

# 具有瑞利平坦衰落信道的线性系统线性二次高斯控制

田 垠, 章 辉<sup>†</sup>

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室; 控制科学与工程学系, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 网络化控制系统中的通信约束问题一直是人们关注的焦点. 本文讨论了具有信号衰落约束的线性系统的线性二次高斯(LQG)控制问题, 其中系统输出经放大后通过瑞利平坦衰落信道传输到控制器. 针对控制器与通信信号放大设计的折中问题, 本文在系统二次型性能指标中进一步考虑通信过程的能量消耗, 并基于离线设计放大系数, 给出了有限时域下控制信号与放大系数的设计方法. 对于线性定常系统, 采用本文方法设计得到的放大系数在时间趋于无穷时将为常数, 基于此, 本文进一步将方法推广到无限时域情形. 仿真结果说明了本文方法的有效性及其性能.

**关键词:** LQG控制; 信号放大; 衰落; 折中

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Linear-quadratic-Gaussian control of linear system with Rayleigh flat fading channel

TIAN Yin, ZHANG Hui<sup>†</sup>

(National Key Laboratory of Industrial Control Technology; Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** In networked control systems, communication constrains have been the focus of study for a long time. This paper studies the linear quadratic Gaussian (LQG) control of linear systems under fading constraints, where the outputs of systems are assumed to be amplified and transmitted to the controller over a Rayleigh flat fading channel. Aiming at the tradeoff between controller design and signal amplification, we add an item concerning communication power into the LQG cost function and then derive the controller and amplification factor in a finite horizon, based on the off-line design of amplification factor. With the proposed method, the designed amplification factor turns to a constant for linear time-invariant systems as time approaches infinity. This result inspires us to extend our method to infinite horizon. Simulation results illustrate the effectiveness and performance of our method.

**Key words:** LQG control; signal amplification; fading; tradeoff

### 1 引言(Introduction)

近年来, 网络化控制系统备受人们的关注, 它在空间探测、生产自动化、远程诊断、无人机等方面都有应用. 由于其执行器、传感器与控制器之间通过共享网络进行通信, 所以结构灵活, 网络建造和维护成本降低, 但也因此面临新的问题<sup>[1]</sup>. 由于网络的限制, 数据在传输时将受到有限带宽、网络延时、丢包等通信问题的约束, 不能及时完美地进行传输, 从而导致系统性能的下降, 因此在系统分析和设计时必须考虑通信约束问题的影响. 本文主要针对一类通信约束——信号衰落进行研究.

衰落是无线通信中经常会遇到的问题, 一般指

接收信号的幅度和相位由于传播媒介、途径的时变性而发生随机变化的现象. 通信领域中关于衰落信道的研究有着丰富的成果, 如关于数据传输<sup>[2]</sup>、信道预测<sup>[3]</sup>、信道模拟<sup>[4]</sup>等. 这些成果主要关注数据的可靠性传输, 而不关注数据传输的目的, 虽然与控制领域研究问题的着眼点不同, 但提供了许多帮助.

控制领域中在讨论衰落问题时一种做法是将信道描述为丢包模型, 即当信道状况良好、通信可靠时选择接收数据, 否则将数据丢弃, 文献[5]对此讨论了丢弃阈值的选择问题. 目前控制领域关于丢包问题的研究成果已经有很多, 例如文献[6]讨论了估计误差方差期望的有界性问题, 并证明存在一个阈

值, 当丢包率超过这个阈值时方差将发散, 相关的研究还包括文献[7-9]等; 由于增大发送信号的功率可以减缓丢包现象, 文献[10]还讨论了信号功率的分配问题; 关于丢包问题的总结性讨论可参考文献[11].

根据信息论的知识笔者知道在点对点通信中信源与信道编码可分离设计, 然而对于一般的网络结构分离设计并非是最优的. 文献[12]通过论证得出在多址通信中简单的放大传输优于信源与信道编码分离设计. 基于放大传输策略, 文献[13]研究了估计误差方差的有界性问题, 得出估计误差方差期望将最终趋于一个稳定值; 文献[14]讨论了测量数据相关时的估计问题; 文献[15]则讨论了信道估计误差对估计结果的影响; 文献[16-17]针对状态估计讨论了信号功率的分配问题; 文献[18]则讨论了完全信道状态信息和统计信道状态信息已知两种情况下的最优线性二次高斯(linear quadratic Gaussian, LQG)控制问题. 其他关于衰落信道的研究还包括: 文献[19]讨论了连续时间系统的编解码设计及系统性能; 文献[20-21]则研究了系统的均方镇定问题等.

本文主要基于文献[18]做进一步讨论. 当放大系数增大时, 控制器了解系统的信息就越多, 整个控制性能也就越好, 但增大放大系数就意味着增大通信功率, 这又会导致通信功率的额外消耗. 对此, 本文基于LQG控制理论方法, 在性能指标中进一步考虑通信过程的能量消耗, 通过设计放大系数使总性能达到最小, 从而实现控制性能与通信能量消耗之间的折中. 为使问题简化, 本文基于文献[19]的假设, 即控制信号可直接传输回系统, 主要针对系统输出到控制器之间存在衰落信道的情形进行讨论.

后文组织如下: 第2节描述系统结构和问题, 第3节给出控制信号和放大系数的设计方法, 第4-5节分别为仿真与结论.

## 2 问题描述(Problem statement)

考虑图1所示的离散网络化控制系统, 其中系统输出通过衰落信道传输到控制器.

假设被控对象为单输入单输出线性随机定常系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k), \quad (2)$$

其中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  为系统状态,  $u(k) \in \mathbb{R}$  为系统输入信号,  $y(k) \in \mathbb{R}$  为系统输出信号,  $w(k) \sim N(0, \Sigma_w)$  为系统噪声,  $v(k) \sim N(0, \sigma_v^2)$  为观测噪声, 系统初始状态满足  $x(0) \sim N(m_0, \Sigma_0)$ .  $N(m, \Sigma)$  表示均值为  $m$ , 协方差阵为  $\Sigma$  的高斯分布.

