

桥式吊车系统的伪谱最优控制设计

刘熔洁, 李世华[†]

(东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210018)

摘要: 对于桥式吊车系统的最优控制问题, 根据实际的工况要求, 性能指标有时不一定是标准的二次形式. 同时, 在实际的控制问题中, 状态和控制输入往往会受到一些边界条件和路径过程中的约束. 针对这一问题, 本文应用Chebyshev伪谱优化算法来处理, 它可以处理状态和控制约束的非线性最优化问题以及一个非标准的目标函数. 首先对桥式吊车系统模型进行一系列的坐标变换, 将其转变为上三角系统形式的误差模型. 然后将桥式吊车最优控制问题转化成具有一系列代数约束的参数优化问题, 即非线性规划问题. 通过求解离散化后的参数优化问题, 得到桥式吊车的最优控制律. 本文还给出了Chebyshev伪谱最优解的可行性和一致性分析. 最后, 在仿真研究中验证该控制器的有效性.

关键词: Chebyshev伪谱; 最优设计; 桥式吊车系统

中图分类号: TP273.5 **文献标识码:** A

Optimal control design for an overhead crane system using pseudospectral method

LIU Rong-jie, LI Shi-hua[†]

(College of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210018, China)

Abstract: In the optimal control for an overhead crane system, the performance index is not necessarily in a quadratic form. It depends on actual requirements of the application. In some cases, states and control are usually constrained due to boundary conditions and track conditions. To deal with this problem, we employ the Chebyshev pseudospectral algorithm to solve the nonlinear optimal control problem with states and/or control in constrain and the cost function in nonstandard quadratic form. Firstly, the model of the overhead crane system is transformed to an error model in upper triangular form. Next, the optimal control problem of the overhead crane system is transformed into a sequence of parametric optimization problems with algebraic constraints, i.e., a nonlinear programming problem. By solving the discretized optimization problems, we obtain the optimal control law for the overhead crane system. The feasibility and the uniformity of the Chebyshev pseudospectral optimal solution are also analyzed. Simulations are performed to show the effectiveness in applying the pseudospectral optimal design method to an overhead crane system.

Key words: Chebyshev pseudospectral method; optimal design; overhead crane systems

1 引言(Introduction)

桥式吊车是一种运输工具, 它具有负载能力强、操作灵活、节能显著等优点, 已经被广泛应用到工业生产和港口运输等多个领域. 从本质上来看, 桥式吊车是一种典型的非线性、强耦合的欠驱动系统, 正是由于其欠驱动特性, 设计这种闭环系统控制器颇有难度. 为了提高吊车系统的运送效率与安全性能, 当前迫切需要设计出合理的控制策略来实现其自动操作. 具体来说, 对于桥式吊车运送控制的目标可以总结为以下两点: 一方面是使台车快速准确地到达目标位置, 以完成对负载的高效运送; 另一方面要求负载在运行过

程中的摆动尽可能地小, 以避免与周围的货物或人员发生意外碰撞. 然而, 由于桥式吊车系统的非线性欠驱动特性, 以及系统内部存在的摩擦力等多种不确定性因素, 如何同时满足这两方面的性能要求是一个非常困难的问题. 近几年来, 对于桥式吊车系统的控制问题, 有最优控制、滑模控制^[1-3]、自适应控制^[4-6]等多种方法来设计桥式吊车控制系统.

在实际生产活动中, 吊车控制的主要目的是保证台车传送货物的快速准确特性以及负载运动过程中的小摆角特性. 而一般的非线性控制方法并不是直接针对这些特性指标的最优化来设计. 因此, 基于此目

收稿日期: 2012-12-30; 收修改稿日期: 2013-02-20.

[†]通信作者. E-mail: lsh@seu.edu.cn; Tel.: +86 025-83793785.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61074013); 新世纪优秀人才计划资助项目(NCET-10-0328).

标设计相应的最优控制策略具有很强的工程意义.但是,在最优控制律的求解中,性能指标往往不是标准的线性二次形式.而且在实际的控制问题中,状态和控制输入往往会受到一些边界条件和路径过程中的约束.由此可知,寻求有效的方法求解相应的最优控制律是本文的关键.

对于桥式吊车系统的最优控制问题,现有的方法大致分为两种.第1种方法是利用最优的必要条件,将最优控制问题转化为两点边值问题(TPBVP).大量的数值算法被用来求解TPBVP问题^[7-9],然而初值的猜测却很难得到.对于每一个不同的初值条件,在每次计算之前都需要进行初值的猜测.第2种方法是通过离散化或是参数化把最优控制问题转化为一个有限维的优化问题^[10-12],再进行数值计算.但是,这种方法也存在着和第1种方法一样的缺点,也需要对初值进行猜测.与此同时,现有的这些优化控制方法均是基于一个简化之后的线性模型得到的.因此,直接基于非线性的吊车模型去设计最优控制器,并尽量避免出现上述方法的问题,是本文的主要动机.

相对现有的方法而言,伪谱方法的优点比较突出,针对于任意形式的性能指标,它能够将非线性系统的约束最优控制所遇到的两点边值问题离散化后转化为线性代数方程问题,这样不需要求解Riccati微分方程,就可以获得反馈控制律近似分析解,并且它能够用于实时在线控制.同时,相比其他的数值解法,伪谱方法具有收敛更快、性能更好的优点.

具体地说,伪谱(pseudospectral)是一种用来解决复杂非线性最优控制问题的数值计算方法.伪谱方法产生于20世纪70年代,最初它被用来求解偏微分方程(partial differential equations, PDE)^[13],并很快成为了最重要的偏微分方程数值计算方法之一^[14].20世纪90年代以来,伪谱方法被引入到求解非线性约束最优控制问题中,研究人员通过选择不同的节点选取方式,研究并开发了各种伪谱最优控制算法^[15-18].在随后的几十年中,伪谱最优控制算法在大量的实际工程优化控制问题中扮演着举足轻重的角色^[17-18].在2006年11月5日和2007年3月3日,美国国际空间站在没有使用任何推进剂的前提下,通过伪谱最优控制算法设计姿态跟踪轨迹,完成了两次大角度的机动,实现了零推进剂下大角度机动的历史性突破,同时还为美国宇航局节省了1.5亿美元的推进剂成本.由于伪谱最优控制方法的成功应用,NASA已经将伪谱控制算法编入了其最新发布的OTIS最优控制软件包中^[19].同时,近些年来,关于伪谱方法的理论、算法、计算能力等方面的研究也一直是最优控制领域的热点之一^[20-26].

