第 30 卷第 11 期
2013 年 11 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 30 No. 11
Nov. 2013

DOI: 10.7641/CTA.2013.21328

Markov跳变系统的输出反馈鲁棒预测控制

刘晓华†, 吕 娜

(鲁东大学 数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

摘要: 对离散时间Markov跳变系统, 当系统状态不完全可测时, 研究了一类基于输出反馈的鲁棒模型预测控制问题. 所研究系统为准线性参数时变的, 考虑在当前时刻系统的时变参数是已知的, 将来时刻未知的情况. 综合考虑系统存在多胞不确定性和有界噪声等因素, 通过运用线性矩阵不等式方法及变量变换思想, 将无穷时域性能指标的最小最大鲁棒预测控制问题转化为具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 得到了系统的输出反馈控制律. 引入二次有界概念, 在满足输入输出约束的情况下, 保证闭环系统的随机稳定性. 数值算例验证了方法的有效性.

关键词: 模型预测控制; 输出控制; Markov跳变系统; 准线性参数时变; 二次有界; 鲁棒稳定性

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Robust predictive control via output feedback for Markov jump systems

LIU Xiao-hua†, LÜ Na

(College of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai Shandong 264025, China)

Abstract: For the discrete-time Markov jump system, when the states are not all measurable, we develop a robust model-predictive control with output feedback for the system with polytopic uncertainty as well as bounded disturbance. The quasi-linear time-varying parameters of this system are known in values at the current time, but unknown in the future time. By using the linear matrix inequalities and the variable transformation, we convert the min-max robust predictive control problem for infinite horizon performance cost into the optimization problem with linear matrix inequality constraints. By solving this problem, we obtain the output feedback law for closed-loop system. Under the conditions for the input and output, the closed-loop system is stochastically stable in the sense of quadratic boundedness as we defined. Finally, a numerical example is provided to illustrate the effectiveness of the controller.

Key words: model predictive control; output control; Markov jump systems; quasi-linear time-varying parameter; quadratic boundedness; robust stability

1 引言(Introduction)

Markov跳变系统是一类重要的随机系统, 大量的实际过程, 如制造系统、生化系统、电力系统, 以及经济学系统等, 都可以抽象成Markov跳变模型[1]. 因此, Markov跳变系统的控制问题, 受到学术界关注[2–5].

模型预测控制(model predictive control, MPC)具有对模型要求低、可以在线优化、能够处理状态和控制等硬约束的优点, 在工业过程中被广泛采用[6–7]. 考虑到工业过程中不确定性的存在, 在经典MPC的基础上, 人们提出了鲁棒预测控制[8–10]. 随着鲁棒预测控制研究的深入, 随机系统, 特别是Markov跳变系统的鲁棒预测控制, 已成为预测控制研究的一个重要内容[5].

由于实际过程中的状态并非都能够直接测量, 因此, 研究输出反馈的鲁棒预测控制更具有实际意义. 对于线性时变系统, 文献[11]基于线性矩阵不等式(LMI)技术, 提出了鲁棒动态输出反馈MPC方法. 采用参数依赖Lyapunov函数, 保证了闭环系统的稳定性. 文献[8]针对具有多胞不确定性和有界噪声的系统, 将输出反馈控制器参数定义为参数依赖的形式, 降低了控制器设计的保守性. 通过引入辅助优化方法, 减少了在线计算量. 此外, 对于非线性系统, 文献[12]利用之前信息对当前时刻系统进行线性化, 通过优化一个线性二次目标函数, 得到输出反馈模型预测控制器. 针对广义系统, 文献[10]假设在系统具有范数有界的不确定性的前提下, 采用LMI方法及变量变换思想, 将无穷时域优化问题转化为线性规划问题, 确定出可分段连续的输出反馈控制序列, 给出了输出反馈控制律存在的充分条件. 但是, 对于Markov跳变系统的参数依赖动态输出反馈鲁棒预测控制, 研究结果还

收稿日期: 2012−12−31; 收修改稿日期: 2013−05−30.
†通信作者. E-mail: xhliu_yt@sina.com.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174097).

没见到.

本文针对一类具有多胞不确定性和有界噪声的准线性参数时变Markov跳变系统, 给出一种基于输出反馈鲁棒预测控制的综合方法. 采用LMI方法及最小最大鲁棒预测控制设计思想, 将无穷时域性能指标的优化问题转化为线性矩阵不等式约束问题. 基于二次有界[13]概念, 研究闭环系统的随机稳定性. 仿真证明所提出的控制算法的有效性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑离散时间不确定Markov跳变系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(r_k)x(k) + B(r_k)u(k) + \\ \qquad D(r_k)\omega(k), \\ y(k) = C(r_k)x(k) + E(r_k)\omega(k), \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$及$\omega \in \mathbb{R}^{n_\omega}$分别是系统的状态、输入、输出和外部干扰, $\omega(k) \in \varepsilon_{P_\omega}$, $\varepsilon_{P_\omega} = \{\xi : \xi^{\mathrm T} P_\omega \xi \leqslant 1\}$表示关于正定矩阵$P_\omega$的椭圆.

系统(1)的输入、输出约束为

$$-\bar{u} \leqslant u(k) \leqslant \bar{u},\ \ -\bar{\psi} \leqslant \Psi y(k+1) \leqslant \bar{\psi}, \tag{2}$$

其中: 列向量$\bar{u}$, $\bar{\psi}$的元素分别记为$\bar{u}_s > 0$, $\bar{\psi}_t > 0$, $\Psi \in \mathbb{R}^{q \times n_y}$为适当维数的矩阵, $s \in \{1, \cdots, n_u\}$, $t \in \{1, \cdots, q\}$.

假定系统参数$A(r_k)$, $B(r_k)$, $C(r_k)$, $D(r_k)$, $E(r_k)$属于多胞集合$\Omega(r_k)$:

$$\Omega(r_k) = \mathrm{Co}\{[A_l(r_k)|B_l(r_k)|C_l(r_k)|D_l(r_k)|E_l(r_k)]\}. \tag{3}$$

即存在加权系数$\lambda_l(k)$, 使得

$$[A(r_k)|B(r_k)|C(r_k)|D(r_k)|E(r_k)] = \\ \sum_{l=1}^{L} \lambda_l(k) \left[A_l(r_k)|B_l(r_k)|C_l(r_k)|D_l(r_k)|E_l(r_k)\right],$$

其中: $\lambda_l(k) \geqslant 0$, $\sum\limits_{l=1}^{L} \lambda_l(k) = 1$. 考虑$\lambda_l(k)$在当前时刻$k$已知, 下一时刻未知的情况(如果当前时刻$\lambda_l(k)$未知, 可先予以确定[14]). $l \in \{1, \cdots, L\}$, L为多胞的顶点个数.

r_k是取值于有限模态集$M = \{1, 2, \cdots, m\}$的离散时间Markov链, 其一步转移概率可写成$\mathrm{P}(r_{k+1} = b | r_k = a) = \pi_{ab}$, $\pi_{ab} > 0$, $\forall a, b \in M$且$\sum\limits_{b=1}^{m} \pi_{ab} = 1$. 假设跳变转移概率完全已知. 为了简洁起见, 用$A(a)$, $B(a)$, $C(a)$, $D(a)$, $E(a)$分别表示当$r_k = a$, $a \in M$时的$A(r_k)$, $B(r_k)$, $C(r_k)$, $D(r_k)$, $E(r_k)$.

