控制器得到的数学仿真结果. 图2为相对姿态跟踪误差的时间变化曲线, 图3为相对角速度跟踪误差的时间变化曲线. 从图2和图3可以看出, 在本文控制器的作用下, 相对姿态的跟踪误差和相对姿态角速度的跟踪误差在72 s左右收敛到0附近. 图4为相对位置跟踪误差的时间变化曲线, 图5为相对速度跟踪误差的时间变化曲线. 从图4和图5可以看出, 在本文控制器的作用下, 相对位置的跟踪误差和相对速度的跟踪误差在150 s左右收敛到0附近. 因此, 尽管受卫星模型参数不确定性和外部有界干扰的影响, 本文的控制器能够使得跟踪误差快速收敛. 图6和图7分别为控制力矩和控制力的时间变化曲线. 从图6和图7中可以看出, 本文方法能够得到连续变化的控制力矩和控制力, 颤振现象不明显.

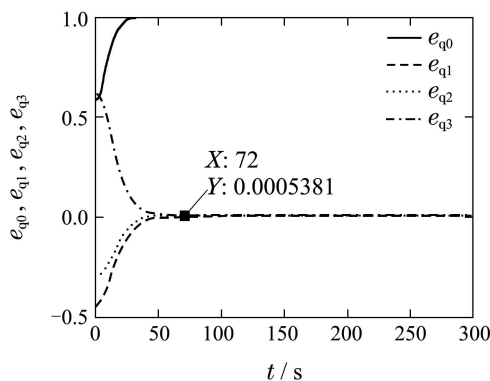


图 2 相对姿态的跟踪误差  
Fig. 2 Tracking errors of relative attitude

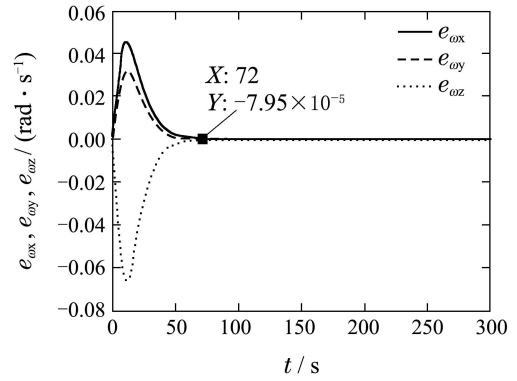


图 3 相对角速度的跟踪误差  
Fig. 3 Tracking errors of relative angular velocity

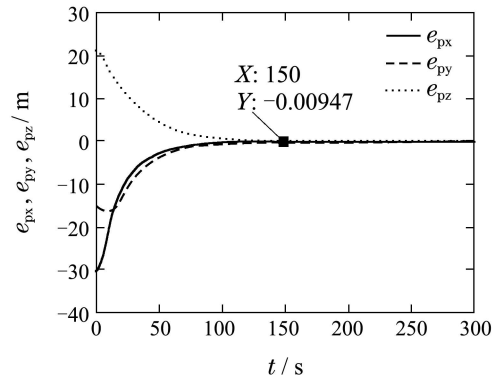


图 4 相对位置的跟踪误差  
Fig. 4 Tracking errors of relative position

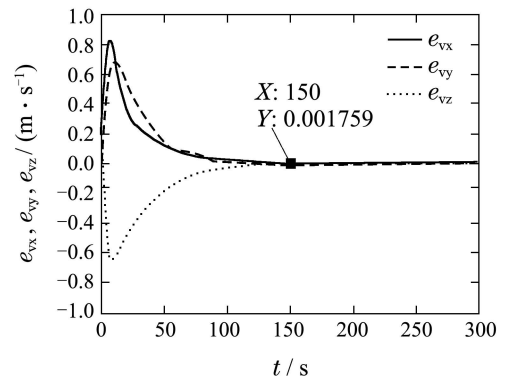


图 5 相对速度的跟踪误差  