根据节点选取方法的不同,伪谱最优控制算法可分为以下几种形式:Legendre-Gauss型、Legendre-

Gauss-Lobatto(LGL)型、Legendre-Gauss-Radau(LGR)型以及Chebyshev-Gauss-Lobatto(CGL)型伪谱算法.前3种伪谱算法的节点配置可通过求解Legendre多项式或其导函数的根得到,这里笔者将这3种算法统称为Legendre伪谱算法.CGL算法的节点由Chebyshev多项式求根得到.和前3种算法相比,Chebyshev伪谱算法有其自身的优点.首先,对于一个给定的函数,在 L_∞ 范数的意义下,Chebyshev多项式近似非常接近最优多项式近似的结果^[27].其次,在计算节点时,Legendre算法的节点计算需要大量的代数求根运算.而Chebyshev伪谱算法的节点具有显式表达式,从而大大减少了计算时间.随着Chebyshev伪谱算法的数学理论基础不断地建立和完善^[27],Chebyshev伪谱算法在各种实际工程问题中得到了越来越广泛的应用^[16-17,28-29].

在本文中,首先对桥式吊车系统模型进行一系列的坐标变换,将其转变为上三角系统形式的误差模型.然后应用Chebyshev伪谱优化算法,将吊车最优控制问题转化成具有一系列代数约束的参数优化问题,即非线性规划问题.然后,通过求解离散化后的参数优化问题,得到桥式吊车的伪谱最优控制律.最后,在仿真研究中验证该控制器对于桥式吊车系统的有效性.

2 动力学模型(Dynamical model)

通过对桥式吊车系统的分析,可以将其抽象为一个物理模型,如图1所示.

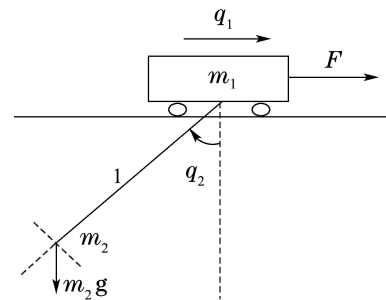


图1 桥式吊车系统物理模型

Fig. 1 Physical model of an overhand crane

系统动力学模型为

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2 l \cos q_2 \ddot{q}_2 + m_2 l \sin q_2 \dot{q}_2^2 = F, \\ -m_2 l \cos q_2 \ddot{q}_1 + m_2 l^2 \ddot{q}_2 + m_2 g l \sin q_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: q_1 是位移, q_2 是摆角, m_1 是台车质量, m_2 是负载质量, F 是牵引力, l 是绳长, g 是重力加速度.

类似于文献[30-33],对模型(1)建立坐标变换:

$$\begin{cases} z_1 = q_1 - \frac{1}{2} l \ln \frac{1 + \sin q_2}{1 - \sin q_2}, \\ z_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}, \\ \lambda_1 = q_2, \lambda_2 = \dot{q}_2, \end{cases} \quad (2)$$

其中 L 为拉格朗日算子, 定义如下:

$$L = K - P = \frac{(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2}{2} - m_2 l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 + m_2 l^2 \frac{\dot{q}_2^2}{2} - m_2 g l (1 - \cos q_2), \quad (3)$$

其中: K 是总动能, P 是总势能. 从而吊车系统转换为级联规范型:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{z_2}{-m_2 l \cos \lambda_1}, \\ \dot{z}_2 = -m_2 g l \sin \lambda_1 - z_2 \lambda_2 \tan \lambda_1 + m_2 l^2 \lambda_2^2 \tan \lambda_1, \\ \dot{\lambda}_1 = \lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = \omega. \end{cases} \quad (4)$$

令 $x_1 = z_1, x_2 = \frac{z_2}{-m_2 l \cos \lambda_1}$, 得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = g \tan \lambda_1 - l \frac{\tan \lambda_1}{\cos \lambda_1} \lambda_2^2, \\ \dot{\lambda}_1 = \lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = \omega. \end{cases} \quad (5)$$

$x_3 = \tan \lambda_1, x_4 = (1 + \tan \lambda_1^2) \lambda_2$, 则式(5)转换为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 \left(g - \frac{l x_4^2}{(1 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = (1 + x_3^2) \omega + \frac{2 x_3 x_4^2}{1 + x_3^2}. \end{cases} \quad (6)$$

下面定义误差变量

$$e_1 = \frac{x_1 - x_{1d}}{k_1}, \quad e_2 = \frac{x_2}{k_1}, \quad e_3 = x_3, \quad e_4 = x_4,$$

其中 x_{1d} 是期望值. 再令

$$k_1 = g, \quad k_2 = l, \quad f(e_3, e_4) = \frac{k_2 e_3 e_4^2}{k_1 (1 + e_3^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

本文可以得到一个上三角形式的状态方程:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = e_3 - f(e_3, e_4), \\ \dot{e}_3 = e_4, \\ \dot{e}_4 = (1 + e_3^2) \omega + \frac{2 e_3 e_4^2}{1 + e_3^2}, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\omega = \ddot{q}_2$, 且 $e_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 均为变换后的新的误差变量.

经过反坐标变换, 可以得到原始的控制量

$$F = \left[\frac{(m_1 + m_2)l}{\cos q_2} - m_2 l \cos q_2 \right] \omega + (m_1 + m_2) g \tan q_2 + m_2 l \sin q_2 \dot{q}_2^2. \quad (8)$$

这意味着, 设计出了关于误差方程(7)的控制器, 根据式子(8)便可得到桥式吊车的控制量 F 的表达式. 这样的坐标变换简化了动力学方程, 使得离散化

后的最优化问题可被更有效的求解. 下面, 将针对这样的吊车模型设计伪谱最优控制器.

3 伪谱最优控制设计(Optimal control design based on pseudospectral)

注1 在对桥式吊车系统的实际控制中, 调运过程中的摆角 q_2 往往会受到角度范围的约束. 与此同时, 控制输入即牵引力 F 也会有幅值的限制. 在设计控制器的时候, 针对这些状态和控制输入量的直接约束是需要被考虑的. 在本文中, 由于进行了一系列的变换, 在这里, 本文也需要把对其的直接约束条件同时进行转换, 变成针对吊车误差模型的对应的约束. 以下均是针对转换过的误差模型, 以及转换过的约束条件来进行设计的. 在得到最优结果之后, 根据转换关系, 即可以得到直接约束下的原始最优控制量.

基于桥式吊车误差模型, 本文考虑如下一般形式的最优控制问题:

$$J(e, \omega) = \Psi(e(0), e(t_f)) + \int_0^{t_f} L(e, \omega) dt. \quad (9)$$

系统方程(7)如下:

$$\dot{e} = (\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3, \dot{e}_4)^T = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 - \frac{k_2 e_3 e_4^2}{k_1 (1 + e_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ e_4 \\ (1 + e_3^2) \omega + \frac{2 e_3 e_4^2}{1 + e_3^2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

边界条件和路径约束分别为

$$\begin{cases} \Phi(e(0), e(t_f)) = 0, \\ B(e(t), \omega(t)) \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

本文分4步来实现Chebyshev伪谱优化算法: 首先, 通过变量代换, 将上述最优控制问题的时间域由 $[0, t_f]$ 转化为计算时域 $[-1, 1]$. 其次, 选取Chebyshev-Gauss-Lobatto(CGL)型节点, 将状态量和控制量在节点上进行离散, 并以这些节点构造Lagrange插值多项式来逼近状态和控制变量. 接着通过对插值多项式求导来近似状态变量对时间的导数, 从而将微分方程约束转换为一组代数约束. 性能指标中的积分项由Clenshaw-Curtis积分计算. 经上述变换, 最优控制问题可转化成具有一系列代数约束的参数优化问题. 最后, 通过求解离散化后的参数优化问题, 得到桥式吊车的伪谱最优控制律.