系统输出  $y(k)$  经放大后通过衰落信道传输到控制器. 在通信中, 所有带通信号和信道都可简化为等效低通信号和信道, 这里也采用等效低通描述, 则衰落信道输入输出可描述为<sup>[2]</sup>

$$\check{z}(k) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \check{h}(k; \tau) \alpha(k - \tau) y(k - \tau) + \check{n}(k), \quad (3)$$

其中:  $\alpha(k)$  为放大系数,  $\check{n}(k)$  为复加性噪声,  $\check{z}(k)$  为等效低通接收信号,  $\check{h}(k; \tau)$  为信道等效低通时变脉冲响应, 即信道状态信息.

当信道为平坦衰落信道时, 信号在传输过程中各频率分量经受相同的衰减和相移, 即信道的等效低通时变传递函数  $\check{H}(k; f)$  是以频率为变量的复常数<sup>[2]</sup>,  $\check{H}(k; f) = \check{H}(k; 0) = h(k)e^{-j\phi(k)}$ . 运用傅里叶逆变换可得  $\check{h}(k; \tau) = \check{H}(k; 0)\delta(\tau)$ , 结合式(3)有

$$\check{z}(k) = \check{H}(k; 0) \alpha(k) y(k) + \check{n}(k). \quad (4)$$

假设信道接收端能够得到完全信道状态信息, 即  $\check{H}(k; 0)$  已知<sup>[13]</sup>, 则在式(4)两边同乘以  $e^{j\phi(k)}$  并取实部后可得

$$z(k) = h(k) \alpha(k) y(k) + n(k), \quad (5)$$

其中:  $z(k) = \text{Re}[\check{z}(k)e^{j\phi(k)}]$  为接收信号,  $h(k)$  为信道幅度增益,  $n(k) = \text{Re}[\check{n}(k)e^{j\phi(k)}]$  为信道加性噪声,  $n(k) \sim N(0, \sigma_n^2)$ . 本文考虑瑞利平坦衰落信道<sup>[2]</sup>, 则  $\check{H}(k; 0)$  可描述为零均值复高斯随机过程, 此时  $h(k)$  服从瑞利分布,  $E\{h^2(k)\} = \sigma_h^2$ . 上述过程中乘以  $e^{j\phi(k)}$  并取实部对应于实际通信中的解调环节.

控制器根据接收信号  $Z_k \triangleq \{z(0), \dots, z(k)\}$  确定控制信号  $u(k)$ . 这里假设控制信号可直接传输回系统<sup>[19]</sup>, 对于控制器到系统之间也存在衰落信道的情形将在未来的工作中讨论.

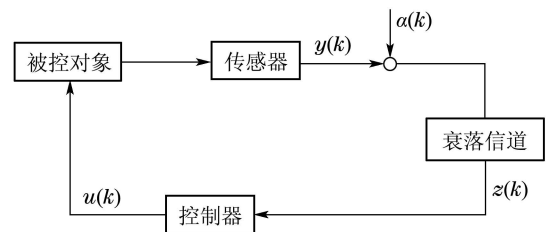


图 1 系统结构

Fig. 1 System structure

将式(5)代入式(2), 得到整个离散网络化控制系统的结构为

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad (6)$$

$$z(k) = C'(k)x(k) + v'(k), \quad (7)$$

其中:  $C'(k) \triangleq h(k)\alpha(k)C$ ,  $v'(k) \sim N(0, \sigma_{v'}^2(k))$ ,  $\sigma_{v'}^2(k) \triangleq h^2(k)\alpha^2(k)\sigma_v^2 + \sigma_n^2$ .

上述系统的LQG性能可表示为

$$J_M^c = E\{x^T(M)Q(M)x(M) + \sum_{k=0}^{M-1} [x^T(k)Q(k)x(k) + R(k)u^2(k)]\}. \quad (8)$$

最优性能将包含3项<sup>[22]</sup>: 等价确定性系统的最优性能、估计误差导致的性能损耗、系统噪声导致的性能损耗. 在这3项中估计误差与 $\alpha(k)$ 的取值有关, 当 $\alpha(k)$ 增大时, 估计误差将减小, 整个控制性能将得到提高, 但增大 $\alpha(k)$ 就意味着增大通信功率, 因此 $\alpha(k)$ 的设计又与通过程的能量消耗有关. 在讨论这类问题时一般的做法是给定通信功率约束谋求最优性能, 或者给定性能目标谋求最小通信功率<sup>[16]</sup>.

本文从另一个角度来讨论 $\alpha(k)$ 的设计问题. 本文在系统性能指标中引入 $E\{S(k)\alpha^2(k)y^2(k)\}$ , 用来表征通信过程的能量损耗, 通过设计 $u(k)$ 和 $\alpha(k)$ 使总性能达到最小. 整个问题可描述为: 确定控制信号 $u(k)$ 和放大系数 $\alpha(k)$ , 使得性能指标

$$J_M \triangleq E\{x^T(M)Q(M)x(M) + \sum_{k=0}^{M-1} [x^T(k)Q(k)x(k) + R(k)u^2(k) + S(k)\alpha^2(k)y^2(k)]\} \quad (9)$$

达到极小, 其中 $Q(k) \geq 0$ ,  $R(k) > 0$ ,  $S(k) > 0$ . 式中第1, 2两项是对状态回复到平衡态的度量, 第3项是对控制能量消耗的度量, 第4项是对通信能量消耗的度量.

本文将基于假设1<sup>[13]</sup>讨论问题:

**假设 1** 1)  $(A, B)$ ,  $(A, \Sigma_w^{1/2})$ 可镇定,  $(A, C)$ ,  $(A, \sigma_v)$ 能观;

2)  $A$ 可逆;

3)  $\{h(k)\}$ 为独立同分布(i.i.d.)随机过程;

4)  $x(0)$ ,  $w(k)$ ,  $v(k)$ ,  $n(k)$ ,  $h(k)$ 相互独立.