Fig. 5 Tracking errors of relative velocity

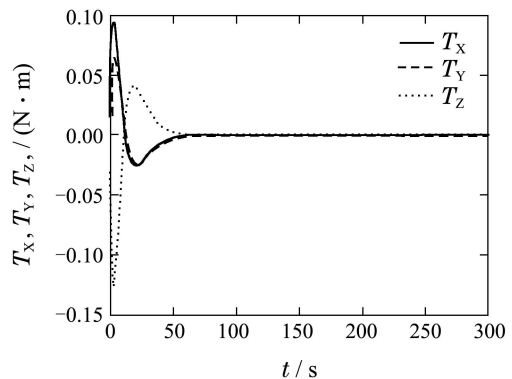


图 6 控制力矩  
Fig. 6 Control torque

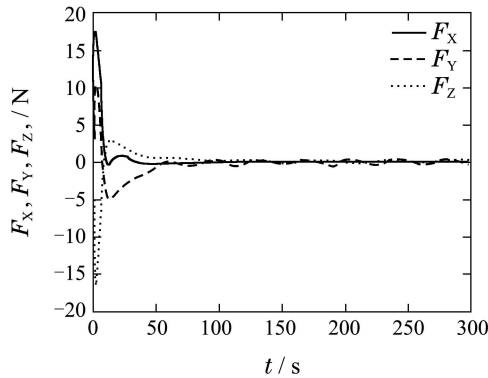
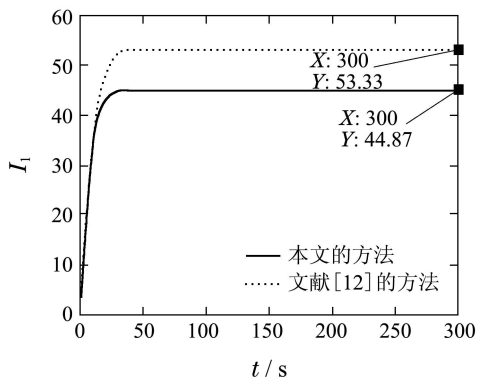
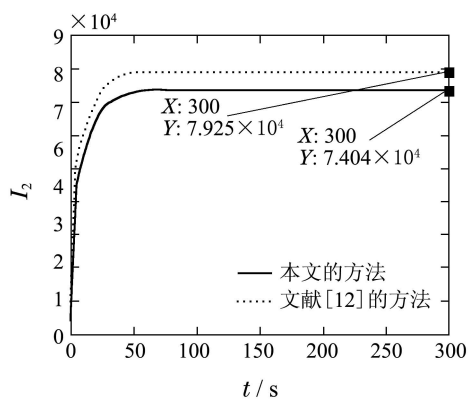


图7 控制力

Fig. 7 Control force

为了体现本文控制器能够得到优化的性能指标,与文献[12]的控制器做了比较.图8和图9分别给出了两种控制器得到的性能指标 $I_1$ 和 $I_2$ 的时间变化曲线.从图8和图9可以看出,本文控制器得到的性能指标 $I_1$ 和 $I_2$ 比文献[12]得到的均要小.因此,本文的控制器在性能指标上要优于文献[12]的控制器.

图8  $I_1$ 的结果比较Fig. 8 Result comparison of  $I_1$ 图9  $I_2$ 的结果比较Fig. 9 Result comparison of  $I_2$ 

## 5 结论(Conclusions)

本文在对偶四元数的框架下研究了主从式编队卫星姿态和轨道跟踪控制的优化问题,把最优控制与滑模控制结合起来提出了一种优化的积分滑模控制器,并基于李雅普诺夫方法证明了闭环控制系统

是全局渐近稳定的.仿真结果表明,本文的控制器能够实现编队卫星相对姿态和相对位置跟踪的精确控制,具有较快的收敛速度,且对卫星模型参数不确定性和外部干扰具有较强的鲁棒性,同时得到较小的性能指标.