第1步 变量代换. 在最优控制问题中, 最优解有时是非光滑的, 或者无法用全局多项式很好的近似. 为了解决这一缺陷, 通常采用有限元方法. 所谓有限元方法, 就是将时间域 $[-1, 1]$ 划分成若干个子区间, 在各个子区间上采用不同的多项式近似最优控制问题的解. 因此, 这里本文采用变量代换, 先将问题的时间域由 $[0, t_f]$ 转化为 $[-1, 1]$.

令 $\tau \in [-1, 1]$ 和 $t = \frac{t_f}{2}\tau + \frac{t_f}{2}$, 则上述的最优控制问题的性能指标可以转化为

$$J(e, \omega) = \Psi(e(-1), e(1)) + \frac{t_f}{2} \int_{-1}^1 L(e, \omega) d\tau. \quad (12)$$

系统方程转化如下:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{t_f}{2} e_2, \\ \dot{e}_2 = \frac{t_f}{2} (e_3 - \frac{k_2 e_3 e_4^2}{k_1 (1 + e_3^2)^{\frac{3}{2}}}), \\ \dot{e}_3 = \frac{t_f}{2} e_4, \\ \dot{e}_4 = \frac{t_f}{2} ((1 + e_3^2) \omega + \frac{2 e_3 e_4^2}{1 + e_3^2}). \end{cases} \quad (13)$$

相应的边界条件和路径约束可分别写成如下形式:

$$\Phi(e(-1), e(1)) = 0, B(e(\tau), \omega(\tau)) \leq 0. \quad (14)$$

第2步 选取CGL型节点. 伪谱最优算法中, 对于一个给定的函数, 在 L_∞ 范数的意义下, Chebyshev 展式可以非常地接近最优的多项式近似结果. 其次在计算节点时, Legendre 算法是通过求解 Legendre 多项式或其导函数的根得到. Legendre 算法的节点计算需要大量的代数求根运算, 而 Chebyshev 伪谱算法的节点具有显式表达式, 从而大大减少了计算时间. 因此, 在这里本文选取 CGL 型节点.

CGL 型节点的定义如下:

$$\tau_k = \cos \frac{\pi(N-k)}{N}, k = 0, 1, \dots, N, \quad (15)$$

这些节点均落在区间 $[-1, 1]$ 上, 并且满足 $\tau_0 = -1$, $\tau_N = 1$. 特别地, 这些节点均为下面 N 阶 Chebyshev 多项式的极值点 $T_n(t) = \cos(N \cos^{-1} t)$.

下面本文以这些节点构造 Lagrange 插值多项式来逼近状态和控制输入. 首先, Lagrange 插值多项式的定义如下:

$$\phi_k(\tau) = \frac{(-1)^{k+1}}{N^2 c_k} \frac{(1 - \tau^2) \dot{T}_N(\tau)}{\tau - \tau_k}, \quad (16)$$

其中:

$$c_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \text{ 或 } k = N; \\ 1, & 1 \leq k \leq N-1. \end{cases}$$

那么, 状态 e_i 的多项式近似可以如下式给出:

$$e_i(\tau) \approx \bar{e}_i(\tau) = \sum_{k=0}^N \bar{e}_i(\tau_k) \phi_k(\tau), i = 1, 2, 3, 4. \quad (17)$$

相应地, 控制输入 ω 的多项式近似也可以类似的给出:

$$\omega(\tau) \approx \bar{\omega}(\tau) = \sum_{k=0}^N \bar{\omega}(\tau_k) \phi_k(\tau). \quad (18)$$

第3步 最优控制问题离散化. 下面本文根据状态 e 和控制输入 ω 的多项式近似式(17)–(18), 将最优控

制问题(12)–(14)离散化为一个具有一系列代数约束的参数优化问题.

首先, 本文定义

$$\bar{e} = [\bar{e}(\tau_0) \ \bar{e}(\tau_1) \ \dots \ \bar{e}(\tau_N)] = \begin{bmatrix} \bar{e}_1(\tau_0) & \bar{e}_1(\tau_1) & \dots & \bar{e}_1(\tau_N) \\ \bar{e}_2(\tau_0) & \bar{e}_2(\tau_1) & \dots & \bar{e}_2(\tau_N) \\ \bar{e}_3(\tau_0) & \bar{e}_3(\tau_1) & \dots & \bar{e}_3(\tau_N) \\ \bar{e}_4(\tau_0) & \bar{e}_4(\tau_1) & \dots & \bar{e}_4(\tau_N) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\bar{\omega} = [\bar{\omega}(\tau_0) \ \bar{\omega}(\tau_1) \ \dots \ \bar{\omega}(\tau_N)]. \quad (20)$$

那么, 离散化的性能指标可以由下式给出:

$$J(e, \omega) \approx \bar{J}(\bar{e}, \bar{\omega}) = \Psi(\bar{e}(\tau_0), \bar{e}(\tau_N)) + \frac{t_f}{2} \sum_{k=0}^N L(\bar{e}(\tau_k), \bar{\omega}(\tau_k)) \vartheta_k, \quad (21)$$

其中 $\vartheta_k, k = 0, \dots, N$ 为 Clenshaw-Curtis 加权.

当 N 为偶数时, Clenshaw-Curtis 加权为

$$\begin{cases} \vartheta_0 = \vartheta_N = \frac{1}{N^2 - 1}, \\ \vartheta_s = \vartheta_{N-s} = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{1 - 4j^2} \cos \frac{2\pi js}{N}, \\ s = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (22)$$

当 N 为奇数时, Clenshaw-Curtis 加权为

$$\begin{cases} \vartheta_0 = \vartheta_N = \frac{1}{N^2}, \\ \vartheta_s = \vartheta_{N-s} = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{1 - 4j^2} \cos \frac{2\pi js}{N}, \\ s = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}. \end{cases} \quad (23)$$

其次, 本文给出状态向量导数的离散近似表达式:

$$\dot{e}_i(\tau) \approx \dot{\bar{e}}_i(\tau) = \sum_{k=0}^N \bar{e}_i(\tau_k) \dot{\phi}_k(\tau), i = 1, 2, 3, 4. \quad (24)$$

这里本文定义 $(N+1) \times (N+1)$ 阶的微分矩阵

$$D = (D_{kj}) \doteq (\dot{\phi}_k(\tau_j)),$$

其中

$$\dot{\phi}_k(\tau_j) = \begin{cases} \frac{c_k}{c_j} \frac{(-1)^{j+k}}{(\tau_j - \tau_k)}, & j \neq k; \\ \frac{t_k}{2 - 2t_k^2}, & 1 \leq j = k \leq N-1; \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & j = k = 0; \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & j = k = N. \end{cases} \quad (25)$$