考虑系统(1)–(3)状态不可测, 采用如下依赖于模态的动态输出反馈控制器:

$$\begin{cases} x_{\mathrm c}(i+1|k) = A_{\mathrm c}(r_k)x_{\mathrm c}(i|k) + B_{\mathrm c}(r_k)y(i|k), \\ u(i|k) = C_{\mathrm c}(r_k)x_{\mathrm c}(i|k) + D_{\mathrm c}(r_k)y(i|k), \end{cases} \tag{4}$$

式中: $x_{\mathrm c} \in \mathbb{R}^{n_x}$为控制器的状态, $x_{\mathrm c}(i|k)$表示在当前时刻k对未来$k+i$时刻的$x_{\mathrm c}$的预测值. 控制器参数定义为参数依赖的形式[8]:

$$\begin{cases} A_{\mathrm c}(a) = \sum\limits_{l=1}^{L}\sum\limits_{j=1}^{L} \lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\bar{A}_{\mathrm c}^{lj}(a), \\ B_{\mathrm c}(a) = \sum\limits_{l=1}^{L} \lambda_l(k+i)\bar{B}_{\mathrm c}^{l}(a), \\ C_{\mathrm c}(a) = \sum\limits_{j=1}^{L} \lambda_j(k+i)\bar{C}_{\mathrm c}^{j}(a), \\ D_{\mathrm c}(a) = \bar{D}_{\mathrm c}(a). \end{cases} \tag{5}$$

式(5)中$\bar{A}_{\mathrm c}^{lj}(a)$, $\bar{B}_{\mathrm c}^{l}(a)$, $\bar{C}_{\mathrm c}^{j}(a)$, $\bar{D}_{\mathrm c}(a)$为待求解矩阵. 将式(1)中的$y(k)$代入式(4), 有

$$x_{\mathrm c}(i+1|k) = B_{\mathrm c}(a)C(a)x(i|k) + A_{\mathrm c}(a)x_{\mathrm c}(i|k) + \\ B_{\mathrm c}(a)E(a)\omega(k+i).$$

将式(4)中的$u(i|k)$代入式(1), 又可以得到

$$x(i+1|k) = [A(a) + B(a)D_{\mathrm c}(a)C(a)]\,x(i|k) + \\ B(a)C_{\mathrm c}(a)x_{\mathrm c}(i|k) + \\ [B(a)D_{\mathrm c}(a)E(a) + D(a)]\,\omega(k+i).$$

上述两式可以写成如下的向量形式:

$$\begin{bmatrix} x(i+1|k) \\ x_{\mathrm c}(i+1|k) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} A(a)+B(a)D_{\mathrm c}(a)C(a) & B(a)C_{\mathrm c}(a) \\ B_{\mathrm c}(a)C(a) & A_{\mathrm c}(a) \end{bmatrix} \cdot \\ \begin{bmatrix} x(i|k) \\ x_{\mathrm c}(i|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(a)D_{\mathrm c}(a)E(a)+D(a) \\ B_{\mathrm c}(a)E(a) \end{bmatrix} \omega(k+i).$$

进一步, 把式(5)代入上式, 有

$$\begin{bmatrix} x(i+1|k) \\ x_{\mathrm c}(i+1|k) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} A(a) + B(a)\bar{D}_{\mathrm c}(a)C(a) & B(a)\sum\limits_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)\bar{C}_{\mathrm c}^{j}(a) \\ \sum\limits_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)\bar{B}_{\mathrm c}^{l}(a)C(a) & \sum\limits_{l=1}^{L}\sum\limits_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\bar{A}_{\mathrm c}^{lj}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i|k) \\ x_{\mathrm c}(i|k) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} B(a)\bar{D}_{\mathrm c}(a)E(a) + D(a) \\ \sum\limits_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)\bar{B}_{\mathrm c}^{l}(a)E(a) \end{bmatrix} \omega(k+i). \tag{6}$$

基于$A(a)$, $B(a)$, $C(a)$的多胞描述:

$$A(a) = \sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)A_l(a) = \\ 1 \cdot \sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)A_l(a) =$$

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)A_l(a),$$

$$B(a)=\sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)B_l(a),$$

$$C(a)=\sum_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)C_j(a).$$

式(6)中系数矩阵的元素可以进行规范化处理, 例如:

$$\begin{aligned}&A(a)+B(a)\bar{D}_{\rm c}(a)C(a)=\\&\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)A_l(a)+\\&\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)B_l(a)\bar{D}_{\rm c}(a)C_j(a)=\\&\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\times[A_l(a)+\\&B_l(a)\bar{D}_{\rm c}(a)C_j(a)].\end{aligned}$$

由此, 本文可得到闭环系统

$$\begin{cases}\tilde{x}(i+1|k)=\varPhi(i,k,a)\tilde{x}(i|k)+\varGamma(i,k,a)\times\\ \qquad\omega(k+i),\\ \tilde{x}(0|k)=\tilde{x}(k),\ \forall i\geqslant 0,\end{cases}\tag{7}$$

其中: $\tilde{x}=[x^{\rm T}\ \ x_{\rm c}^{\rm T}]^{\rm T}$,

$$\varPhi(i,k,a)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\varPhi_{lj}(a),$$

$$\varPhi_{lj}(a)=\begin{bmatrix}A_l(a)+B_l(a)\times\bar{D}_{\rm c}(a)C_j(a) & B_l(a)\bar{C}_{\rm c}^j(a)\\ \bar{B}_{\rm c}^l(a)C_j(a) & \bar{A}_{\rm c}^{lj}(a)\end{bmatrix},$$

$$\varGamma(i,k,a)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\varGamma_{lj}(a),$$

$$\varGamma_{lj}(a)=\begin{bmatrix}B_l(a)\bar{D}_{\rm c}(a)E_j(a)+D_l(a)\\ \bar{B}_{\rm c}^l(a)E_j(a)\end{bmatrix}.$$

定义 1[13] 对所有的$\lambda_j(k+i),\omega(k+i)(\sum\limits_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)=1,\omega(k+i)\in\varepsilon_{P_\varepsilon},k\geqslant 0,i\geqslant 0)$, 如果由

$$\tilde{x}^{\rm T}(i|k)Q^{-1}(a)\tilde{x}(i|k)\geqslant 1,$$

可有

$$\begin{aligned}&\tilde{x}^{\rm T}(i+1|k)\bar{Q}^{-1}(b)\tilde{x}(i+1|k)\leqslant\\&\tilde{x}^{\rm T}(i|k)Q^{-1}(a)\tilde{x}(i|k)\end{aligned}$$

成立, 则称闭环系统(7)关于公共的随机Lyapunov矩阵Q^{-1}二次有界. $\bar{Q}^{-1}(b)$表示$r_{k+1}=b$时的随机Lyapunov矩阵, 即$\bar{Q}^{-1}(b)\triangleq\sum\limits_{b\in M}\pi_{ab}Q^{-1}(b)$.

定义 2[15] 如果对所有的初始状态$\tilde{x}(0)\in\mathbb{R}^{n_x}$和初始模态$r_0\in M$,

$$\mathrm{E}\{\sum_{k=0}^{\infty}\|\tilde{x}(k)\|^2|\tilde{x}(0),r_0\}<\infty.$$

成立, 称系统(7)在$\omega\equiv 0$的情况下是随机稳定的.