## 参考文献(References):

- [1] 张治国,李俊峰.卫星编队飞行轨道和姿态控制研究[J].应用数学和力学,2008,29(1):38-46.  
(ZHANG Zhiguo, LI Junfeng. Study on the orbit and attitude control of spacecraft formation flying [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, 29(1): 38-46.)
- [2] 吴云华,曹喜滨,张世杰,等.编队卫星相对轨道与姿态一体化耦合控制[J].南京航空航天大学学报,2010,42(1):13-20.  
(WU Yunhua, CAO Xibin, ZHANG Shijie, et al. Relative orbit and attitude Integrated coupled control for formation satellite [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2010, 42(1): 13-20.)
- [3] 吕跃勇,胡庆雷,马广富,等.带有控制受限的卫星编队飞行六自由度自适应协同控制[J].控制理论与应用,2011,28(3):321-328.  
(LÜ Yueyong, HU Qinglei, MA Guangfu, et al. Adaptive synchronized control with 6 degrees of freedom and bounded input for satellite formation flight [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 321-328.)
- [4] JUNKINS J L, TURNER J D. On the analogy between orbital dynamics and rigid body dynamics [J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1979, 27(4): 345-358.
- [5] SINCLAIR A J, HURTADO J E, JUNKINS J L. Application of the Cayley form to general spacecraft motion [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(2): 368-373.
- [6] PAN H Z, KAPILA K. Adaptive nonlinear control for spacecraft formation flying with coupled translational and attitude dynamics [C] // *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2001: 2057-2062.
- [7] BRODSKY V, SHOHAM M. Dual numbers representation of rigid body dynamics [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, 34(5): 693-718.
- [8] WANG X K, HAN D P, YU C B, et al. The geometric structure of unit dual quaternion with application in kinematic control [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 389(2): 1352-1364.
- [9] ZHANG F, DUAN G R. Robust integrated translation and rotation finite-time maneuver of a rigid spacecraft based on dual quaternion [C] // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Portland: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011.
- [10] WU J J, LIU K, HAN D P. Adaptive sliding mode control for six-DOF relative motion of spacecraft with input constraint [J]. *Acta Astronautica*, 2013, 87(2): 64-76.
- [11] WANG J Y, SUN Z W. 6-DOF robust adaptive terminal sliding mode control for spacecraft formation flying [J]. *Acta Astronautica*, 2012, 73(1): 76-87.
- [12] WANG J Y, LIANG H Z, SUN Z W, et al. Finite-time control for spacecraft formation with dual-number-based description [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(3): 950-962.
- [13] WU Y H, CAO X B, XING Y J, et al. Relative motion coupled control for formation flying spacecraft via convex optimization [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2010, 14(6): 415-428.
- [14] XIN M, PAN H J. Nonlinear optimal control of spacecraft approaching a tumbling target [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2011, 15(2): 79-89.
- [15] PUKDEBOON C, ZINOBER A S I. Control Lyapunov function optimal sliding mode controllers for attitude tracking of spacecraft [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(2): 456-475.



- [16] XU X J. A quasi-optimal sliding mode control scheme based on control Lyapunov function [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(4): 1445 – 1458.
- [17] VICENT T L, GRANTHAM W J. *Nonlinear and Optimal Control System*[M]. New York: Wiley, 1997.
- [18] GRANTHAM W J. Trajectory following optimization by gradient transformation differential equations [C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2003: 5496 – 5501.
- [19] MCDONALD D B. Lyapunov optimizing sliding mode control for linear systems with bounded disturbance [J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2008, 2(19): 901 – 918.
- [20] VINCENT T L, GRANTHAM W J. Trajectory following methods in control system design [J]. *Journal of Global Optimization*, 2002, 23(3/4): 267 – 282.
- [21] MCDONALD D B. Quickest descent control of nonlinear systems with singular control chatter elimination [C] // *Proceedings of the 2008 IAJC-IJME Conference*. Nashville: California State University, 2008.

### 附录 (Appendix)

#### 附录 A 1) 对偶数.

对偶数的定义为

$$\hat{z} = a + \varepsilon b, \quad (A1)$$

其中:  $a$ 和 $b$ 均为实数,  $a$ 为对偶数的实数部分,  $b$ 为它的对偶部分.  $\varepsilon$ 满足 $\varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0$ 的条件. 对偶数的基本运算为

$$\begin{cases} \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = a_1 + a_2 + \varepsilon(b_1 + b_2), \\ \hat{z}_1 \hat{z}_2 = a_1 a_2 + \varepsilon(a_1 b_2 + a_2 b_1), \\ \lambda \hat{z} = \lambda a + \varepsilon \lambda b. \end{cases} \quad (A2)$$