由此, 本文可以将系统方程(13)转化为如下的一

系列代数约束:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_1(\tau_j) = \frac{t_f}{2} \bar{e}_2(\tau_k), \\ \sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_2(\tau_j) = \frac{t_f}{2} (\bar{e}_3(\tau_k) - \frac{k_2 \bar{e}_3(\tau_k) \bar{e}_4^2(\tau_k)}{k_1(1 + \bar{e}_3^2(\tau_k))^{\frac{3}{2}}}), \\ \sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_3(\tau_j) = \frac{t_f}{2} \bar{e}_4(\tau_k), \\ \sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_4(\tau_j) = \\ \frac{t_f}{2} ((1 + \bar{e}_3^2(\tau_k)) \bar{\omega}(\tau_k) + \frac{2 \bar{e}_3(\tau_k) \bar{e}_4^2(\tau_k)}{1 + \bar{e}_3^2(\tau_k)}), \end{cases} \quad (26)$$

其中 $k = 0, 1, \dots, N$.

最后, 本文将边界条件和路径约束也进行类似的离散化, 可以得到

$$\Phi(\bar{e}(\tau_0), \bar{e}(\tau_N)) = 0, \quad (27)$$

$$B(\bar{e}(\tau_k), \bar{\omega}(\tau_k)) \leq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (28)$$

本文可以发现, 离散化后的式(26)–(28)保证了原系统方程, 边界条件和约束路径(13)–(14)在每个节点处依然是成立的.

第4步 参数优化问题的建立和求解. 综合式(21)–(26)–(28), 本文可以建立一个关于 $\bar{e}$ 和 $\bar{\omega}$ 的参数优化问题. 目标函数:

$$\bar{J}(\bar{e}, \bar{\omega}) = \Psi(\bar{e}(\tau_0), \bar{e}(\tau_N)) + \frac{t_f}{2} \sum_{i=0}^N L(\bar{e}(\tau_k), \bar{\omega}(\tau_k)) \vartheta_k. \quad (29)$$

约束条件:

$$\begin{cases} \|\sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_1(\tau_j) - \frac{t_f}{2} \bar{e}_2(\tau_k)\|_{\infty} \leq \delta, \\ \|\sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_2(\tau_j) - \frac{t_f}{2} (\bar{e}_3(\tau_k) - \frac{k_2 \bar{e}_3(\tau_k) \bar{e}_4^2(\tau_k)}{k_1(1 + \bar{e}_3^2(\tau_k))^{\frac{3}{2}}})\|_{\infty} \leq \delta, \\ \|\sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_3(\tau_j) - \frac{t_f}{2} \bar{e}_4(\tau_k)\|_{\infty} \leq \delta, \\ \|\sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_4(\tau_j) - \frac{t_f}{2} [(1 + \bar{e}_3^2(\tau_k)) \times \\ \sum_{i=0}^N \bar{\omega}(\tau_i) \phi_i(\tau_k) + \frac{2 \bar{e}_3(\tau_k) \bar{e}_4^2(\tau_k)}{1 + \bar{e}_3^2(\tau_k)}]\|_{\infty} \leq \delta, \\ \|\Phi(\bar{e}(\tau_0), \bar{e}(\tau_N))\|_{\infty} \leq \delta, \quad B(\bar{e}(\tau_k), \bar{\omega}(\tau_k)) \leq \delta, \end{cases} \quad (30)$$

其中 $k = 0, 1, \dots, N$. 由约束条件(30)可知, 本文在式(26)–(28)转化的过程中加入了一个松弛参数 δ , 该参数的选取与节点的个数有关. 松弛参数的引入一定程度上保证了优化问题可行解的集合是非空的.

对于上面的参数优化问题(29)–(30), 本文可以采用一些非线性最优化算法进行求解. 假定本文求得该

参数优化问题得到最优解为 $\hat{\bar{e}}, \hat{\bar{\omega}}$, 那么, 根据式(17)–(18), 得到最优控制问题(9)–(11)的伪谱最优控制律

$$\omega^{\text{opt}}(t) = \sum_{k=0}^N \hat{\bar{\omega}}(\tau_k) \phi_k(t), \quad (31)$$

以及相应的最优状态轨迹

$$e_i^{\text{opt}}(t) = \sum_{k=0}^N \hat{\bar{e}}_i(\tau_k) \phi_k(t), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (32)$$

4 仿真研究(Simulations)

在本节中, 通过仿真结果, 进一步说明Chebyshev伪谱最优控制方法对于桥式吊车系统的有效性. 在这里, 本文考虑一个具有约束的最优控制问题.

基于吊车系统(10), 本文考虑如下的性能指标:

$$J(e, \omega) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} e^T e dt, \quad (33)$$

其中 $t_f = 8$ s, 以及相应的路径约束:

$$|F| \leq 2, \quad |q_2(t)| \leq 0.25. \quad (34)$$

根据式(3), 即 F 与 ω 的关系, 可得此时对应的 ω 约束为 $|\omega(t)| \leq 8$ 和 $|e_3(t)| \leq 0.255$.

注2 对于上述的最优控制问题, 本文做出以下分析: 性能指标为状态误差的二次型形式, 为了形式上的美观和分析的便利, 此处并没有先给出原始状态的性能指标从而推出状态误差的性能指标形式. 虽然此处并没有给出原始的 $J(q, F)$ 的形式, 但是根据反坐标变换, 这里的 $J(e, \omega)$ 同样是呈现了吊车快速达到期望位置并且摆角小的最优指标. 第1个约束要求控制输入是有界的, 这一要求在工程应用中是有意义的; 第2个约束保证了吊车摆角在整个过程中被控制在一个很小的范围内, 这是桥式吊车控制的主要目的之一. 由此可见, 该约束最优控制问题是很强的实际工程意义的.

本文吊车系统的参数设置如下: 初始条件为 $(q_1(0), \dot{q}_1(0), q_2(0), \dot{q}_2(0)) = (-2, 0, 0, 0)$; $q_{1d} = 0$ m; $k_1 = 9.8$ m/s²; $k_2 = 1$ m; $m_1 = 1$ kg; $m_2 = 1$ kg. 在Chebyshev伪谱最优控制器设计中, 本文选取200个Chebyshev节点. 相应的仿真结果见图2–6.