假设1中1)和4)为一般性假设; 2)将在后文得到应用, 并且, 若离散系统是由连续系统离散化得到, 则2)将成立; 3)是实际情况的近似. 在实际中衰落信道的多普勒功率谱并非是白色的, Clarke曾得出在二维各项同性散射情形下 $\check{H}(t; 0)$ 的功率谱为U型谱<sup>[23]</sup>, 根据功率谱可以得到多普勒展宽, 并由此定义信道相干时间, 用来描述信道的变化快慢<sup>[2]</sup>. 当采样间隔远大于信道相干时间时,  $\{\check{H}(k; 0)\}$ 将近似描述为i.i.d.随机过程, 而 $\{h(k)\}$ 为 $\{\check{H}(k; 0)\}$ 的模, 也将近似为i.i.d.随机过程.

### 3 控制信号与通信放大系数的设计(Design of control signal and amplification factor)

本节主要讨论如何确定控制信号 $u(k)$ 和放大系

数 $\alpha(k)$ . 本文将首先讨论有限时域下 $u(k)$ 和 $\alpha(k)$ 的设计问题, 然后再将结论推广到无限时域.

#### 3.1 有限时域(Finite horizon)

将式(2)代入式(9), 可将性能指标改写为

$$J_M = E\{x^T(M)Q(M)x(M) + \sum_{k=0}^{M-1} [x^T(k)Q'(k)x(k) + R(k)u^2(k) + S(k)\alpha^2(k)v^2(k)]\}, \quad (10)$$

其中 $Q'(k) \triangleq Q(k) + S(k)\alpha^2(k)C^T C$ .

将式(1)代入式(10), 并进行整理, 可得

$$J_M = E\{x^T(0)P(0)x(0) + \sum_{k=0}^{M-1} \{S(k)\alpha^2(k)v^2(k) + w^T(k)Q'(k)w(k) + [u(k) + F(k)x(k)]^T \times [B^T P(k+1)B + R(k)][u(k) + F(k)x(k)]\}\}, \quad (11)$$

其中:

$$F(k) = [B^T P(k+1)B + R(k)]^{-1} B^T P(k+1)A, \quad (12)$$

$$P(k) = A^T \{P(k+1) - P(k+1)B[B^T P(k+1)B + R(k)]^{-1} B^T P(k+1)\} A + Q'(k), \quad (13)$$

$$P(M) = Q(M). \quad (14)$$

基于传统LQG控制问题的分离性原则, 本文将式(11)中的 $x(k)$ 分解为 $x(k) = \hat{x}(k|k) + \tilde{x}(k|k)$ , 其中 $\hat{x}(k|k)$ 为时刻 $k$ 对该时刻的最优最小二乘估计,  $\tilde{x}(k|k)$ 为估计误差. 因为 $\tilde{x}(k|k) \perp Z_k$ ,  $\perp$ 表示正交, 又 $u(k)$ 和 $\hat{x}(k|k)$ 均为 $Z_k$ 的函数, 所以 $\tilde{x}(k|k) \perp u(k) + F(k)\hat{x}(k|k)$ . 于是可将式(11)改写为

$$J_M = E\{x^T(0)P(0)x(0) + \sum_{k=0}^{M-1} \{S(k)\alpha^2(k)v^2(k) + w^T(k)Q'(k)w(k) + \tilde{x}^T(k|k)F^T(k) \times [B^T P(k+1)B + R(k)]F(k)\tilde{x}(k|k) + [u(k) + F(k)\hat{x}(k|k)]^T [B^T P(k+1)B + R(k)][u(k) + F(k)\hat{x}(k|k)]\}\}. \quad (15)$$

注意到式(15)中最后一项非负, 其余各项的取值与 $u(k)$ 无关, 因此取控制信号使得最后一项为零, 可得最优控制律为

$$u^*(k) = -F(k)\hat{x}(k|k). \quad (16)$$

此时性能指标为

$$J_M(u^*) = E\{x^T(0)P(0)x(0) + \sum_{k=0}^{M-1} \{S(k)\alpha^2(k)v^2(k) +$$

$$w^T(k)Q'(k)w(k) + \tilde{x}^T(k|k)F^T(k) \times [B^T P(k+1)B + R(k)]F(k)\tilde{x}(k|k)\}. \quad (17)$$

最优放大系数为

$$\alpha^*(k) = \{\alpha(k) : \min_{\alpha(k)} J_M(u^*)\}. \quad (18)$$

由式(16)可知, 控制器与放大系数可分离设计.

最优估计  $\hat{x}(k|k) = E\{x(k)|Z_k\}$  涉及到  $\alpha(k)$  的设计, 一般需要在线设计放大系数. 但由式(12)–(14) (16)可知,  $u^*(k)$  与  $\alpha^*(k), \dots, \alpha^*(M-1)$  有关, 因此在线设计放大系数会导致控制器的非因果性. 这主要是由分离性假设引起, 也就是说, 估计器与放大系数的不可分离将导致估计器与控制器的不可分离. 此时一种做法是改变控制律, 重新设计控制器.

这里本文考虑放大系数的离线设计, 则估计器与放大系数可分离设计, 避免了控制器的非因果性, 控制器与估计器的分离假设依然成立. 此时最优估计  $\hat{x}(k|k)$  可直接利用 Kalman 滤波器获得:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[z(k) - C'(k)\hat{x}(k|k-1)], \quad (19)$$

$$\Sigma(k|k) = \Sigma(k|k-1) - K(k)C'(k)\Sigma(k|k-1), \quad (20)$$

$$\hat{x}(k|k-1) = A\hat{x}(k-1|k-1) + Bu(k-1), \quad (21)$$

$$\Sigma(k|k-1) = A\Sigma(k-1|k-1)A^T + \Sigma_w, \quad (22)$$

$$K(k) = \Sigma(k|k-1)C'^T(k) \times [C'(k)\Sigma(k|k-1)C'^T(k) + \sigma_v^2(k)]^{-1}, \quad (23)$$

其中:  $\Sigma(k|k)$  为时刻  $k$  对该时刻的估计误差方差,  $\hat{x}(k|k-1)$  为时刻  $k-1$  对时刻  $k$  的预测值,  $\Sigma(k|k-1)$  为预测误差方差. 初始值  $\hat{x}(0|-1) = m_0, \Sigma(0|-1) = \Sigma_0$ .