共轭对偶数则定义为

$$\hat{z}^* = a - \varepsilon b. \quad (A3)$$

对偶向量是一类实部和对偶部均为向量的对偶数

$$\hat{z} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{b}. \quad (A4)$$

#### 2) 对偶四元数.

对偶四元数是一类元素为对偶数的四元数, 定义为

$$\hat{q} = [\hat{s} \ \hat{\mathbf{v}}], \quad (A5)$$

其中 $\hat{s}$ 和 $\hat{\mathbf{v}}$ 分别为对偶数和对偶向量. 它的基本运算为

$$\begin{cases} \hat{q}^* = [\hat{s} \ -\hat{\mathbf{v}}], \ \hat{q}_1 + \hat{q}_2 = [\hat{s}_1 + \hat{s}_2 \ \hat{\mathbf{v}}_1 + \hat{\mathbf{v}}_2], \\ \lambda \hat{q} = [\lambda \hat{s} \ \lambda \hat{\mathbf{v}}], \\ \hat{q}_1 \circ \hat{q}_2 = [\hat{s}_1 \hat{s}_2 - \hat{\mathbf{v}}_1 \cdot \hat{\mathbf{v}}_2 \ \hat{s}_1 \hat{\mathbf{v}}_2 + \hat{s}_2 \hat{\mathbf{v}}_1 + \hat{\mathbf{v}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}_2], \end{cases} \quad (A6)$$

其中:  $\hat{q}^*$ 为 $\hat{q}$ 的共轭,  $\lambda$ 是一个实数. 单位对偶四元数即为满足 $\|\hat{q}\|^2 = 1 + \varepsilon 0$ 约束的对偶四元数.

对偶四元数也可以用四元数的对偶数来表示;

$$\hat{q} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}', \quad (A7)$$

其中 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{q}'$ 均为四元数.

#### 3) 对偶动量和对偶惯量矩阵.

刚体的对偶动量定义为

$$\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{M}} \hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad (A8)$$

其中 $\hat{\mathbf{M}}$ 为由质量 $\mathbf{J}$ 和转动惯量组成的对偶惯性算子, 它的矩阵形式为

$$\hat{\mathbf{M}} = m \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{J} =$$

$$\begin{bmatrix} m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{J}_{xx} & \varepsilon \mathbf{J}_{xy} & \varepsilon \mathbf{J}_{xz} \\ \varepsilon \mathbf{J}_{xy} & m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{J}_{yy} & \varepsilon \mathbf{J}_{yz} \\ \varepsilon \mathbf{J}_{xz} & \varepsilon \mathbf{J}_{yz} & m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{J}_{zz} \end{bmatrix}. \quad (A9)$$

$\hat{\mathbf{M}}$ 的逆 $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ 定义为

$$\hat{\mathbf{M}}^{-1} = \mathbf{J}^{-1} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \right) + \varepsilon (1/m) \mathbf{E}. \quad (A10)$$

#### 4) 单位四元数和单位对偶四元数的对数运算.

单位四元数的对数运算定义为

$$\ln \mathbf{q} = (0, \frac{\phi}{2} \mathbf{n}), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (A11)$$

可以将其简化为

$$(\ln \mathbf{q})_{\mathbf{v}} = \frac{\phi}{2} \mathbf{n}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (A12)$$

单位对偶四元数的对数运算定义为

$$\ln \hat{\mathbf{q}} = \ln(\mathbf{q} \circ e^{\varepsilon \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{q}'} ) = \ln \mathbf{q} + \varepsilon (0, \frac{1}{2} \mathbf{p}), \quad (A13)$$

对应地, 也可以简化为

$$(\ln \hat{\mathbf{q}})_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} (\phi \mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{p}t), \quad (A14)$$

其中:  $p = \|\mathbf{p}\|, t = p/p$ .

### 附录 B 式(16)中, $f_{1n}, f_2, f_3, f_4, \hat{\mathbf{d}}_T$ 和 $\hat{\mathbf{d}}_F$ 的表达式

分别如下:

$$\begin{aligned} f_{1n} = & \mathbf{J}_{fn}^{-1} [ -(\boldsymbol{\omega}_{f1}^f + \mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1) \times \mathbf{J}_{fn} (\boldsymbol{\omega}_{f1}^f + \mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1) ] - \\ & \mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1 + \boldsymbol{\omega}_{f1}^f \times \mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{f1,d}^f, \end{aligned} \quad (A15)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & \mathbf{e}_\omega + \frac{1}{2} \mathbf{e}_\delta \times \mathbf{e}_\omega + \frac{1}{\|\mathbf{e}_\delta\|} \left[ \left( 1 - \frac{\|\mathbf{e}_\delta\|}{2} \cot \frac{\|\mathbf{e}_\delta\|}{2} \right) \mathbf{e}_\delta \times \right. \\ & \left. (\mathbf{e}_\delta \times \mathbf{e}_\omega) \right], \end{aligned} \quad (A16)$$