引理 1[16] 系统(7)在$\omega\equiv 0$时是随机稳定的, 当且仅当存在正定对称矩阵$Q^{-1}(a),a\in M$, 使得如下不等式成立:

$$\varPhi^{\rm T}(i,k,a)\bar{Q}^{-1}(b)\varPhi(i,k,a)-Q^{-1}(a)<0.$$

3 输出反馈鲁棒预测控制(Output feedback based robust predictive control)

对于闭环系统(7), 考虑如下的约束无穷时域二次型性能指标:

$$\begin{cases}\min\limits_{\bar{A}_{\rm c}^{lj}(a),\bar{B}_{\rm c}^{l}(a),\bar{C}_{\rm c}^{j}(a),\bar{D}_{\rm c}(a),\omega(k+i)\in\varepsilon_{P_\omega}}\max J_\infty(k),\\ \text{s.t. 约束(2)},\ \|\tilde{x}(i|k)\|_{Q^{-1}(a)}\geqslant 1,\end{cases}\tag{8}$$

其中$J_\infty(k)=\mathrm{E}\{\sum\limits_{i=0}^{\infty}y^{\rm T}(i|k)R_1(a)y(i|k)+u^{\rm T}(i|k)\cdot R_2(a)u(i|k)\}$加权阵$R_1(a),R_2(a)$是依赖于模态的对称正定矩阵. 选取离散时间随机Lyapunov函数

$$V(\tilde{x}(k),r_k)=\tilde{x}^{\rm T}(k)P(r_k)\tilde{x}(k)=\tilde{x}^{\rm T}(k)P(a)\tilde{x}(k).$$

令$P=\gamma Q^{-1}$. 考虑

$$\begin{aligned}&\|\tilde{x}(i|k)\|^2_{Q^{-1}(a)}-\|\tilde{x}(i+1|k)\|^2_{\bar{Q}^{-1}(b)}\geqslant\\&\frac{1}{\gamma}[\|y(i|k)\|^2_{R_1(a)}+\|u(i|k)\|^2_{R_2(a)}].\end{aligned}\tag{9}$$

假设由式(8)可推出式(9), 即

$$\begin{aligned}&\|\tilde{x}(i|k)\|_{Q^{-1}(a)}\geqslant 1\Rightarrow\\&\|\tilde{x}(i|k)\|^2_{Q^{-1}(a)}-\|\tilde{x}(i+1|k)\|^2_{\bar{Q}^{-1}(b)}\geqslant\\&\frac{1}{\gamma}[\|y(i|k)\|^2_{R_1(a)}+\|u(i|k)\|^2_{R_2(a)}].\end{aligned}\tag{10}$$

将式(9)两端从0到∞进行累加求和并取期望, 可以得到$J_\infty(k)$的一个上界, 这样$\min J_\infty(k)$可以转化为$\min V(\tilde{x}(k),r_k)$. 于是, 有

$$\begin{aligned}&\min_{\gamma,P(a)}\gamma,\\&\text{s.t. }\tilde{x}^{\rm T}(k)P(a)\tilde{x}(k)\leqslant\gamma.\end{aligned}$$

进一步, 由$P(a)=\gamma Q^{-1}(a)>0$, 并利用Schur补引理[9], 最小化$V(\tilde{x}(k),r_k)$可等价为

$$\begin{aligned}&\min_{\gamma,Q^{-1}(a)}\gamma,\\&\text{s.t. }\begin{bmatrix}1 & \tilde{x}^{\rm T}(k)\\ \tilde{x}(k) & Q^{-1}(a)\end{bmatrix}\geqslant 0,\end{aligned}$$

即

$$\tilde{x}(k)\in\varepsilon_{Q^{-1}}.\tag{11}$$

综上, 对于动态输出反馈鲁棒预测控制, 在每一时刻k, 优化问题可转化为如下形式:

$$\begin{cases}\min\limits_{\gamma,Q(a),\bar{A}_{\rm c}^{lj}(a),\bar{B}_{\rm c}^{l}(a),\bar{C}_{\rm c}^{j}(a),\bar{D}_{\rm c}(a),\omega(k+i)\in\varepsilon_{P_\omega}}\max\gamma,\\ \text{s.t. 式(2)(8)(11)}.\end{cases}\tag{12}$$

本文的目的是对于优化问题(12), 求解$A_c(a)$, $B_c(a)$, $C_c(a)$, $D_c(a)$, Q, 使得闭环系统(7)关于公共的随机Lyapunov矩阵Q^{-1}二次有界.

引理 2[13] 对所有的$\lambda_j(k+i)$, $\omega(k+i)$($\sum\limits_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)=1$, $\omega(k+i)\in\varepsilon_{P_\varepsilon}$, $k\geqslant 0$, $i\geqslant 0$), 下述结论等价:

1) 式(7)关于公共的Lyapunov矩阵Q^{-1}二次有界;

2) 存在标量$\alpha\in(0,1)$和对称矩阵Q^{-1}, 满足

$$\varUpsilon(i,k)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\varUpsilon_{lj}\geqslant 0,\quad(13)$$

$$\varUpsilon_{lj}=\begin{bmatrix}(1-\alpha)Q^{-1}(a) & * & * \\ 0 & \alpha P_\omega & * \\ \bar{Q}^{-1}(b)\varPhi_{lj} & \bar{Q}^{-1}(b)\varGamma_{lj} & \bar{Q}^{-1}(b)\end{bmatrix}.$$

矩阵中“$*$”表示对称矩阵中其对称项的转置.

3.1 二次有界分析(Quadratic boundedness analysis)

由于$\omega(k+i)\in\varepsilon_{P_\omega}$, 式(8)与

$$\|\omega(k+i)\|^2_{P_\omega}\leqslant\|\tilde{x}(i|k)\|^2_{Q^{-1}(a)}$$

等价[13]. 从而, 式(9)等价于

$$\|\tilde{x}(i+1|k)\|^2_{\bar{Q}^{-1}(b)}-\|\tilde{x}(i|k)\|^2_{Q^{-1}(a)}\leqslant -\frac{1}{\gamma}[\|y(i|k)\|^2_{R_1(a)}+\|u(i|k)\|^2_{R_2(a)}].\quad(14)$$

结合式(1)(4)–(5)及式(7), 式(14)又等价于

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}(i|k)\\ \omega(k+i)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\varPi_1(i,k,a) & \varPi_2^{\mathrm T}(i,k,a)\\ \varPi_2(i,k,a) & \varPi_3(i,k,a)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\tilde{x}(i|k)\\ \omega(k+i)\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

其中:

$$\varPi_1(i,k,a)=-J_{11}(a)-\gamma(\varPhi_{lj}^{\mathrm T}(a)\bar{Q}^{-1}(b)\varPhi_{lj}(a)-Q^{-1}(a)),$$

$$\varPi_2^{\mathrm T}(i,k,a)=-J_{12}(a)-\gamma\varPhi_{lj}^{\mathrm T}(a)\bar{Q}^{-1}(b)\varGamma_{lj}(a),$$

$$\varPi_3(i,k,a)=-J_{22}(a)-\gamma\varGamma_{lj}^{\mathrm T}(a)\bar{Q}^{-1}(b)\varGamma_{lj}(a),$$

$$J_{11}(a)=\begin{bmatrix}C^{\mathrm T}(a)R_1(a)C(a)+C^{\mathrm T}(a)D_{\mathrm c}^{\mathrm T}(a)\times R_2(a)D_{\mathrm c}(a)C(a) & * \\ C_{\mathrm c}^{\mathrm T}(a)R_2(a)\times D_{\mathrm c}(a)C(a) & C_{\mathrm c}^{\mathrm T}(a)R_2(a)C_{\mathrm c}(a)\end{bmatrix},$$

$$J_{12}(a)=\begin{bmatrix}C^{\mathrm T}(a)R_1(a)E(a)+C^{\mathrm T}(a)D_{\mathrm c}^{\mathrm T}(a)R_2(a)\times D_{\mathrm c}(a)E(a)\\ C_{\mathrm c}^{\mathrm T}(a)R_2(a)D_{\mathrm c}(a)E(a)\end{bmatrix},$$

$$J_{22}(a)=E^{\mathrm T}(a)R_1(a)E(a)+E^{\mathrm T}(a)D_{\mathrm c}^{\mathrm T}(a)R_2(a)D_{\mathrm c}(a)E(a).$$

推导见附录1.