下面主要讨论放大系数的设计问题. 利用  $\zeta^T \zeta = \text{tr}\{\zeta \zeta^T\}, \zeta \in \mathbb{R}^n$ , 可求得  $J_M(u^*)$  为

$$J_M(u^*) = m_0^T P(0)m_0 + \text{tr}\{P(0)\Sigma_0\} + \sum_{k=0}^{M-1} S(k)\alpha^2(k)\sigma_v^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \text{tr}\{Q'(k)\Sigma_w\} + \sum_{k=0}^{M-1} \text{tr}\{\Psi(k)E_{H_k}\{\Sigma(k|k)\}\}, \quad (24)$$

其中  $\Psi(k) \triangleq F^T(k)[B^T P(k+1)B + R(k)]F(k)$ . 上式中  $E_{H_k}\{\Sigma(k|k)\}$  是对估计误差方差关于信道状态  $H_k$  求期望,  $H_k \triangleq \{h(0), \dots, h(k)\}$ , 由于其求解复杂, 导致最优放大系数的求解出现困难. 这里利用文献[13]中的结论对性能指标做些改变, 通过最小化  $J_M(u^*)$  的上界来求取放大系数的次优解  $\alpha_s^*(k)$ .

Dey等在文献[13]中讨论了  $E_{H_k}\{\Sigma(k+1|k)\}$  的

求解问题, 通过论证函数的凹凸性得到  $E_{H_k}\{\Sigma(k+1|k)\}$  与  $E_{H_{k-1}}\{\Sigma(k|k-1)\}$  之间的不等式:

$$\bar{\Sigma}_{k+1|k} \leq E_{h(k)}\{\Sigma_w + A\bar{\Sigma}_{k|k-1}A^T - \frac{h^2(k)\alpha^2(k)}{h^2(k)\alpha^2(k)(C\bar{\Sigma}_{k|k-1}C^T + \sigma_v^2) + \sigma_n^2} \times A\bar{\Sigma}_{k|k-1}C^T C\bar{\Sigma}_{k|k-1}A^T\}, \quad (25)$$

其中  $\bar{\Sigma}_{k+1|k} \triangleq E_{H_k}\{\Sigma(k+1|k)\}$ . 根据式(25), Dey 等定义了  $E_{H_k}\{\Sigma(k+1|k)\}$  的上界序列  $\{\Omega(k+1)\}$ :

$$\Omega(k+1) = E_{h(k)}\{\Sigma_w + A\Omega(k)A^T - \frac{h^2(k)\alpha^2(k)}{h^2(k)\alpha^2(k)(C\Omega(k)C^T + \sigma_v^2) + \sigma_n^2} \times A\Omega(k)C^T C\Omega(k)A^T\}. \quad (26)$$

初始值  $\Omega(0) = \Sigma_0$ . 上式期望可直接进行计算. 由于  $h(k)$  服从瑞利分布, 所以  $h^2(k)$  服从指数分布, 又  $E\{h^2(k)\} = \sigma_h^2$ , 由此可计算出

$$\Omega(k+1) = \Sigma_w + A\Omega(k)A^T - \frac{A\Omega(k)C^T C\Omega(k)A^T}{C\Omega(k)C^T + \sigma_v^2} \times [1 - \gamma_k e^{\gamma_k} E_1(\gamma_k)], \quad (27)$$

其中:  $\gamma_k \triangleq \frac{\sigma_n^2}{\sigma_h^2 \alpha^2(k)[C\Omega(k)C^T + \sigma_v^2]}$ ,  $E_1(x)$  为指数积分:  $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

基于  $\{\Omega(k+1)\}$  可以得到  $E_{H_k}\{\Sigma(k|k)\}$  的上界序列. 由式(22), 有  $\Sigma(k|k) = A^{-1}(\Sigma(k+1|k) - \Sigma_w) \cdot (A^{-1})^T$ , 因此

$$E_{H_k}\{\Sigma(k|k)\} = A^{-1}(E_{H_k}\{\Sigma(k+1|k)\} - \Sigma_w)(A^{-1})^T \leq A^{-1}(\Omega(k+1) - \Sigma_w)(A^{-1})^T \triangleq \Gamma(k). \quad (28)$$

根据式(28), 性能函数  $J_M(u^*)$  的上界为

$$J'_M(u^*) = m_0^T P(0)m_0 + \text{tr}\{P(0)\Sigma_0\} + \sum_{k=0}^{M-1} S(k)\alpha^2(k)\sigma_v^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \text{tr}\{Q'(k)\Sigma_w\} + \sum_{k=0}^{M-1} \text{tr}\{\Psi(k)\Gamma(k)\}, \quad (29)$$

则次优解为

$$\alpha_s^*(k) = \{\alpha(k) : \min_{\alpha(k)} J'_M(u^*)\}. \quad (30)$$

本文采用数值解法求解  $\alpha_s^*(k)$ . 考虑到求导的复杂性, 本文利用 Hooke 和 Jeeves 提出的模式搜索法<sup>[24]</sup>进行求解, 其基本思想为: 寻找具有较小函数值的山谷, 使迭代产生的序列沿山谷走向逼近极小点. 算法主要包括探测移动和模式移动两部分, 其

中前者确定有利的前进方向,而后者则沿着该方向加速移动,迭代时两者交替进行.运用MATLAB进行仿真时模式搜索法可直接调用程序patternsearch.

图2是仿真求得的 $\alpha_s^*(k)$ ,考虑的是文献[13]中的例子:在模型(1)-(2)(5)中: $A=1.25, B=C=1, \Sigma_w=1, \sigma_v^2=4, \sigma_n^2=4, \sigma_h^2=0.01$ ;初始状态: $m_0=1, \Sigma_0=1$ ;性能指标 $J_M$ 中 $Q(k)=R(k)=1, S(k)=0.1$ ,  $M$ 的取值分别为40, 60和80.由于 $\alpha(k)$ 的正负对最终结果没有影响,这里不失一般性取 $\alpha(k)$ 为正.根据图2中 $\alpha_s^*(k)$ 的取值可以推测:当 $M \rightarrow \infty$ 时,即无限时域情形, $\alpha_s^*(k)$ 可取为常数,为4.6172.