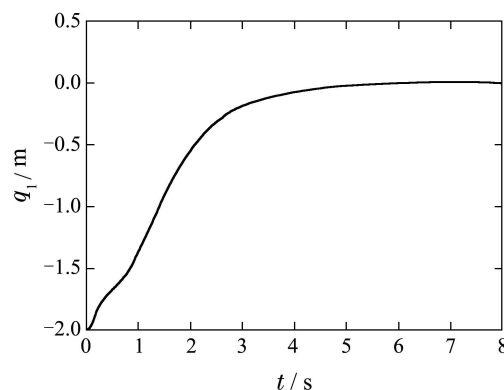


图2 伪谱最优控制下的吊车位移响应曲线

Fig. 2 Position response curve of an overhead crane system with pseudospectral optimal controller

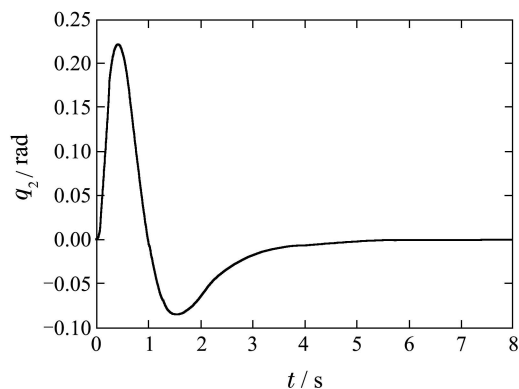


图3 伪谱最优控制下的吊车摆角响应曲线

Fig. 3 Angle response curve of an overhead crane system with pseudospectral optimal controller

图2和图3给出了桥式吊车位移 q_1 和摆角 q_2 的变化曲线. 由图可知, 吊车在5s以后到达期望位置. 同时本文可以发现, 吊车的摆角在整个控制过程中一直落在 ± 0.25 之间, 满足最优问题的路径约束.

图4和图5给出了桥式吊车控制输入 ω 和控制力 F 的变化曲线. 可以发现, 控制输入在开始的一段时间内出现了短暂的切换控制, 这是由于路径约束的原因. 整个最优控制问题性能指标的变化曲线在图6中给出.

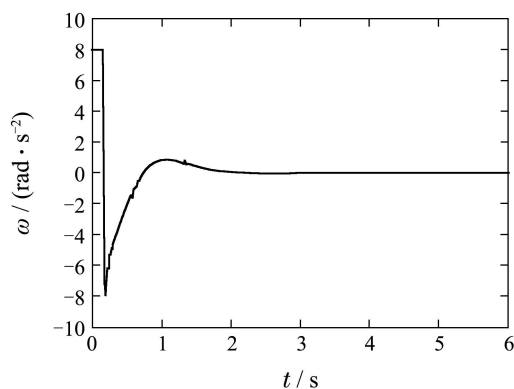


图4 伪谱最优控制下的控制输入曲线

Fig. 4 Control input curve of an overhead crane system with pseudospectral optimal controller

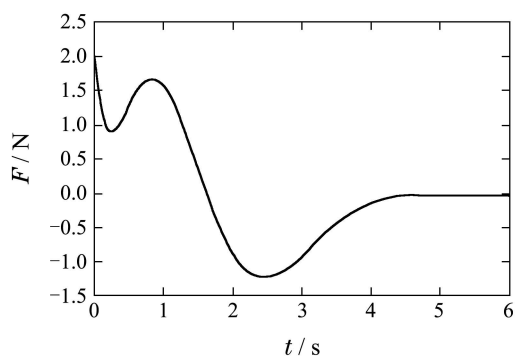


图5 伪谱最优控制下的控制力曲线

Fig. 5 Control force curve of an overhead crane system with pseudospectral optimal controller

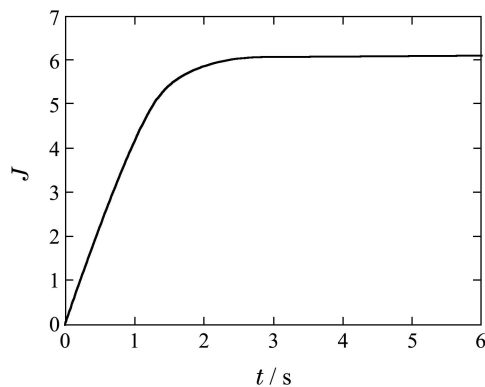


图6 伪谱最优控制下的性能指标曲线

Fig. 6 Performance index curve of an overhead crane system with pseudospectral optimal controller

由图2-6可以看出, 基于Chebyshev伪谱算法设计的最优控制律能够在满足约束条件的前提下, 使得性能指标达到最优, 很好地解决了桥式吊车系统约束优化控制问题.

5 总结(Conclusions)

本文先对桥式吊车系统模型进行一系列的坐标变换, 将其转变为上三角系统形式的误差模型. 然后基于桥式吊车系统的非线性状态误差模型, 对于吊车系统的约束最优控制问题, 设计了Chebyshev伪谱最优控制器. 本文通过应用Chebyshev伪谱优化算法, 将最优控制问题转化成了具有一系列代数约束的参数优化问题. 通过求解离散化后的参数优化问题, 得到了桥式吊车的伪谱最优控制律. 本文在附录中还分析了Chebyshev伪谱优化算法的可行性和一致性, 理论上也给予了证明. 随着节点个数趋向于无穷, Chebyshev伪谱最优解一致地收敛到最优控制问题的精确解. 最后, 在仿真研究中, 针对具有约束的最优控制问题设计了相应的Chebyshev伪谱最优控制器, 验证了上述控制方法对于桥式吊车系统控制的有效性.

致谢 美国加州大学圣克鲁兹分校应用数学与统计学院的宫琪副教授对于本文给出了一些有价值的意见, 在此表示衷心的感谢.

参考文献(References):

- [1] 王伟, 易建强, 赵冬斌. 基于滑模方法的桥式吊车系统抗摆控制 [J]. 控制与决策, 2004, 19(9): 1013 - 1017.
(WANG Wei, YI Jianqiang, ZHAO Dongbin. Anti-swing control of overhead cranes based on sliding-mode method [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(9): 1013 - 1017.)
- [2] 王伟, 易建强, 赵冬斌, 等. 桥式吊车系统的分级滑模控制 [J]. 自动化学报, 2004, 30(5): 784 - 788.
(WANG Wei, YI Jianqiang, ZHAO Dongbin, et al. Hierarchical sliding-mode control method for overhead cranes [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(5): 784 - 788.)
- [3] YI J Q, WANG W, ZHAO D B, et al. Cascade sliding mode controller for large scale underactuated systems [C] // *International Conference*