经过上述分析, 可知式(10)左端等价于

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}(i|k)\\ \omega(k+i)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}Q^{-1}(a) & 0\\ 0 & -P_\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}(i|k)\\ \omega(k+i)\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

右端等价于

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}(i|k)\\ \omega(k+i)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\varPi_1(i,k,a) & \varPi_2^{\mathrm T}(i,k,a)\\ \varPi_2(i,k,a) & \varPi_3(i,k,a)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\tilde{x}(i|k)\\ \omega(k+i)\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

由文献[13]知, 式(10)对任何$\tilde{x}(i|k)$及$\omega(k+i)$成立的充要条件是存在常数$\beta>0$, 使得

$$\begin{bmatrix}\varPi_1(i,k,a) & \varPi_2^{\mathrm T}(i,k,a)\\ \varPi_2(i,k,a) & \varPi_3(i,k,a)\end{bmatrix}\geqslant\beta\begin{bmatrix}Q^{-1}(a) & 0\\ 0 & -P_\omega\end{bmatrix}.$$

由Schur补引理, 上式可等价为

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\left\{\varUpsilon_{lj}-\varLambda\gamma^{-1}I\varLambda^{\mathrm T}\right\}\geqslant 0,$$

即

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\begin{bmatrix}\varUpsilon_{lj} & * \\ \varLambda^{\mathrm T} & \gamma I\end{bmatrix}\geqslant 0,\quad(15)$$

其中: $\varLambda=\begin{bmatrix}C_j^{\mathrm T}(a)R_1^{\frac12}(a) & C_j^{\mathrm T}(a)\bar{D}_{\mathrm c}^{\mathrm T}(a)R_2^{\frac12}(a)\\ 0 & \bar{C}_{\mathrm c}^{j\mathrm T}(a)R_2^{\frac12}(a)\\ E_j^{\mathrm T}(a)R_1^{\frac12}(a) & E_j^{\mathrm T}(a)\bar{D}_{\mathrm c}^{\mathrm T}(a)R_2^{\frac12}(a)\end{bmatrix}$, I为具有适当维数的单位矩阵(式(15)的推导见附录2).

因此, 根据引理2, 式(15)保证了闭环系统(7)的二次有界性.

定理 1 如果存在标量α,γ, 矩阵$\hat{A}_{\mathrm c}^{lj}(a)$, $\hat{B}_{\mathrm c}^{l}(a)$, $\hat{C}_{\mathrm c}^{j}(a)$, $\hat{D}_{\mathrm c}(a)$及对称阵$M_1(a)$, $Q_1(a)$, 使得

$$\varUpsilon^a(i,k,a)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\varUpsilon_{lj}^a\geqslant 0\quad(16)$$

成立, 则式(10)与式(16)是等价的. 其中

$$\varUpsilon_{lj}^a=$$

$$\left[\begin{matrix}(1-\alpha)M_1(a) & * \\ (1-\alpha)I & (1-\alpha)Q_1(a)\\ 0 & 0\\ \pounds_1 & \pounds_2\\ \bar{M}_1(b)A_l(a)+\hat{B}_{\mathrm c}^l(a)C_j(a) & \hat{A}_{\mathrm c}^{lj}(a)\\ R_1^{\frac12}(a)C_j(a) & R_1^{\frac12}(a)C_j(a)\bar{Q}_1(b)\\ R_2^{\frac12}(a)\hat{D}_{\mathrm c}(a)C_j(a) & R_2^{\frac12}(a)\hat{C}_{\mathrm c}^j(a)\end{matrix}\right.$$

$$
\left.\begin{matrix}
* & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * \\
\alpha P_\omega & * & * & * & * \\
\pounds_3 & \bar{Q}_1(b) & * & * & * \\
\hat{B}_{\mathrm{c}}^l(a)E_j(a)+\bar{M}_1(b)D_l(a) & I & \bar{M}_1(b) & * & * \\
R_1^{\frac{1}{2}}(a)E_j(a) & 0 & 0 & \gamma I & * \\
R_2^{\frac{1}{2}}(a)\hat{D}_{\mathrm{c}}(a)E_j(a) & 0 & 0 & 0 & \gamma I
\end{matrix}\right],
$$

$\pounds_1 = A_l(a) + B_l(a)\hat{D}_{\mathrm{c}}(a)C_j(a)$,

$\pounds_2 = A_l(a)Q_1(a) + B_l(a)\hat{C}_{\mathrm{c}}^j(a)$,

$\pounds_3 = B_l(a)\hat{D}_{\mathrm{c}}(a)E_j(a) + D_l(a)$.

若式(16)可行, 则式(5)可以表示为

$$
\begin{cases}
\bar{A}_{\mathrm{c}}^{lj}(a)=\bar{M}_2^{-1}(b)[\hat{A}_{\mathrm{c}}^{lj}(a)-\bar{M}_1(b)A_l(a)\bar{Q}_1(b)- \\
\qquad \bar{M}_1(b)B_l(a)\bar{D}_{\mathrm{c}}(a)C_j(a)\bar{Q}_1(b)- \\
\qquad \bar{M}_2^{\mathrm{T}}(b)\bar{B}_{\mathrm{c}}^l(a)C_j(a)\bar{Q}_1(b)- \\
\qquad \bar{M}_1(b)B_l(a)\bar{C}_{\mathrm{c}}^j(a)\bar{Q}_2(b)]\bar{Q}_2^{-1}(b), \\
\bar{B}_{\mathrm{c}}^l(a) = \bar{M}_2^{-\mathrm{T}}(b)[\hat{B}_{\mathrm{c}}^l(a) - \bar{M}_1(b)B_l(a)\bar{D}_{\mathrm{c}}(a)], \\
\bar{C}_{\mathrm{c}}^j(a) = [\hat{C}_{\mathrm{c}}^j(a) - \bar{D}_{\mathrm{c}}(a)C_j(a)\bar{Q}_1(b)]\bar{Q}_2^{-1}(b), \\
\bar{D}_{\mathrm{c}}(a) = \hat{D}_{\mathrm{c}}(a).
\end{cases} \tag{17}
$$

考虑

$$
Q_2^{\mathrm{T}}(a)M_2(a) = I - Q_1(a)M_1(a), \tag{18}
$$

式中$Q_2(a)$, $M_2(a)$为满足式(18)的任意矩阵.

证 令$Q^{-1}(a) = \begin{bmatrix} M_1(a) & M_2^{\mathrm{T}}(a) \\ M_2(a) & M_3(a) \end{bmatrix}$, $Q(a) = \begin{bmatrix} Q_1(a) & Q_2^{\mathrm{T}}(a) \\ Q_2(a) & Q_3(a) \end{bmatrix}$. 显然式(18)成立.