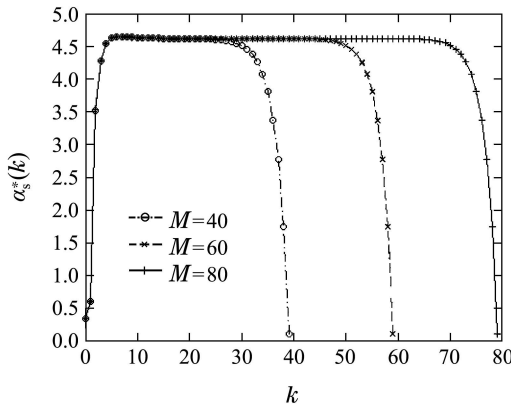


图2  $M=40, 60$ 和 $80$ 时 $\alpha_s^*(k)$ 的取值

Fig. 2 Value of  $\alpha_s^*(k)$  with  $M=40, 60$  and  $80$

**注1** 在性能指标中, $S(k)$ 表示通信过程能量消耗的权重.笔者发现, $S(k)$ 取值越大, $\alpha_s^*(k)$ 将越小.由式(27)知道仿真时需要计算 $e^{\gamma k}$ ,若 $\alpha_s^*(k)$ 太小的话, $\gamma_k$ 将会很大,在计算 $e^{\gamma k}$ 时容易溢出.因此这里在仿真时, $S(k)$ 取值较小,以防止 $\Omega(k)$ 在迭代时因数据溢出而发生错误.

**3.2 无限时域(Infinite horizon)**

对于无限时域情形,本文取 $Q(k)=\bar{Q}, R(k)=\bar{R}, S(k)=\bar{S}$ .基于3.1节的推测本文可令 $\alpha(k)=\bar{\alpha}$ .此时性能指标为

$$J_\infty = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} E\left\{ \sum_{k=0}^{M-1} [x^T(k)\bar{Q}x(k) + \bar{R}u^2(k) + \bar{S}\bar{\alpha}^2 y^2(k)] \right\}. \quad (31)$$

为保证估计误差方差期望 $E_{H_k}\{\Sigma(k|k)\}$ 的收敛性,进一步提出假设2.

- 假设2** 1)  $\bar{\alpha} \neq 0$ ;  
2)  $\max(0, \log \|h(0)C\|)$ 可积.

由文献[13]可知,当满足假设1与假设2后,估计误差方差期望 $E_{H_k}\{\Sigma(k|k)\}$ 将收敛到常值 $\bar{\Sigma}$ ,上界序列 $\Gamma(k)$ 也将收敛到 $\bar{\Gamma}$ .

根据有限时域的分析可以得到最优控制律为

$$\bar{u}^*(k) = -\bar{F}\hat{x}(k|k). \quad (32)$$

此时性能指标为

$$J_\infty(\bar{u}^*) = \text{tr}\{\bar{Q}'\Sigma_w\} + \bar{S}\bar{\alpha}^2\sigma_v^2 + \text{tr}\{\bar{\Psi}\bar{\Sigma}\}. \quad (33)$$

最优放大系数为

$$\bar{\alpha}^* = \{\bar{\alpha} : \min_{\bar{\alpha}} J_\infty(\bar{u}^*)\}, \quad (34)$$

其中:

$$\bar{\Psi} = \bar{F}^T [B^T \bar{P} B + \bar{R}] \bar{F}, \quad (35)$$

$$\bar{F} = [B^T \bar{P} B + \bar{R}]^{-1} B^T \bar{P} A,$$

$$\bar{P} = A^T \{ \bar{P} - \bar{P} B [B^T \bar{P} B + \bar{R}]^{-1} B^T \bar{P} \} A + \bar{Q}', \quad (36)$$

$$\bar{Q}' = \bar{Q} + \bar{S}\bar{\alpha}^2 C^T C. \quad (37)$$

放大系数的求解依旧采用3.1节的方法,通过优化性能指标的上界来求取次优解 $\bar{\alpha}_s^*$ :

$$\bar{\alpha}_s^* = \{\bar{\alpha} : \min_{\bar{\alpha}} J'_\infty(\bar{u}^*)\}, \quad (38)$$

$$J'_\infty(\bar{u}^*) = \text{tr}\{\bar{Q}'\Sigma_w\} + \bar{S}\bar{\alpha}^2\sigma_v^2 + \text{tr}\{\bar{\Psi}\bar{\Gamma}\}, \quad (39)$$

其中 $\bar{\Gamma}$ 满足

$$\bar{\Gamma} = A^{-1}(\bar{\Omega} - \Sigma_w)(A^{-1})^T, \quad (40)$$

$$\bar{\Omega} = \Sigma_w + A\bar{\Omega}A^T - \frac{A\bar{\Omega}C^T C \bar{\Omega}A^T}{C\bar{\Omega}C^T + \sigma_v^2} \times [1 - \bar{\gamma}e^{\bar{\gamma}}E_1(\bar{\gamma})], \quad (41)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_h^2 \bar{\alpha}^2 [C\bar{\Omega}C^T + \sigma_v^2]}. \quad (42)$$

在求解上述问题时, $\bar{P}, \bar{\Omega}$ 可利用数值方法迭代求解,而 $\bar{\alpha}_s^*$ 可利用非线性规划中的一维搜索算法求得.图3描述了 $\bar{S}$ 取不同值时 $\bar{\alpha}_s^*$ 的取值情况,参数设置与3.1节一致, $A=1.25, B=C=1, m_0=1, \Sigma_0=1, \Sigma_w=1, \sigma_v^2=4, \sigma_n^2=4, \sigma_h^2=0.01$ ,性能指标 $J_\infty$ 中 $\bar{Q}=\bar{R}=1, \bar{\alpha}_s^*$ 采用黄金分割法求解.根据仿真结果可知,当 $\bar{S}=0.1$ 时, $\bar{\alpha}_s^*=4.6177$ ,与3.1节结果一致.