- on *Intelligent Robots and Systems*. Edmonton, Canada: IEEE, 2005: 301 – 306.
- [4] YANG J H, YANG K S. Adaptive coupling control for overhead crane systems [J]. *Mechatronics*, 2007, 17(2): 143 – 152.
- [5] 马博军, 方勇纯, 王宇韬, 等. 驱动桥式吊车系统自适应控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1105 – 1109.
(MA Bojun, FANG Yongchun, WANG Yutao, et al. Adaptive control for an underactuated overhead crane system [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(6): 1105 – 1109.)
- [6] 刘殿通, 易建强, 谭民. 适于长距离运输的分段吊车模糊控制 [J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 908 – 912.
(LIU Diantong, YI Jianqiang, TAN Min. Two-stage fuzzy control for long-distance transportation of overhead crane [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 908 – 912.)
- [7] KIMIAGHALAM B, HOMAIFAR A, BIKDASH M, et al. Genetic algorithms solution for unconstrained optimal crane control [C] // *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation*. Washington D C, American: IEEE, 1999, 3: 2124 – 2130.
- [8] HU G, ONG C, TEO C. Minimum-time control of a crane with simultaneous traverse and hoisting motions [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2004, 120(2): 395 – 416.
- [9] SCHINDELE D, MENN I, ASCHEMANN H. Nonlinear optimal control of an overhead travelling crane [C] // *The 18th IEEE International Conference on Control Applications & Intelligent Control*. St. Petersburg, Russia: IEEE, 2009, 28: 8 – 10.
- [10] GARNI A, MOUSTAFA K, NIZAMI S. Optimal control of overhead cranes [J]. *Control Engineering Practice*, 1995, 3(9): 1277 – 1284.
- [11] JADDU H, VLACH M. Successive approximation method for nonlinear optimal control problems with application to a container crane problem [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2002, 23(5): 275 – 288.
- [12] ARNOLD E, SAWODNY O, HILDEBRANDT A, et al. Anti-sway system for boom cranes based on an optimal control approach [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Denver, American: IEEE, 2003, 4: 3166 – 3171.
- [13] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERNOI A, et al. *Spectral Method in Fluid Dynamics* [M]. New York: Springer, 1988.
- [14] TREFETHEN L. *Spectral Methods in MATLAB* [M]. Philadelphia: SIAM, 2000.
- [15] ELNAGAR G, KAZEMI M, RAZZAGHI M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(10): 1793 – 1796.
- [16] ELNAGAR G, KAZEMI M. Pseudospectral Chebyshev optimal control of constrained nonlinear dynamical systems [J]. *Computational Optimization and Applications*, 1998, 11(2): 195 – 217.
- [17] FAHROO F, ROSS I. Direct trajectory optimization by a chebyshev pseudospectral method [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2002, 25(1): 160 – 166.
- [18] LU P, SUN H, TSAI B. Closed-loop endoatmospheric ascent guidance [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2003, 26(2): 283 – 294.
- [19] PARIS S, HARGRAVES C. *OTIS 3.0 Manual* [M]. Seattle, WA: Boeing Space and Defense Group, 1996.
- [20] ROSS I, FAHROO F. Issues in the real-time computation of optimal control [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, 43(9): 1172 – 1188.
- [21] GONG Q, ROSS I, KANG W. A unified pseudospectral framework for nonlinear controller and observer design [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. San Antonio, American: IEEE, 2007: 11 – 13.
- [22] GONG Q, ROSS I, KANG W, et al. Convergence of pseudospectral methods for constrained nonlinear optimal control problems [C] // *Proceedings of the IASTED International Conference on Intelligent Systems and Control*. Hawaii, American: ACTA Press, 2004: 209 – 214.
- [23] GONG Q, KANG W, ROSS I. A pseudospectral method for the optimal control of constrained feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(7): 1115 – 1129.
- [24] KANG W, GONG Q, ROSS I, et al. On the convergence of nonlinear optimal control using pseudospectral methods for feedback linearizable systems [J]. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2007, 17(14): 1251 – 1277.
- [25] GONG Q, KANG W, ROSS I. A pseudospectral method for the optimal control of constrained feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(7): 1115 – 1129.
- [26] GONG Q, ROSS I, KANG W, et al. Connections between the covector mapping theorem and convergence of pseudospectral methods for optimal control [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2008, 41(3): 307 – 335.
- [27] TREFETHEN L N. Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis? [J]. *SIAM Review*, 2008, 50(1): 67 – 87.
- [28] GONG Q, ROSS I M, FAHROO F. A Chebyshev pseudospectral method for nonlinear constrained optimal control problems [C] // *The 48th IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai, China: IEEE, 2009: 16 – 18.
- [29] GONG Q, ROSS I M, FAHROO F. Costate computation by a Chebyshev pseudospectral method [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(2): 623 – 628.
- [30] 张晓华, 郭源博. 基于嵌套饱和和方法的吊车系统非线性控制 [J]. 控制工程, 2008, 15(2): 113 – 116.
(ZHANG Xiaohua, GUO Yuanbo. Nonlinear control of overhead crane based on nested saturation approach [J]. *Control Engineering of China*, 2008, 15(2): 113 – 116.)
- [31] XU R, OZGUNER U. Sliding mode control of a class of underactuated systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 233 – 241.
- [32] LIU R, LI S H, DING S H. Nested saturation control for an overhead crane system [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2011, 34(7): 862 – 875.
- [33] LIU R, LI S H. Suboptimal integral sliding mode design for overhead crane systems [J]. *ICIC Express Letters, Part B: Applications*, 2012, 3(4): 759 – 768.

附录 伪谱最优解的可行性和一致性分析 (Appendix The feasibility and correspondence analysis of Chebyshev pseudospectral optimal solution)

注 A1 事实上, 关于伪谱算法的可行性和一致性分析在文献[14, 23]中已给出. 因为对于不同的控制对象, 部分推导有变. 在此, 针对具体的桥式吊车系统优化控制问题, 下面将给出具体的伪谱最优解的可行性和一致性分析.

Chebyshev伪谱算法可行性分析 这里本文将证明参数非线性优化问题(29)–(30)的可行解总是存在的. 首先本文给出以下定义和引理:

定义 A1 设 ξ 为 $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数, 如果对于所有的 $0 \leq j \leq m$, ξ 的 j 阶弱导数 $\xi^{(j)}$ 都落在空间 $L^p[-1, 1]$ 中, 那么本文称 ξ 属于Sobolev空间 $W^{m,p}$.

引理 A1^[7] 对于任意给定的函数 $\xi \in W^{m,p}$, $t \in [-1, 1]$, 存在一个次数不超过 N 的多项式函数 $p^N(t)$, 满足

$$|\xi(t) - p^N(t)| \leq CC_0 N^{-m}, \forall t \in [-1, 1],$$

其中: C 为一个与 N 无关的常数, $C_0 = \|\xi\|_{W^{m,\infty}}$. 进一步地, 若 $p^N(t)$ 使得范数 $\|\xi(t) - p^N(t)\|_{L_\infty}$ 达到最小, 那么在 L_∞ 范数意义下, $p^N(t)$ 为函数 $\xi(t)$ 的 N 阶最优多项式近似.

下面本文通过定理1来说明Chebyshev伪谱算法的可行性. 其中, 引理1将在定理1的证明中被使用.