必要性. 假设$Q_2(a), M_2(a)$均为满秩矩阵, 由式(17)变形, 易得

$$
\begin{cases}
\hat{A}_{\mathrm{c}}^{lj}(a) = \bar{M}_2^{\mathrm{T}}(b)\bar{A}_{\mathrm{c}}^{lj}(a)\bar{Q}_2(b)+ \\
\qquad \bar{M}_1(b)A_l(a)\bar{Q}_1(b)+ \\
\qquad \bar{M}_1(b)B_l(a)\bar{D}_{\mathrm{c}}(a)C_j(a)\bar{Q}_1(b)+ \\
\qquad \bar{M}_2^{\mathrm{T}}(b)\bar{B}_{\mathrm{c}}^l(a)C_j(a)\bar{Q}_1(b)+ \\
\qquad \bar{M}_1(b)B_l(a)\bar{C}_{\mathrm{c}}^j(a)\bar{Q}_2(b), \\
\hat{B}_{\mathrm{c}}^l(a) = \bar{M}_1(b)B_l(a)\bar{D}_{\mathrm{c}}(a) + \bar{M}_2^{\mathrm{T}}(b)\bar{B}_{\mathrm{c}}^l(a), \\
\hat{C}_{\mathrm{c}}^j(a) = \bar{D}_{\mathrm{c}}(a)C_j(a)\bar{Q}_1(b) + \bar{C}_{\mathrm{c}}^j(a)\bar{Q}_2(b), \\
\hat{D}_{\mathrm{c}}(a) = \bar{D}_{\mathrm{c}}(a).
\end{cases} \tag{19}
$$

令$T_1(a) = \begin{bmatrix} I & Q_1(a) \\ 0 & Q_2(a) \end{bmatrix}$, $T_2(a) = \begin{bmatrix} I & M_1(a) \\ 0 & M_2(a) \end{bmatrix}$对式(15)分别左乘$\mathrm{diag}\{T_1^{\mathrm{T}}(a), I, \bar{T}_2^{\mathrm{T}}(b)\bar{Q}(b), I, I\}$, 右乘$\mathrm{diag}\{T_1(a), I, \bar{Q}(b)\bar{T}_2(b), I, I\}$结合式(19), 知式(16)成立.

充分性. 由不等式(16), 可知$Q_1(a) - M_1^{-1}(a) > 0$. 在式(18)中, $M_2(a)$和$Q_2(a)$都是满秩的. 否则, 由$Q_1(a) - M_1^{-1}(a) = -Q_2^{\mathrm{T}}(a)M_2(a)M_1^{-1}(a)$知, $Q_1(a) - M_1^{-1}(a)$不满秩, 这与$Q_1(a) - M_1^{-1}(a) > 0$矛盾. 对式(16)分别左乘

$$
\mathrm{diag}\{T_1^{-\mathrm{T}}(a), I, \bar{Q}^{-1}(b)\bar{T}_2^{-\mathrm{T}}(b), I, I\},
$$

右乘

$$
\mathrm{diag}\{T_1^{-1}(a), I, \bar{T}_2^{-1}(b)\bar{Q}^{-1}(b), I, I\},
$$

结合式(17), 得式(15)成立. 证毕.

3.2 约束的转化(Constraint conversion)

考虑如下不等式:

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix}
M_1(a) & * & * & * \\
I & Q_1(a) & * & * \\
0 & 0 & P_\omega & * \\
\hat{D}_{\mathrm{c}}(a)C_j(a) & \hat{C}_{\mathrm{c}}^j(a) & \hat{D}_{\mathrm{c}}(a)E_j(a) & \frac{1}{2}F(a),
\end{bmatrix} \geqslant 0, \\
F_{ss} \leqslant \bar{u}_s^2,\ s \in \{1, \cdots, n_u\},\ j \in \{1, \cdots, L\},
\end{cases} \tag{20}
$$

$$
\begin{cases}
\varUpsilon^h(i,k,a) = \sum\limits_{l=1}^{L}\sum\limits_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\varUpsilon_{lj}^h \geqslant 0, \\
G_{tt}(a) \leqslant \bar{\psi}_t^2,\ t \in \{1, \cdots, q\},\ h \in \{1, \cdots, L\},
\end{cases} \tag{21}
$$

其中:

$$
\varUpsilon_{lj}^h = \begin{bmatrix}
M_1(a) & * & * & * & * \\
I & Q_1(a) & * & * & * \\
0 & 0 & P_\omega & * & * \\
0 & 0 & 0 & P_\omega & * \\
\varPsi C(r_{k+i+1})\pounds_1 & \varPsi C(r_{k+i+1})\pounds_2 & \varPsi C(r_{k+i+1})\pounds_3 & \varPsi E(r_{k+i+1}) & \frac{1}{3}G(a)
\end{bmatrix},
$$

$F_{ss}(G_{tt})$表示矩阵$F(G)$主对角线上第s个元素, $\bar{u}_s^2(\bar{\psi}_t^2)$表示输入(输出)约束向量的第$s$个元素.

定理 2 在每一时刻k, 如果存在标量α, γ, 矩阵$\hat{A}_{\mathrm{c}}^{lj}(a)$, $\hat{B}_{\mathrm{c}}^l(a)$, $\hat{C}_{\mathrm{c}}^j(a)$, $\hat{D}_{\mathrm{c}}(a)$及对称矩阵$M_1(a)$, $Q_1(a)$, $F(a)$, $G(a)$, 使得式(16)(20)–(21)成立. 则式(2)中的$u(k)$, $y(k+1)$满足式(20)–(21).

证 定义ξ_t为q阶单位矩阵的第t行. 则利用式(1)和式(7), 有

$$\max_{i\geqslant 0}|\xi_t\Psi y(i+1|k)|^2 =$$
$$\max_{i\geqslant 0}|\xi_t\Psi\Theta(i,k,a)\times$$
$$[\tilde{x}(i|k)^{\mathrm{T}}\ \ \omega(k+i)^{\mathrm{T}}\ \ \omega(k+i+1)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}|^2 \leqslant$$
$$3\max_{i\geqslant 0}\|\xi_t\Psi\Theta(i,k,a)\mathrm{diag}\{Q^{\frac{1}{2}}(a), P_\omega^{-\frac{1}{2}}, P_\omega^{-\frac{1}{2}}\}\|^2,$$

其中

$$\Theta(i,k,a) = \begin{bmatrix} C(r_{k+i+1})[I\ \ 0]\Phi(i,k,a) \\ C(r_{k+i+1})[I\ \ 0]\Gamma(i,k,a) \\ E(r_{k+i+1}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

如果存在一个对称矩阵$G(a)$, $G_{tt} \leqslant \bar{\psi}_t^2, t \in \{1, \cdots, q\}$使得

$$G(a) - 3\Psi\Theta(i,k,a)\mathrm{diag}\left\{Q(a), P_\omega^{-1}, P_\omega^{-1}\right\} \times$$
$$\Theta^{\mathrm{T}}(i,k,a)\Psi^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \tag{22}$$

则

$$\max_{i\geqslant 0}|\xi_t\Psi y(i+1|k)|^2 \leqslant \max_{i\geqslant 0} G_{tt}(a) \leqslant \max_{i\geqslant 0}\bar{\psi}_t^2,$$

即$|\Psi y(i+1|k)| \leqslant \bar{\psi}, \forall i \geqslant 0$. 利用Schur补引理及多胞描述, 式(22)可等价为

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\Upsilon_{lj}^y \geqslant 0. \tag{23}$$

这里:

$$\Upsilon_{lj}^y = \begin{bmatrix} Q^{-1}(a) & * & * & * \\ 0 & P_\omega & * & * \\ 0 & 0 & P_\omega & * \\ \Psi C(r_{k+i+1})\nu_1 & \Psi C(r_{k+i+1})\nu_2 & \Psi E(r_{k+i+1}) & \dfrac{1}{3}G(a) \end{bmatrix},$$

$$\nu_1 = [A_l(a)+B_l(a)\bar{D}_c(a)C_j(a)\ \ \ B_l(a)\bar{C}_c^j(a)],$$
$$\nu_2 = B_l(a)\bar{D}_c(a)E_j(a) + D_l(a).$$

对式(23)分别左乘$\mathrm{diag}\{T_1^{\mathrm{T}}(a), I, I, I\}$, 右乘$\mathrm{diag}\{T_1(a), I, I, I\}$, 结合式(19), 知式(21)成立. 类似上述证明, 可得式(20)成立.　　证毕.

