第 31 卷第 4 期
2014 年 4 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 31 No. 4
Apr. 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.30020

一类3–D非线性系统的稳定性分析及函数观测器设计

王　璐[1], 徐慧玲[2†]

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 2. 南京理工大学 理学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 本文首先研究了一类3–D非线性系统的稳定性问题, 在此基础上, 利用秩条件和线性矩阵不等式(LMI)方法, 得到了这类系统的渐近函数观测器存在的充分条件, 并给出了函数观测器的设计方法. 最后, 通过算例来说明这种方法是可行且有效的.

关键词: 3–D系统; 非线性系统; LMI方法; 函数观测器

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Stability analysis and design of functional observers for a class of three-dimensional nonlinear systems

WANG Lu[1], XU Hui-ling[2†]

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
2. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: This paper firstly studies the stability condition for a class of three-dimensional (3–D) nonlinear systems, and based on this, a sufficient condition for the existence of an asymptotic functional observer is given in terms of a rank condition and a linear matrix inequality (LMI). A systematic design method is then presented for the design of functional observers. Finally, two examples are provided to illustrate the effectiveness of the proposed design method.

Key words: 3–D systems; nonlinear systems; linear matrix inequality (LMI); functional observers

1　引言(Introduction)

在最近几十年中, 多维系统在图像处理, 医学应用, 热处理等许多领域的应用越来越广泛, 这吸引了越来越多的关注和重视[1–3]. 对于多维系统的研究, 通常是建立在Roesser模型及Fornasini-Marchedini模型等传统模型的基础上, 但是在最近数年, 空间连接系统模型也受到越来越多的关注[4]. 在以传统模型描述的线性系统领域里, 状态估计和观测器设计问题一直都是重要课题, 已经有了相当的发展[5], 特别是2–D系统, 取得了很多的成果. 文献[6–7]从频域的角度分别提出了渐近观测器和未知输入观测器的设计方法; 文献[8]运用几何理论研究了未知输入函数观测器问题; 文献[9]利用秩条件和LMI方法给出了2–D FMII 模型的渐近函数观测器的设计方法, 文献[10]研究了2–D FMII 模型的未知输入观测器的设计方法.

在实际系统中, 非线性因素是普遍存在的, 但是对于非线性系统的研究相对比较复杂, 尤其对于多维非线性系统, 研究起来更为困难. 文献[11]研究了具有溢出非线性的2–D系统的稳定性条件. 最近, 文献[12]在文献[11]的基础上, 研究了一类2–D非线性系统的未知输入观测器的设计问题, 使得对于2–D非线性系统的研究更进一步. 然而对于更高维非线性系统的观测器的设计问题, 目前尚未见文献报道, 主要困难在于稳定性分析方面. 本文通过对高维非线性系统边界条件的分析, 得到了一类3–D非线性系统的稳定性条件, 并在此基础上借鉴文献[9]的方法给出了此类系统函数观测器设计方法.

在本文中, 对于对称矩阵X, Y, 记号$X > Y$表示矩阵$X - Y$为正定矩阵, I是具有适当维数的单位阵, 上标“T”表示矩阵的转置. 简便起见, 本文用“$*$”表示对称矩阵的对称块, A^+表示矩阵A的伪逆, $\mathrm{diag}\{\cdot\}$表示一个块对角矩阵. 如果没有特殊说明, 文中的矩阵都假定具有合适的维数.

2　问题的描述(Problem statement)

考虑如下的3–D非线性系统:

$$\begin{aligned}(\Sigma):\ & x_{k+1,l+1,m+1} = \\ & A_1x_{k,l+1,m+1} + A_2x_{k+1,l,m+1} + \\ & A_3x_{k+1,l+1,m} + B_1u_{k,l+1,m+1} + \\ & B_2u_{k+1,l,m+1} + B_3u_{k+1,l+1,m} +\end{aligned}$$

收稿日期: 2013－01－07; 录用日期: 2013－11－12.
†通信作者. E-mail: xuhuiling@njust.edu.cn; Tel.: +86 13770621818.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174137).