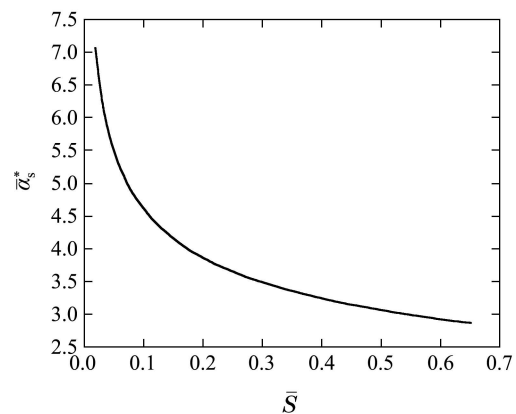


图3 不同 $\bar{S}$ 下 $\bar{\alpha}_s^*$ 的取值

Fig. 3 Value of  $\bar{\alpha}_s^*$  with different  $\bar{S}$

在传统LQG控制问题中,为了保证反馈系统是

渐进稳定的, 即相应的Riccatti方程的解为镇定解, 需要进一步要求  $(A, D)$  可探测 (detectable), 其中  $D$  为满足  $\bar{Q} = D^T D$  的任一矩阵<sup>[25]</sup>. 这里由于本文改变了性能指标, 因此想要保持系统稳定, 需要满足  $(A, D')$  可探测, 其中  $\bar{Q}' = D'^T D'$ .

已知  $(A, D)$  可探测, 当且仅当<sup>[25]</sup>  $\forall \lambda, |\lambda| \geq 1$ ,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ D \end{pmatrix} = n.$$

上式等价于

$$\text{rank}((\lambda I - A)^T(\lambda I - A) + D^T D) = n,$$

即  $(\lambda I - A)^T(\lambda I - A) + \bar{Q} > 0$ . 于是

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^T(\lambda I - A) + \bar{Q}' &= \\ (\lambda I - A)^T(\lambda I - A) + \bar{Q} + \bar{S}\bar{\alpha}^2 C^T C &> 0. \end{aligned}$$

由此可得

$$\text{rank}((\lambda I - A)^T(\lambda I - A) + D'^T D') = n,$$

即  $\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ D' \end{pmatrix} = n$ ,  $(A, D')$  可探测. 这就是说, 若原LQG控制下系统是渐进稳定的, 则基于本文方法得到的反馈系统依旧是渐进稳定的.

### 3.3 方法小结 (Summary of the method)

至此本文给出了网络化控制系统(1)–(2)(5)在有限时域和无限时域下控制信号和放大系数的设计方法.

对于有限时域情形, 考虑性能函数(9), 本文基于放大系数的离线设计, 在控制与估计的分离假设下得出控制信号的设计与传统LQG控制问题类似, 采用线性反馈控制(16), 状态估计采用Kalman滤波器获得式(19)–(22); 放大系数的设计由于涉及到对信道状态的处理, 本文求取了次优解(30), 通过优化性能指标的上界(29)在一定程度上使性能最优, 计算过程采用模式搜索法进行求解.

基于有限时域的仿真结果, 针对无限时域情形, 考虑性能函数(31), 得出定常反馈控制(32), 并基于性能指标的上界(39)得到常放大系数(38). 放大系数的求解采用一维搜索算法计算.

## 4 仿真 (Simulation)

本节利用仿真来说明控制性能与通信能量消耗之间的折中. 笔者知道随着放大系数的增大, 控制性能将得到提高, 而通信能量消耗也将随之增大, 所以放大系数的选择体现了控制性能与通信能量消耗之间的折中, 当放大系数的取值使得总性能达到最小时, 将实现两者间的最优折中.

考虑无限时域情形, 首先讨论如下稳定系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + w(k), \\ y(k) &= [1 \ 0]x(k) + v(k), \end{aligned}$$

其中:  $w(k) \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ ,  $v(k) \sim N(0, 1)$ , 初始状态  $x(0) \sim N \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ .

信道输入输出满足

$$z(k) = \bar{\alpha}h(k)y(k) + n(k),$$

其中:  $h(k)$  服从瑞利分布,  $E\{h^2(k)\} = 1$ ,  $n(k) \sim N(0, 1)$ .

性能指标  $J_\infty$  中

$$\bar{Q} = \text{diag}\{1, 1\}, \bar{R} = 1, \bar{S} = 0.1,$$

其中diag表示对角矩阵. 此时可取  $D = \text{diag}\{1, 1\}$ , 则  $(A, D)$  能观, 进一步也是可探测的.

根据式(38)–(42), 采用黄金分割法可以求得  $\bar{\alpha}_s^* = 1.1230$ , 此时  $\bar{Q}' = \text{diag}\{1.1123, 1\}$ , 可取  $D' = \text{diag}\{1.0546, 1\}$ , 则  $(A, D')$  能观, 进一步也是可探测的.

当  $\bar{\alpha} = 1.1230$  时系统性能  $J_\infty(\bar{u}^*) = 12.4127$ . 计算过程涉及  $\bar{\Sigma}$  的求取, 这里参照文献[13], 通过计算 50000 个样本序列的平均值得到. 图4是  $\bar{\alpha} = 1.1230$  时估计误差方差期望的迹  $\text{tr}1(k) = \text{tr}\{E_{H_k}\{\Sigma(k)|k)\}$  及其上界的迹  $\text{tr}2(k) = \text{tr}\{\Gamma(k)\}$  的取值情况, 实线对应  $\text{tr}1(k)$ , 虚线对应  $\text{tr}2(k)$ . 由于样本容量有限, 导致计算时  $E_{H_k}\{\Sigma(k)|k)\}$  的收敛值一直在上下浮动. 对此, 本文通过求最后 10 个值的平均值来计算  $\bar{\Sigma}$ .