综合上述分析, 可将优化问题(12)进一步转化为如下形式的优化问题进行求解:

$$\begin{cases} \min\limits_{\alpha,\gamma,Q_1(a),M_1(a),\hat{A}_c^{lj}(a),\hat{B}_c^l(a),\hat{C}_c^j(a),\hat{D}_c(a),F(a),G(a)} \gamma, \\ \text{s.t. 式(11)(16)(20)–(21).} \end{cases} \tag{24}$$

对具有多胞不确定和有界噪声的准线性参数时变Markov跳变系统, 鲁棒MPC的算法如下:

算法 1　离线地选择采样周期T, 初始状态$x(0)$, 初始模态r_0. 在每一时刻$k \geqslant 0$, 求解式(16)(21). 具体如下:

Step 1　选取$M_2(a) = -M_1(a)$, 求解优化问题(24), 得出$\hat{A}_c^{lj}(a)$, $\hat{B}_c^l(a)$, $\hat{C}_c^j(a)$, $\hat{D}_c(a)$等变量;

Step 2　通过式(17)–(18), 解得$\bar{A}_c^{lj}(a)$, $\bar{B}_c^l(a)$, $\bar{C}_c^j(a)$, $\bar{D}_c(a)$;

Step 3　将矩阵$\bar{A}_c^{lj}(a)$, $\bar{B}_c^l(a)$, $\bar{C}_c^j(a)$, $\bar{D}_c(a)$代入式(5), 确定控制器(4)的系数矩阵$A_c(a)$, $B_c(a)$, $C_c(a)$, $D_c(a)$, 并通过式(4)(7), 求出控制输入$u(k) = u(0|k)$;

Step 4　将$A_c(a)$, $B_c(a)$, $C_c(a)$, $D_c(a)$代入式(4), 计算得到在k时刻基于模型(1)的$k+1$时刻的输出反馈控制器状态$x_c(k+1)$;

Step 5　在$k+1$时刻, 重复Step 1–4.

4　鲁棒稳定性(Robust stability)

定理 3　对于系统(1)–(3), 假设优化问题(24)的解为$\hat{A}_c^{lj}(a)$, $\hat{B}_c^l(a)$, $\hat{C}_c^j(a)$, $\hat{D}_c(a)$, 且式(24)在$k=0$时刻可行, $A_c(a)$, $B_c(a)$, $C_c(a)$, $D_c(a)$为由算法1求得的控制器(4)的系数矩阵, 则闭环系统(7)在$\omega \equiv 0$的情况下是随机稳定的.

证　根据定理1, 闭环系统(7)关于公共的随机Lyapunov矩阵Q^{-1}二次有界. 因此, 有

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}(i+1|k)\bar{Q}^{-1}(b)\tilde{x}(i+1|k) -$$
$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}(i|k)Q^{-1}(a)\tilde{x}(i|k) \leqslant 0.$$

将式(7)代入上式, 得

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}(i|k)[\Phi^{\mathrm{T}}(i,k,a)\bar{Q}^{-1}(b)\Phi(i,k,a) -$$
$$Q^{-1}(a)] \times \tilde{x}(i|k) \leqslant 0,$$

进一步有

$$\Phi^{\mathrm{T}}(i,k,a)\bar{Q}^{-1}(b)\Phi(i,k,a) - Q^{-1}(a) \leqslant 0.$$

再由引理1可知, 闭环系统(7)是随机稳定的.

证毕.

5　数值算例(Numerical example)

考虑具有如下系数矩阵的不确定离散Markov跳变系统[5], 跳变模态$r_k = 1, 2$, 其中:

$$A_1(1) = A_1(2) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0539 \\ -0.1078 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_2(1) = A_2(2) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.0539 \\ -0.1078 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1(1) = \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0.0539 \end{bmatrix},\ B_1(2) = \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0.1078 \end{bmatrix},$$

$$B_2(1)=\begin{bmatrix}0.0045\\0.0539\end{bmatrix},\ B_2(2)=\begin{bmatrix}0.0045\\0.1078\end{bmatrix},$$

$$C_1(1)=C_1(2)=C_2(1)=C_2(2)=[0\ \ 1],$$

$$D_1(1)=D_1(2)=D_2(1)=D_2(2)=[0.05\ \ 1]^{\mathrm{T}},$$

$$E_1(1)=E_1(2)=E_2(1)=E_2(2)=0.$$

跳变转移矩阵$P=\begin{bmatrix}0.65 & 0.35\\0.25 & 0.75\end{bmatrix}$. 选取加权矩阵 $R_1(1)=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}$, $R_1(2)=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $R_2(1)=3$, $R_2(2)=1$, $\lambda_1=0.756$, $\lambda_2=0.244$. 输入约束为$|u|\leqslant 0.5$, ω取$[-0.1,0.1]$之间的有界噪声序列. 取$\lambda_1=0.756$, $\lambda_2=0.244$. 采样周期$T=0.1\,\mathrm{s}$, 设系统的初始值为$x(0)=[0\ \ 0.051]^{\mathrm{T}}$, 初始模态$r_0=1$.

根据本文提出的输出反馈鲁棒预测控制算法, 应用LMI Toolbox中的mincx求解器, 可得优化问题(24)的解. 控制器参数矩阵为

$$A_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}-21.7639 & -0.5697\\6.7662 & -0.1985\end{bmatrix},\ B_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}23.0238\\-0.0702\end{bmatrix},$$

$$C_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}-0.6913\\0.0581\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ D_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}-0.2014\\0.1782\end{bmatrix}.$$

从图1–4中可以看出, 在输出反馈控制器作用下, 状态响应达到随机稳定.