定理 A1 对于最优控制问题(12)–(14)任意给定的可行解, $t \rightarrow (e, \omega)$, 假定 $x(\cdot) \in W^{m,\infty}$, $m \geq 2$. 设参数优化问题(29)–(30)中的松弛参数 $\delta = (N-1)^{\frac{3}{2}-m}$, 那么, 存在正整数 N_1 , 对于所有 $N > N_1$, 该问题总有可行解 $(\bar{e}, \bar{\omega})$ 存在. 并且, 可行解满足

$$\begin{cases} \bar{\omega}(\tau_k) = \omega(\tau_k), \|\bar{e}(\tau_k) - e(\tau_k)\|_\infty \leq L(N-1)^{1-m}, \\ \forall k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (\text{A1})$$

其中: $\tau_k, k = 0, 1, \dots, N$ 为CGL节点, L 为一个与 N 无关的正常数.

证 令 $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t))^T$. 对于所有的 $i = 1, 2, 3, 4$, $p_i(t)$ 为 $\dot{e}_i(t)$ 在 L_∞ 范数意义下的 $(N-1)$ 阶最优多项式近似. 由引理1可知, 存在一个与 N 无关的常数 C_1 , 使

$$\|\dot{e}(t) - p(t)\|_{L_\infty} \leq C_1(N-1)^{1-m}. \quad (\text{A2})$$

定义

$$e^N(t) = \int_{-1}^1 p(s) ds + e(-1),$$

$$\bar{e}(\tau_k) = e^N(\tau_k), \bar{\omega}(\tau_k) = \omega(\tau_k), k = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{A3})$$

由式(A2), 可以得到

$$\|e(t) - e^N(t)\|_{L_\infty} \leq 2C_1(N-1)^{1-m}. \quad (\text{A4})$$

由此可知, $\bar{e}(\tau_k)$ 和 $e(\tau_k)$ 包含在一个紧集内, 且该紧集的边界与 N 无关.

由于系统方程(13)等号右端的函数是连续可微的, 那么函数在上面的紧集内是Lipschitz连续的. 根据文献[7], 本文可以得到 $\sum_{i=0}^N D_{ki} \bar{e}(\tau_i) = \dot{e}^N(\tau_k)$. 据此, 有

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_1(\tau_j) - \frac{t_f}{2} \bar{e}_2(\tau_k) \right\|_\infty \leq \\ & \|\dot{e}_1^N(\tau_k) - \dot{e}_1(\tau_k)\|_\infty + \|\dot{e}_1(\tau_k) - \frac{t_f}{2} \bar{e}_2(\tau_k)\|_\infty = \\ & \|p_1(\tau_k) - \dot{e}_2(\tau_k)\|_\infty + \frac{t_f}{2} \|e_2(\tau_k) - \bar{e}_2(\tau_k)\|_\infty \leq \\ & C_1(1 + 2C_2)(N-1)^{1-m}, \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

其中 C_2 为Lipschitz常数. 进一步可知, 存在正常数 N_1 , 对于 $N > N_1$, 满足 $C_1(1 + 2C_2)(N-1)^{1-m} \leq \delta$. 与此同时, 本文还可以类似得到如下结果:

$$\left\| \sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_2(\tau_j) - \frac{t_f}{2} (\bar{e}_3(\tau_k) - \frac{k_2 \bar{e}_3(\tau_k) \bar{e}_4^2(\tau_k)}{k_1(1 + \bar{e}_3^2(\tau_k))^{\frac{3}{2}}}) \right\|_\infty \leq \delta, \quad (\text{A6})$$

$$\left\| \sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_3(\tau_j) - \frac{t_f}{2} \bar{e}_4(\tau_k) \right\|_\infty \leq \delta, \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^N D_{kj} \bar{e}_4(\tau_j) - \frac{t_f}{2} ((1 + \bar{e}_3^2(\tau_k)) \sum_{i=0}^N \bar{\omega}(\tau_i) \phi_i(\tau_k) + \right. \\ & \left. \frac{2\bar{e}_3(\tau_k) \bar{e}_4^2(\tau_k)}{1 + \bar{e}_3^2(\tau_k)}) \right\|_\infty \leq \delta. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

因此, $(\bar{e}, \bar{\omega})$ 满足参数优化问题中系统方程的约束. 对于离散化之后的边界条件和路径约束(27)–(28), 函数 Φ 和 C 是连续可微的, 本文可以推出下面的不等式.

$$\|\Phi(\bar{e}(\tau_0), \bar{e}(\tau_N))\|_\infty \leq \delta, \quad (\text{A9})$$

$$B(\bar{e}(\tau_k), \bar{\omega}(\tau_k)) \leq \delta. \quad (\text{A10})$$

综合式子(A5)–(A10)可知, $(\bar{e}, \bar{\omega})$ 满足参数优化问题(29)–(30)的约束条件, 即问题(29)–(30)存在可行解 $(\bar{e}, \bar{\omega})$, 同时, 由(A4)可以推导出(A1). 由此, 定理1得证. 证毕.

根据定理1, 本文可以发现, 最优问题(29)–(30)的解空间是非空且紧的. 同时, 由于性能指标(29)的连续性, 该参数优化问题最优解的存在性得到了进一步地保证.

Chebyshev伪谱算法一致性分析: 在上一分析中, 本文证明了参数优化问题最优解的存在性, 这里本文主要分析Chebyshev伪谱算法的一致性. 下面给出的定理2将具体说明, 随着节点的个数趋向于无穷, 参数优化问题的最优解将收敛到原优化控制问题的最优解.

定理 A2 令 $\{\hat{e}, \hat{\omega}\}_{N=N_1}^\infty$ 为参数优化问题(29)–(30)的最优解序列, 相应的插值函数序列 $\{e^N(\cdot), \omega^N(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ 存在一个子序列一致收敛到 $(e^\infty(\tau_0), q(\cdot), \omega^\infty(\cdot))$, 其中 $q(t)$ 和 $\omega^\infty(t)$ 为 $t \in [-1, 1]$ 上的连续函数. 那么, ω^∞ 为原优化控制问题(12)–(14)的最优控制律. 同时,

$$e^\infty(t) = \int_{-1}^t q(s) ds + e^\infty(-1) \quad (\text{A11})$$

为相应的最优轨迹.

证 由 $\{\hat{e}(\tau_0), \dot{e}^N(\cdot), \omega^N(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ 存在一个子序列一致收敛到 $(e^\infty(\tau_0), q(\cdot), \omega^\infty(\cdot))$, 其中 $q(t)$ 和 $\omega^\infty(t)$ 为 $t \in [-1, 1]$ 上的连续函数可得, 存在子序列 $N_i \in 1, 2, \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\dot{e}^{N_i}(t), \omega^{N_i}(t)) = (q(t), \omega^\infty(t))$$

关于 i 一致成立. 同时可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} e^{N_i}(t) = e^\infty(t), \quad (\text{A12})$$

对于 $t \in [-1, 1]$ 一致成立. 下面的证明将分3步进行: 首先, 本文说明 $(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 为原优化控制问题(12)–(14)的可行解, 接着本文证明参数优化问题的性能指标 $\bar{J}^{N_i}(\hat{e}, \hat{\omega})$ 收敛到原优化控制性能指标 $J(e^\infty(\cdot), \omega^\infty(\cdot))$, 最后本文证明 $(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 为原优化控制问题的最优解.