$$\begin{aligned} f_3 = & -2\mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1 \times \dot{\mathbf{P}}_{f1}^f - \mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1 \times (\mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1 \times \mathbf{P}_{f1}^f) - \\ & \mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1 \times \mathbf{P}_{f1}^f + \frac{\mu}{\|\mathbf{P}_{li}^1\|^3} \mathbf{C}_{f1} \mathbf{P}_{li}^1 - \boldsymbol{\omega}_{f1}^f \times \dot{\mathbf{P}}_{f1}^f - \\ & \boldsymbol{\omega}_{f1}^f \times ((\boldsymbol{\omega}_{f1}^f \times \mathbf{P}_{f1}^f) - 2\mathbf{C}_{f1} \boldsymbol{\omega}_{li}^1 \times (\boldsymbol{\omega}_{f1}^f \times \mathbf{P}_{f1}^f) - \\ & \frac{\mu}{\|\mathbf{P}_{fi}^f\|^3} \mathbf{P}_{fi}^f - (\dot{\mathbf{P}}_{f1,d}^d + \boldsymbol{\omega}_{f1,d}^f \times \mathbf{P}_{f1,d}^f) \prime, \end{aligned} \quad (A17)$$

$$f_4 = \mathbf{e}_v - \mathbf{e}_\omega \times \mathbf{e}_p, \quad (A18)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_T = & \Delta \mathbf{f}_1 + \Delta \tilde{\mathbf{J}}_f \mathbf{T}_u^f + \mathbf{J}_f^{-1} \mathbf{T}_d^f = \\ & -\mathbf{J}_{fn}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{fi}^{f \times} \Delta \mathbf{J}_f \boldsymbol{\omega}_{fi}^f - \Delta \tilde{\mathbf{J}}_f \boldsymbol{\omega}_{fi}^{f \times} \mathbf{J}_{fn} \boldsymbol{\omega}_{fi}^f - \\ & \Delta \tilde{\mathbf{J}}_f \boldsymbol{\omega}_{fi}^{f \times} \Delta \mathbf{J}_f \boldsymbol{\omega}_{fi}^f + \Delta \tilde{\mathbf{J}}_f \mathbf{T}_u^f + (\mathbf{J}_{f0}^{-1} + \Delta \tilde{\mathbf{J}}_f) \mathbf{T}_d^f, \end{aligned} \quad (A19)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_F = \frac{1}{m_f} \mathbf{F}_d^f, \quad (A20)$$

其中:  $\mathbf{C}_{f1}$ 为方向余弦阵,  $\mathbf{P}_{f1,d}^f$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{f1,d}^f$ 分别为期望的位置和角速度.

### 附录 C

**引理 A1** 对于任意给定的  $x_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n)$  和一个常数  $p \in (0, 1)$  下面不等式成立:

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i| \right)^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p. \quad (A21)$$

**引理 A2** 对于连续时间系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , 给定一个  $C^1$  的函数  $V(\mathbf{x}) : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R} (\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n)$ ,  $V(\mathbf{x})$  是连续正定的. 如果存在  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  和  $\beta \in (0, 1)$  使得  $\dot{V}(\mathbf{x}) + \gamma V(\mathbf{x})^\beta \leq 0$  成立, 那

么存在一个区域  $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ , 能够在有限时间内到达  $V(\mathbf{x}) = 0$ , 且收敛时间  $T_r$  满足

$$T_r \leq \frac{V(\mathbf{x}_0)^{1-\beta}}{\gamma - \gamma^\beta}, \quad (\text{A22})$$

其中  $V(\mathbf{x}_0)$  为  $V(\mathbf{x})$  的初值.

作者简介:

吴锦杰 (1983-), 男, 博士研究生, 研究方向为飞行器动力学与控

制、非线性滤波和粒子滤波, E-mail: wujinjie746@163.com;

刘昆 (1965-), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为磁悬浮飞轮技术、飞行器动力学与控制, E-mail: liukun@nudt.edu.cn;

韩大鹏 (1982-), 男, 讲师, 研究方向为飞行器设计, E-mail: dphan.kd@gmail.com;

张峰 (1978-), 男, 讲师, 研究方向为飞行器设计, E-mail: peak\_china@163.com.