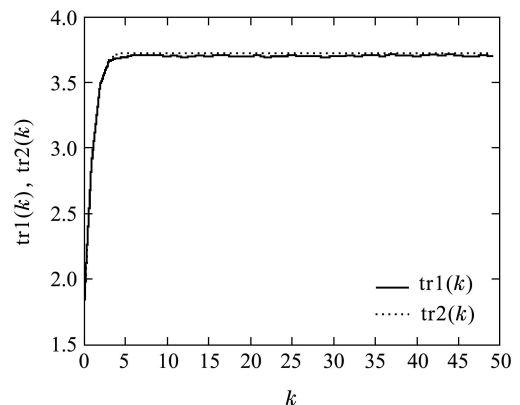


图 4 稳定系统估计误差方差期望及其上界的迹

Fig. 4 Trace of the expected estimate error covariance and its bound of the stable example

为了说明本文方法的有效性, 本文求取一系列  $\bar{\alpha}$

对应的系统性能 $J_\infty(\bar{u}^*)$ . 图5是上述稳定系统在 $\bar{\alpha}$ 取不同值时 $J_\infty(\bar{u}^*)$ 及其上界 $J'_\infty(\bar{u}^*)$ 的取值情况, 实线对应 $J_\infty(\bar{u}^*)$ , 虚线对应 $J'_\infty(\bar{u}^*)$ . 对比两条曲线可以发现,  $\bar{\alpha}^* \approx \bar{\alpha}_s^*$ .

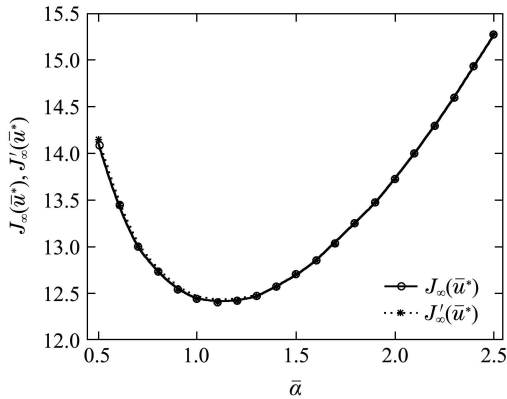


图5 稳定系统不同 $\bar{\alpha}$ 下 $J_\infty(\bar{u}^*)$ 与 $J'_\infty(\bar{u}^*)$ 的取值  
Fig. 5 Value of  $J_\infty(\bar{u}^*)$  and  $J'_\infty(\bar{u}^*)$  with different  $\bar{\alpha}$  of the stable example

进一步讨论不稳定系统, 保持其他参数不变, 取  $A = \begin{bmatrix} 1.3 & 1 \\ 0 & 1.7 \end{bmatrix}$ , 此时可求得 $\bar{\alpha}_s^* = 2.3913$ . 图6是 $\bar{\alpha} = 2.3913$ 时 $\text{tr}1(k)$ 与 $\text{tr}2(k)$ 的取值情况, 实线对应 $\text{tr}1(k)$ , 虚线对应 $\text{tr}2(k)$ . 根据最后10个值的平均值求得 $\bar{\Sigma}$ 后可计算出 $J_\infty(\bar{u}^*) = 427.4744$ , 比稳定系统的性能指标大很多, 这主要是由系统的不稳定性造成, 即镇定系统会造成额外的能量消耗.

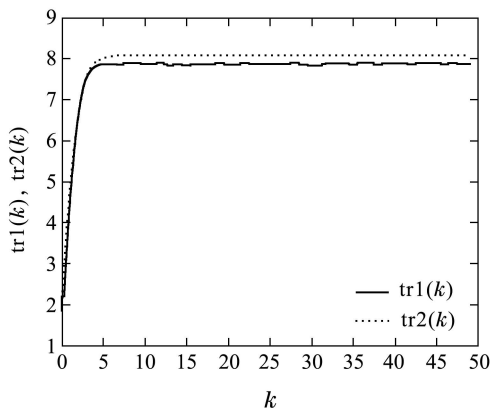


图6 不稳定系统估计误差方差期望及其上界的迹  
Fig. 6 Trace of the expected estimate error covariance and its bound of the unstable example

图7是上述不稳定系统在 $\bar{\alpha}$ 取不同值时 $J_\infty(\bar{u}^*)$ 及其上界 $J'_\infty(\bar{u}^*)$ 的取值情况, 实线对应 $J_\infty(\bar{u}^*)$ , 虚线对应 $J'_\infty(\bar{u}^*)$ . 从图中可以估计出 $\bar{\alpha}^* \approx 2.25$ , 而 $\bar{\alpha}_s^* = 2.3913$ , 相比于稳定系统结果要差, 这可能是由 $\bar{\Sigma}$ 与 $\bar{\Gamma}$ 的较大偏离引起. 虽然如此, 其结果仍然可以接受, 因为当 $\bar{\alpha}$ 分别取 $\bar{\alpha}_s^*$ 与 $\bar{\alpha}^*$ 时 $J_\infty(\bar{u}^*)$ 的取值相差不多.

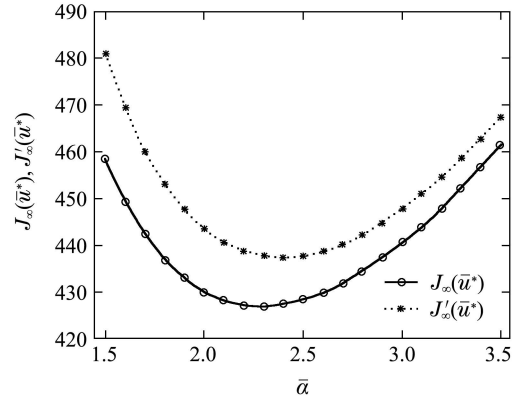


图7 不稳定系统不同 $\bar{\alpha}$ 下 $J_\infty(\bar{u}^*)$ 与 $J'_\infty(\bar{u}^*)$ 的取值  
Fig. 7 Value of  $J_\infty(\bar{u}^*)$  and  $J'_\infty(\bar{u}^*)$  with different  $\bar{\alpha}$  of the unstable example

从以上仿真可以看出, 无论是稳定还是不稳定系统, 本文方法均很好地实现了控制性能与通信能量消耗之间的折中.