第1步 为了证明 $(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 为原优化控制问题的可行解, 本文只需要说明, $(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 满足系统方程(13), 边界条件(14)和路径约束(14). 首先证明 $(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 满足系统方程(13), 这里本文采用反证法. 假设存在时间点 $t' \in [-1, 1]$, 使得

$$\dot{e}_1^\infty(t') - \frac{t_f}{2} e_2^\infty(t') \neq 0, \quad (\text{A13})$$

$$\dot{e}_2^\infty(t') - \frac{t_f}{2} (e_3^\infty(t') - \frac{k_2 e_3^\infty(t') e_4^2(t')}{k_1(1 + e_3^{\infty 2}(t'))^{\frac{3}{2}}}) \neq 0, \quad (\text{A14})$$

$$\dot{e}_3^\infty(t') - \frac{t_f}{2} e_4^\infty(t') \neq 0, \quad (\text{A15})$$

$$\dot{e}_4^\infty(t') - \frac{t_f}{2} ((1 + e_3^{\infty 2}(t')) \omega + \frac{2e_3^\infty(t') e_4^{\infty 2}(t')}{1 + e_3^{\infty 2}(t')}) \neq 0. \quad (\text{A16})$$

不失一般性, 这里本文只考虑式(A13), 其余式(A14)–(A16)可类似讨论. 由于CGL节点的稠密性, 那么存在序列 k^{N_i} , 满足

$$0 < k^{N_i} < N_i, \lim_{i \rightarrow \infty} \tau_{k^{N_i}} = t'.$$

又因为 $e^N(t)$ 为 N 阶插值多项式, 对于式(A13)左端而言, 由式(30)有

$$\begin{aligned} \dot{e}_1^\infty(t') - \frac{t_f}{2} \dot{e}_2^\infty(t') &= \lim_{i \rightarrow \infty} (\dot{e}_1^{N_i}(\tau_{k^{N_i}}) - \frac{t_f}{2} \dot{e}_2^{N_i}(\tau_{k^{N_i}})) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (N_i - 1)^{\frac{3}{2}-m} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

因此, 式(A17)与式(A13)矛盾, 其余式(A14)–(A16)可类似讨论推出矛盾. 至此, $(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 满足系统方程(13). 关于边界条件和路径约束的证明可同理得到, 这里本文不再详述. 根据上述分析, 本文可知, $(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 为原优化控制问题的可行解.

第2步 这一步本文证明

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{J}^{N_i}(\hat{e}, \hat{\omega}) = J(e^\infty(\cdot), \omega^\infty(\cdot)),$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{J}^{N_i}(\hat{e}, \hat{\omega}) &= \Psi(\bar{e}(\tau_0), \bar{e}(\tau_{N_i})) + \frac{t_f}{2} \sum_{i=0}^{N_i} L(\bar{e}(\tau_k), \bar{\omega}(\tau_k)) \vartheta_k, \\ J(e^\infty(\cdot), \omega^\infty(\cdot)) &= \Psi(e^\infty(\tau_0), e^\infty(\tau_{N_i})) + \\ &= \frac{t_f}{2} \int_{-1}^1 L(e^\infty(t), \omega^\infty(t)) dt. \end{aligned}$$

由于 $(e^{N_i}(t), \omega^{N_i}(t))$ 一致收敛到 $(e^\infty(\cdot), \omega^\infty(\cdot))$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|e^{N_i}(\tau_k) - e^\infty(\tau_k)\|_\infty &= \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{e}(\tau_k) - e^\infty(\tau_k)\|_\infty &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|\omega^{N_i}(\tau_k) - \omega^\infty(\tau_k)\|_\infty &= \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\omega}(\tau_k) - \omega^\infty(\tau_k)\|_\infty &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

关于 k 一致成立. 根据 $L(e, \omega)$ 是连续可微的. 那么, 存在与 N_i 无关的常数 $M > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \|L(e^\infty(\tau_k), \omega^\infty(\tau_k)) - L(\hat{e}(\tau_k), \hat{\omega}(\tau_k))\|_\infty &\leq \\ M(\|\hat{e}(\tau_k) - e^\infty(\tau_k)\|_\infty + \|\hat{\omega}(\tau_k) - \omega^\infty(\tau_k)\|_\infty). \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

对于所有 $0 \leq k \leq N_i$ 均成立.

进一步, 由于 $L(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 关于 t 是连续的, 由文献[21]可知

$$\int_{-1}^1 L(e^\infty(t), \omega^\infty(t)) dt = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N_i} L(\bar{e}(\tau_k), \bar{\omega}(\tau_k)) \vartheta_k, \quad (\text{A21})$$

$$\Psi(e^\infty(\tau_0), e^\infty(\tau_{N_i})) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Psi(\bar{e}(\tau_0), \bar{e}(\tau_{N_i})). \quad (\text{A22})$$

结合式(A21)–(A22), 即可证明

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{J}^{N_i}(\hat{e}, \hat{\omega}) = J(e^\infty(\cdot), \omega^\infty(\cdot)).$$

第3步 记 $(e^*(t), \omega^*(t))$ 为原优化控制问题的最优解, 且满足 $e^*(t) \in W^{m, \infty}$, $m \geq 2$. 根据定理1, 参数优化问题(29)–(30)存在可行解序列 $\{\bar{e}^N(\cdot), \bar{\omega}^N(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ 一致收敛到 $(e^*(t), \omega^*(t))$. 现在, 由 $(e^*(t), \omega^*(t))$ 和 $(\hat{e}(t), \hat{\omega}^*(t))$ 的最优性可得

$$\begin{aligned} J(e^*(t), \omega^*(t)) &\leq J(e^\infty(t), \omega^\infty(t)) = \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{J}^{N_i}(\hat{e}, \hat{\omega}) &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{J}^{N_i}(\bar{e}, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

由于 $\{\bar{e}^N(\cdot), \bar{\omega}^N(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ 一致收敛到 $(e^*(t), \omega^*(t))$, 类似于第2步中的推导, 可以直接得到

$$J(e^*(t), \omega^*(t)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{J}^{N_i}(\bar{e}, \bar{\omega}). \quad (\text{A24})$$

由式(A23)和式(A24)可以推出

$$J(e^*(t), \omega^*(t)) = J(e^\infty(t), \omega^\infty(t)). \quad (\text{A25})$$

也就是说 $(e^\infty(t), \omega^\infty(t))$ 为使得原优化控制问题性能指标达到最优的可行解. 由此, 定理2得证. 证毕.

定理2说明了参数优化问题(29)–(30)的最优解一致地近似于原最优控制问题的解, 即随着节点的个数趋向于无穷, 参数优化问题的最优解将收敛到原优化控制问题的最优解.

作者简介:

刘熔洁 (1988–), 女, 博士研究生, 研究方向为最优控制, E-mail: liurongjie09@126.com;

李世华 (1975–), 男, 教授, 研究方向为非线性系统的分析与综合, E-mail: lsh@seu.edu.cn.