## 《控制理论与应用》第7届编委会研讨会在西安召开

2013年7月25日下午,《控制理论与应用》第7届编委会研讨会在西安市中兴和泰酒店芙蓉厅举行.《控制理论与应用》第7届编委会和《Journal of Control Theory and Applications》第3届编委会的主编、副主编、编委及编辑人员60余人参加了会议.中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所所长张纪峰教授、中文刊顾问秦化淑教授和本刊编辑部最早成员黄冰清老师也应邀出席了会议.

会议由第6届编委会英文刊主编程代展教授主持,第6届编委会中文刊主编胡跃明教授做第6届编委会工作报告.张纪峰教授代表主办单位为新一届中、英文刊主编、副主编及所有参会编委颁发了聘书.新任中、英文主编、副主编表示感谢主办单位的信任,将尽力做好本届编委会的工作,立足国内,走向世界,把刊物办成控制领域具自身特色、较高影响力的学术刊物.接着,张纪峰教授回顾了刊物从无到有、由弱到强的艰辛创业和发展历程,代表主办单位感谢各届编委会和编辑部30年来的辛勤工作,并希望本届编委会一如既往,继续努力办好两刊.秦化淑教授和黄冰清老师也分别讲话,对刊物寄予殷切期望.

《控制理论与应用》中、英文刊是由华南理工大学和中国科学院数学与系统科学研究院联合创办的全国性学术刊物.经过30年的发展和努力,已经成为国内同行公认的高水平学术刊物.目前继续被美国《工程索引》(EI Compendex)与《数学评论》、俄罗斯《文摘杂志》、英国《科学文摘》、德国《数学文摘》等多种国际著名检索系统,以及国内包括《中国学术期刊(光盘版)》、《中国科学引文数据库》等在内的十余个重要数据库收录.

会上,中文刊主编胡跃明教授汇报了上届编委会的工作:2008年—2012年共出版74期(中文刊54期,英文刊20期),发表文章1720篇(中文1329篇,英文391篇);中文刊共出版8期(9个专题)专刊,英文刊共出版6期专辑;期刊努力缩短出版周期,实施数字优先出版,运用学术不端检测系统查处重复投稿、杜绝一稿多投和抄袭的现象,遵循著作权法完善期刊各项制度以及参照国际化审稿流程调整英文刊稿件评审流程,进一步提升了期刊的出版质量.

针对本刊影响因子偏低、特色栏目及高质量稿件偏少等问题,对本届编委会提出了工作设想和要求,主要包括:

1. 关注国家自然科学基金、“973”计划、“863”计划等重大重点课题,加强先进控制理论在国民经济建设特别是在新兴战略产业领域的应用研究成果的报道,积极组稿约稿,提升来稿质量;
2. 关注国内外同类期刊的定位差别,进一步提升本刊的学术水平.优先刊登热点问题研究论文,敢于刊登尚未完善但引领学术研究方向的研究成果;
3. 利用与Springer合作出版的优势,借助其平台,加强海外宣传力度,积极约稿,吸引更多国际优秀稿件;
4. 坚持编委责任制,坚持公正、严谨的原则,严格论文评审尺度,不轻易放宽录用标准.减少零频次论文的刊出,提高影响因子;
5. 继续提高稿件评审速度,缩短审稿周期和发表周期.中文刊录用稿件的审稿周期控制在3个月以内,发表周期控制在10~12个月以内,英文刊发表周期争取在一年以内.
6. 继续提高英文刊编委国际化、稿件国际化、读者国际化程度,增加主编约稿、编委荐稿比例,为英文刊申请进入SCI做好准备.

研讨会期间,与会编委进行了积极讨论,就争取优质稿源、提高影响因子、扩大期刊影响力、英文刊国际化及申请SCI等议题畅所欲言,提出了许多积极有效的办法和措施.

本届编委会衷心感谢国内外同行多年来对本刊的大力支持和厚爱!诚挚邀请各位同行将协同创新研究中取得的优秀成果论文优先投稿给两刊.相信在本届编委会和各位同行的共同努力下,两刊将会在学术水平和出版质量等方面更上一个新台阶,成为国内外控制理论与工程应用领域创新研究成果交流与争鸣的高端平台.