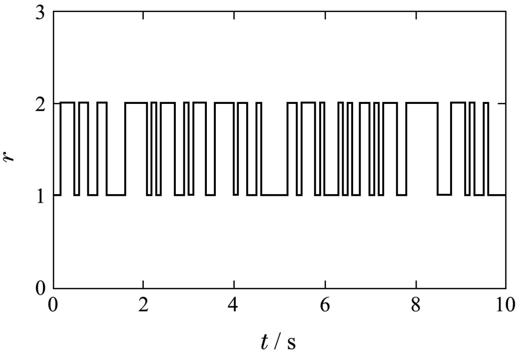

图 1 跳变模态

Fig. 1 Jump modes

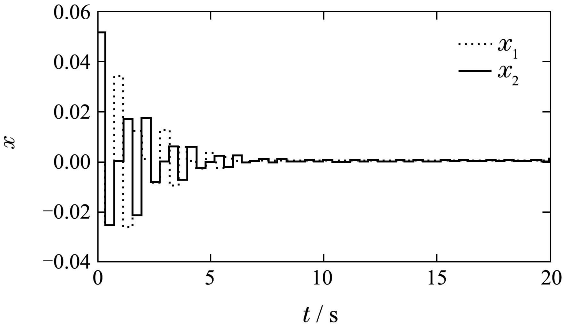

图 2 状态响应

Fig. 2 States response

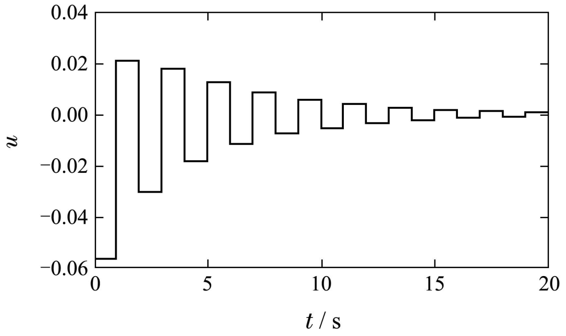

图 3 控制输入

Fig. 3 Control input

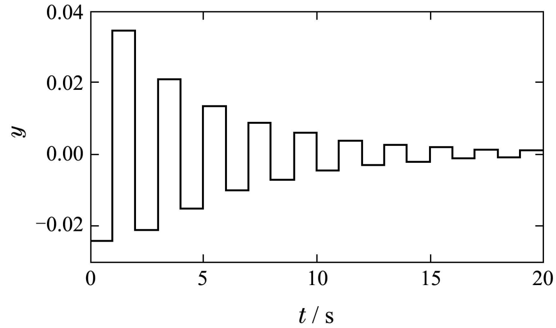

图 4 输出响应

Fig. 4 Output response

6 结论(Conclusions)

本文对具有多胞不确定性和有界噪声的准线性参数时变Markov跳变系统, 提出了参数依赖输出反馈鲁棒模型预测控制问题. 通过求解带有线性矩阵不等式约束的优化问题获得输出反馈控制器. 闭环系统具有二次有界意义下的随机稳定性. 所提方法的有效性通过数值算例进行了验证. 在本文中假设跳变转移概率完全已知, 进一步研究转移概率存在部分未知和完全未知的情况是有意义的.

参考文献(References):

[1] ZHAO H Y, CHEN Q W, XU S Y. H_∞ guaranteed cost control for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent distributed delays and input delays [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2009, 346(10): 945 – 957.

[2] OSWALDO L V, WANDERLEI L. Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems [J]. *Automatica*, 2007, 43(4): 587 – 597.

[3] SHI P, BOUKAS E-K, NGUANG S K. Robust disturbance attenuation for discrete-time active fault tolerant control systems with uncertainties [J]. *Control Application Methods*, 2003, 24(2): 85 – 101.

[4] LI L, UGRINOVSKII V A, ROBERT O. Decentralized robust control of uncertain Markov jump parameter systems via output feedback [J]. *Automatica*, 2007, 43(11): 1932 – 1944.

[5] PARK B G, KWON W H. Robust receding horizon control of discrete-time Markovian jump uncertain systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1229 – 1235.

[6] 席裕庚. 预测控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.
(XI Yugeng. *Predictive Control* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1993.)

[7] QIN S J, BADGWELL T A. A survey of industrial model predictive control technology [J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 11(7): 733 – 764.

[8] DING B C. Constrained robust model predictive control via parameter-dependent dynamic output feedback [J]. *Automatica*, 2010, 46(9): 1517 – 1523.

[9] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.

[10] 刘晓华, 王利杰. 不确定广义系统的输出反馈鲁棒预测控制 [J]. 控制与决策, 2009, 24(9): 371 – 376.
(LIU Xiaohua, WANG Lijie. Robust model predictive control for uncertain singular systems via synamic output feedback [J]. *Control and Decision*, 2009, 24(9): 371 – 376.)

[11] LEE S M, PARK J H. Output feedback model predictive control for LPV systems using parameter dependent Lyapunov function [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 190(1): 671 – 676.

[12] RAHIDEH A, SHAHEED M H. Constrained output feedback model predictive control for nonlinear systems [J]. *Control Engineering Practice*, 2012, 20(4): 431 – 443.

[13] ALESSANDRI A, BAGLIETTO M, BATTISTELLI G. On estimation error bounds for receding-horizon filters using quadratic boundedness [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(8): 1350 – 1355.

[14] DING B C, XIE L H. Dynamic output feedback robust model predictive control with guaranteed quadratic boundedness [C] //*The 2009 Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and the 28th Chinese Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2009: 8034 – 8039.

[15] ZHANG L X, EL-KEBIR BOUKAS. Mode-dependent H∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities [J]. *Automatica*, 2009, 45(6): 1462 – 1467.

[16] CARLOS E S. Constrained robust stability and stabilization of uncertain discrete-time jump linear systems [J]. *IEEE Transations on Automatic Control*, 2006, 51(5): 836 – 841.

附录 1(Appendix 1)

为了简便, 对模态a依赖的矩阵, 在下述推导过程中, 将模态a省略; 对时间依赖的决策变量$\tilde{x}(i|k)$和$\omega(k+i)$简记为$\tilde{x}$和ω; 将$\varPhi(i,k,a)$, $\varGamma(i,k,a)$简记为$\varPhi$, $\varGamma$.

$$
\begin{aligned}
&式(14)左边 = \\
&\tilde{x}^{\mathrm{T}}(i+1|k)\bar{Q}^{-1}(b)\tilde{x}(i+1|k) - \\
&\tilde{x}^{\mathrm{T}}(i|k)Q^{-1}(a)\tilde{x}(i|k) = \\
&[\varPhi\tilde{x}+\varGamma\omega]^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)[\varPhi\tilde{x}+\varGamma\omega] - \tilde{x}^{\mathrm{T}}Q^{-1}\tilde{x} = \\
&\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \omega\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\varPhi^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varPhi-Q^{-1} & *\\ \varGamma^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varPhi & \varGamma^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varGamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \omega\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&式(14)右边 = \\
&-\frac{1}{\gamma}\left[y^{\mathrm{T}}R_1y+u^{\mathrm{T}}R_2u\right] = \\
&-\frac{1}{\gamma}[Cx+E\omega]^{\mathrm{T}}R_1[Cx+E\omega] + \\
&-\frac{1}{\gamma}[C_{\mathrm{c}}x_{\mathrm{c}}+D_{\mathrm{c}}Cx+D_{\mathrm{c}}E\omega]^{\mathrm{T}}R_2[C_{\mathrm{c}}x_{\mathrm{c}}+ \\
&D_{\mathrm{c}}Cx+D_{\mathrm{c}}E\omega].
\end{aligned}
$$

记

$$
\begin{aligned}
&\varDelta_1 = \\
&[Cx+E\omega]^{\mathrm{T}}R_1[Cx+E\omega] = \\
&\begin{bmatrix}x\\ \omega\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}}R_1C & *\\ E^{\mathrm{T}}R_1C & E^{\mathrm{T}}R_1E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \omega\end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix}x\\ x_{\mathrm{c}}\\ \omega\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}}R_1C & * & *\\ 0 & 0 & *\\ E^{\mathrm{T}}R_1C & 0 & E^{\mathrm{T}}R_1E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x_{\mathrm{c}}\\ \omega\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varDelta_2 = \\
&[C_{\mathrm{c}}x_{\mathrm{c}}+D_{\mathrm{c}}Cx+D_{\mathrm{c}}E\omega]^{\mathrm{T}}R_2[C_{\mathrm{c}}x_{\mathrm{c}}+D_{\mathrm{c}}Cx+D_{\mathrm{c}}E\omega] = \\
&\begin{bmatrix}x\\ x_{\mathrm{c}}\\ \omega\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2D_{\mathrm{c}}C & * & *\\ C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2D_{\mathrm{c}}C & C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2C_{\mathrm{c}} & *\\ E^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2D_{\mathrm{c}}C & E^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2C_{\mathrm{c}} & E^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2D_{\mathrm{c}}E\end{bmatrix}\times \\
&[x\ \ x_{\mathrm{c}}\ \ \omega]^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