在第2节中本文曾提到, 同类文献中在讨论放大系数的设计问题时一般有2种方法: 一种侧重于控制, 给定最差性能指标, 设计放大系数使通信功率最小; 另一种侧重于通信, 给定最大通信功率, 设计放大系数使性能指标最优, 2种方法考虑的都是硬性条件约束. 本文所采用的方法是将通信和控制联合考虑, 使总性能最优, 考虑的实则是一种软性约束. 另外, 在引入通信消耗时笔者加入了权重 $S$ , 通过对权重的取值可以选择是侧重于控制抑或是通信, 从某种意义上来说, 这是前2种方法的结合.

### 5 结论(Conclusions)

本文考虑了具有信号传输衰落的线性系统的二次型最优控制问题. 通过在性能指标中进一步考虑通信过程的能量消耗, 本文将通信信号的放大设计纳入闭环系统的性能框架中, 并借此讨论了系统中存在瑞利平坦衰落信道时控制器与通信信号放大设计中的折中. 通过分析, 本文提出了有限时域情形控制信号与放大系数的设计方法, 其中控制信号的设计与传统LQG问题类似, 采用线性反馈控制, 而放大系数的设计采用数值解法获得. 从有限时域的设计分析中获得启发, 进一步给出了无限时域情形控制信号与放大系数的设计方法. 仿真验证了本文方法的有效性, 通过对通信信号的放大设计, 本文很好地实现了控制性能与通信过程能量消耗之间的折中. 本文主要讨论了系统输出到控制器之间存在衰落信道的情形, 在未来的研究中希望进一步讨论控制器到系统之间也存在衰落信道的情形. 另外, 本文主要针对单输入单输出系统, 而多输入多输出系统由于涉及到功率分配问题, 更值得去探讨.

## 参考文献(References):

- [1] HESPANHA J, NAGHSHTABRIZI P, XU Y. A survey of recent results in networked control systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 138 – 162.
- [2] PROAKIS J G. *Digital Communications* [M]. 4th Edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003.
- [3] DUEL-HALLEN A. Fading channel prediction for mobile radio adaptive transmission systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(12): 2299 – 2313.
- [4] ALIMOHAMMAD A, COCKBURN B F. Modeling and hardware implementation aspects of fading channel simulators [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2008, 57(4): 2055 – 2069.
- [5] MOSTOFI Y, MURRAY R. To drop or not to drop: design principles for kalman filtering over wireless fading channels [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 376 – 381.
- [6] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANCESCHETTI M, et al. Kalman filtering with intermittent observations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1464.
- [7] HUANG M, DEY S. Stability of Kalman filtering with Markovian packet losses [J]. *Automatica*, 2007, 43(4): 598 – 607.
- [8] YOU K, FU M, XIE L. Mean square stability for Kalman filtering with Markovian packet losses [J]. *Automatica*, 2011, 47(12): 2647 – 2657.
- [9] 陈海霞, 孙书利. 具有有限连续丢包网络控制系统的最优线性估值器 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(10): 1317 – 1324. (CHEN Haixia, SUN Shuli. Optimal linear estimators for networked control systems with finite consecutive packet dropouts [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(10): 1317 – 1324.)
- [10] QUEVEDO D E, AHLÉN A, LEONG A S, et al. On Kalman filtering over fading wireless channels with controlled transmission powers [J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1306 – 1316.
- [11] SCHENATO L, SINOPOLI B, FRANCESCHETTI M, et al. Foundations of control and estimation over lossy networks [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 163 – 187.
- [12] GASTPAR M, VETTERLI M. Source-channel communication in sensor networks [M] // *Information Processing in Sensor Networks*, 2003, 2634: 162 – 177.
- [13] DEY S, LEONG A, EVANS J. Kalman filtering with faded measurements [J]. *Automatica*, 2009, 45(10): 2223 – 2233.
- [14] BAHCECI I, KHANDANI A K. Linear estimation of correlated data in wireless sensor networks with optimum power allocation and analog modulation [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2008, 56(7): 1146 – 1156.
- [15] SENOL H, TEPEDELENLIOGLU C. Performance of distributed estimation over unknown parallel fading channels [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(12): 6057 – 6068.
- [16] LEONG A S, DEY S, EVANSA J S. Asymptotics and power allocation for state estimation over fading channels [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47(1): 611 – 633.
- [17] LEONG A S, DEY S, NAIR G N, et al. Power allocation for outage minimization in state estimation over fading channels [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(7): 3382 – 3397.
- [18] LEONG A S, DEY S, ANAND J. Optimal LQG control over continuous fading channels [C] // *Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control*. Italy: IFAC, 2011: 6580 – 6585.
- [19] CHARALAMBOUS C D, FARHADI A, DENIC S Z. Control of continuous-time linear gaussian systems over additive gaussian wireless fading channels: a separation principle [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(4): 1013 – 1019.
- [20] ELIA N. Remote stabilization over fading channels [J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(3): 237 – 249.
- [21] XIAO N, XIE L, QIU L. Feedback stabilization of discrete-time networked systems over fading channels [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(9): 2176 – 2189.
- [22] ASTROM K J. *Introduction to Stochastic Control Theory* [M]. New York: Academic Press, 1970.
- [23] CLARKE R H. A statistical theory of mobile-radio reception [J]. *Bell System Technical Journal*, 1968, 47(6): 957 – 1000.
- [24] HOOKE R, JEEVES T A. Direct search solution of numerical and statistical problems [J]. *Journal of the ACM*, 1961, 8(2): 212 – 229.
- [25] LANCASTER P, RODMAN L. *Algebraic Riccati Equations* [M]. New York: Oxford University Press, 1995.

## 作者简介:

田垠 (1990–), 男, 硕士研究生, 研究方向为通讯约束控制系统, Email: kerry.tian@163.com;

章辉 (1967–), 男, 副教授, 研究方向为通讯约束控制系统、控制系统的信息论方法等, Email: zhanghui@iipc.zju.edu.cn.