于是,

$$
\begin{aligned}
&式(14)右边 = \\
&-\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix}x\\ x_{\mathrm{c}}\\ \omega\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}}R_1C+C^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2D_{\mathrm{c}}C & * & *\\ C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2D_{\mathrm{c}}C & C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2C_{\mathrm{c}} & *\\ E^{\mathrm{T}}R_1C+E^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2D_{\mathrm{c}}C & E^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2C_{\mathrm{c}} & E^{\mathrm{T}}R_1E+E^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}R_2D_{\mathrm{c}}E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x_{\mathrm{c}}\\ \omega\end{bmatrix} = \\
&-\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \omega\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}J_{11} & *\\ J_{12}^{\mathrm{T}} & J_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \omega\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

结合式(7), 式(14)等价于

$$
\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \omega\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\varPi_1 & *\\ \varPi_2 & \varPi_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \omega\end{bmatrix}\geqslant 0.
$$

附录 2 式(15)推导过程(Appendix 2 The derivation process of (15))

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\varPi_1 & *\\ \varPi_2 & \varPi_3\end{bmatrix}\geqslant\beta\begin{bmatrix}Q^{-1} & 0\\ 0 & -P_\omega\end{bmatrix}\Leftrightarrow \\
&\begin{bmatrix}\varPi_1-\beta Q^{-1} & *\\ \varPi_2 & \varPi_3+\beta P_\omega\end{bmatrix}\geqslant 0\Leftrightarrow \\
&\begin{bmatrix}-J_{11}-\gamma(\varPhi^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varPhi-Q^{-1})-\beta Q^{-1} & *\\ -J_{12}^{\mathrm{T}}-\gamma\varGamma^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varPhi & -J_{22}-\gamma\varGamma^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varGamma+\beta P_\omega\end{bmatrix}\geqslant 0\Leftrightarrow \\
&\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l\lambda_j\begin{bmatrix}-\bar{J}_{11}-\gamma(\varPhi_{lj}^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varPhi_{lj}-Q^{-1})-\beta Q^{-1} & *\\ -\bar{J}_{12}^{\mathrm{T}}-\gamma\varGamma_{lj}^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varPhi_{lj} & -\bar{J}_{22}-\gamma\varGamma_{lj}^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{-1}(b)\varGamma_{lj}+\beta P_\omega\end{bmatrix}\geqslant 0\Leftrightarrow \\
&\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l\lambda_j\{\begin{bmatrix}(\gamma-\beta)Q^{-1} & 0\\ 0 & \beta P_\omega\end{bmatrix} - \\
&\gamma\begin{bmatrix}\varPhi_{lj}^{\mathrm{T}}\\ \varGamma_{lj}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\bar{Q}^{-1}(b)[\varPhi_{lj}\ \ \varGamma_{lj}] - \begin{bmatrix}\bar{J}_{11} & *\\ \bar{J}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{J}_{22}\end{bmatrix}\}\geqslant 0\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l\lambda_j\{\begin{bmatrix}(1-\frac{\beta}{\gamma})Q^{-1} & 0\\ 0 & \frac{\beta}{\gamma}P_\omega\end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix}\Phi_{lj}^{\mathrm T}\bar Q^{-1}(b)\\ \Gamma_{lj}^{\mathrm T}\bar Q^{-1}(b)\end{bmatrix}\bar Q(b)[\bar Q^{-1}(b)\Phi_{lj}\ \ \bar Q^{-1}(b)\Gamma_{lj}]-$$

$$\gamma^{-1}\begin{bmatrix}\bar J_{11} & *\\ \bar J_{12}^{\mathrm T} & \bar J_{22}\end{bmatrix}\}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l\lambda_j\{\begin{bmatrix}(1-\frac{\beta}{\gamma})Q^{-1} & * & *\\ 0 & \frac{\beta}{\gamma}P_\omega & *\\ \bar Q^{-1}(b)\Phi_{lj} & \bar Q^{-1}(b)\Gamma_{lj} & \bar Q^{-1}(b)\end{bmatrix}-$$

$$\gamma^{-1}\begin{bmatrix}C_j^{\mathrm T}R_1C_j+C_j^{\mathrm T}\bar D_{\mathrm c}^{\mathrm T}R_2\bar D_{\mathrm c}C_j & * & *\\ \bar C_{\mathrm c}^{j\mathrm T}R_2\bar D_{\mathrm c}C_j & \bar C_{\mathrm c}^{j\mathrm T}R_2\bar C_{\mathrm c}^{j} & *\\ E_j^{\mathrm T}R_1C_j+E_j^{\mathrm T}\bar D_{\mathrm c}^{\mathrm T}R_2\bar D_{\mathrm c}C_j & E_j^{\mathrm T}\bar D_{\mathrm c}^{\mathrm T}R_2\bar C_{\mathrm c}^{j} & E_j^{\mathrm T}R_1E_j+E_j^{\mathrm T}\bar D_{\mathrm c}^{\mathrm T}R_2\bar D_{\mathrm c}E_j\end{bmatrix}\}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l\lambda_j\{\begin{bmatrix}(1-\frac{\beta}{\gamma})Q^{-1} & * & *\\ 0 & \frac{\beta}{\gamma}P_\omega & *\\ \bar Q^{-1}(b)\Phi_{lj} & \bar Q^{-1}(b)\Gamma_{lj} & \bar Q^{-1}(b)\end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix}C_j^{\mathrm T}R_1^{\frac12} & C_j^{\mathrm T}\bar D_{\mathrm c}^{\mathrm T}R_2^{\frac12}\\ 0 & \bar C_{\mathrm c}^{j\mathrm T}R_2^{\frac12}\\ E_j^{\mathrm T}R_1^{\frac12} & E_j^{\mathrm T}\bar D_{\mathrm c}^{\mathrm T}R_2^{\frac12}\end{bmatrix}\gamma^{-1}I\times$$

$$\begin{bmatrix}R_1^{\frac12}C_j & 0 & R_1^{\frac12}E_j\\ R_2^{\frac12}\bar D_{\mathrm c}C_j & R_2^{\frac12}\bar C_{\mathrm c}^{j} & R_2^{\frac12}\bar D_{\mathrm c}E_j\end{bmatrix}\}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\lambda_l\lambda_j\begin{bmatrix}(1-\frac{\beta}{\gamma})Q^{-1} & * & * & * & *\\ 0 & \frac{\beta}{\gamma}P_\omega & * & * & *\\ \bar Q^{-1}(b)\Phi_{lj} & \bar Q^{-1}(b)\Gamma_{lj} & \bar Q^{-1}(b) & * & *\\ R_1^{\frac12}C_j & 0 & R_1^{\frac12}E_j & \gamma I & *\\ R_2^{\frac12}\bar D_{\mathrm c}C_j & R_2^{\frac12}\bar C_{\mathrm c}^{j} & R_2^{\frac12}\bar D_{\mathrm c}E_j & 0 & \gamma I\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

令$\alpha=\dfrac{\beta}{\gamma}$, 可得式(15)成立.

作者简介:

刘晓华 (1959–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为预测控制、自适应控制理论及应用等, E-mail: xhliu_yt@sina.com;

吕 娜 (1986–), 女, 硕士研究生, 研究方向为预测控制, E-mail: lvna.6666@163.com.