$$Lf(\zeta_{k,l+1,m+1},\zeta_{k+1,l,m+1},\zeta_{k+1,l+1,m}),\quad (1)$$

$$y_{k,l,m}=Cx_{k,l,m},\quad (2)$$

$$\zeta_{k,l,m}=Dx_{k,l,m},\quad (3)$$

其中: $x_{k,l,m}\in\mathbb{R}^n$为局部状态向量; $u_{k,l,m}\in\mathbb{R}^p$和$y_{k,l,m}\in\mathbb{R}^q$分别为已知输入和测量输出; $\zeta_{k,l,m}\in\mathbb{R}^r$为待估的函数向量, 且$r\leqslant n$; A_i,$B_i(i=1,2,3)$, L, D和C均为适当维数的实矩阵. 不失一般性, 假定C和D为行满秩矩阵. 另外, $f(\zeta_{k,l+1,m+1},\zeta_{k+1,l,m+1},\zeta_{k+1,l+1,m})$为非线性项, 满足如下的假设:

假设 1 设$f(\zeta_{k,l+1,m+1},\zeta_{k+1,l,m+1},\zeta_{k+1,l+1,m})$满足下面的条件:

$$\begin{aligned}&\|f(\zeta^1_{k,l+1,m+1},\zeta^1_{k+1,l,m+1},\zeta^1_{k+1,l+1,m})-\\&f(\zeta^2_{k,l+1,m+1},\zeta^2_{k+1,l,m+1},\zeta^2_{k+1,l+1,m})\|\leqslant\\&\lambda_1\|\zeta^1_{k,l+1,m+1}-\zeta^2_{k,l+1,m+1}\|+\\&\lambda_2\|\zeta^1_{k+1,l,m+1}-\zeta^2_{k+1,l,m+1}\|+\\&\lambda_3\|\zeta^1_{k+1,l+1,m}-\zeta^2_{k+1,l+1,m}\|,\end{aligned}$$

其中: $\lambda_i>0,\ i=1,2,3,$

$$\zeta^i_{k,l+1,m+1},\zeta^i_{k+1,l,m+1},\zeta^i_{k+1,l+1,m}\in\mathbb{R}^r,\ i=1,2.$$

对于系统(Σ), 假定边界条件为: 存在3个正整数M_1, M_2和M_3, 使得

$$\begin{cases}x_{0,l,m}=0,\ \ l+m\geqslant M_1,\\x_{k,0,m}=0,\ k+m\geqslant M_2,\\x_{k,l,0}=0,\ \ k+l\geqslant M_3.\end{cases}\quad (4)$$

本文首先研究满足假设1的3–D非线性系统(Σ)在边界条件(4)下的稳定性问题, 并且在此基础上给出此类系统的函数观测器的设计方法.

3 3–D系统的稳定性分析(Stability analysis of 3–D systems)

本节研究3–D非线性系统(Σ)的稳定性问题. 首先, 考虑如下的3–D非线性系统(Σ_0):

$$\begin{aligned}&x_{k+1,l+1,m+1}=\\&F(x_{k,l+1,m+1},x_{k+1,l,m+1},x_{k+1,l+1,m})=\\&A_1x_{k,l+1,m+1}+A_2x_{k+1,l,m+1}+A_3x_{k+1,l+1,m}+\\&Lf(\zeta_{k,l+1,m+1},\zeta_{k+1,l,m+1},\zeta_{k+1,l+1,m}),\end{aligned}\quad (5)$$

其中: $\zeta_{k,l,m}$如式(3)所确定, 初始条件同(4).

参考文献[1], 首先给出以下定义:

定义 1 称点x_e为系统(Σ_0)的平衡点, 如果点$x_\mathrm{e}\in\mathbb{R}^n$满足$x_\mathrm{e}=F(x_\mathrm{e},x_\mathrm{e},x_\mathrm{e})$. 进而, 如果存在一个实数$r>0$, 使得开球

$$B(x_\mathrm{e},r):=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-x_\mathrm{e}\|<r\}$$

只包含x_e一个平衡点, 则称点x_e为孤立平衡点.

不失一般性, 假设$x_\mathrm{e}=0$且为孤立平衡点.

定义 2 称系统(Σ_0)的平衡点$x_\mathrm{e}=0$是稳定的(李雅普诺夫意义下), 如果对于任意的$\epsilon>0$, 都存在一个$\delta=\delta(\epsilon)>0$, 使得对于所有的$k,l,m\geqslant 0$, 当初始状态满足

$$\begin{cases}\|x_{0,l,m}\|<\delta,\ 0\leqslant l+m\leqslant M_1,\\\|x_{k,0,m}\|<\delta,\ 0\leqslant k+m\leqslant M_2,\\\|x_{k,l,0}\|<\delta,\ \ 0\leqslant k+l\leqslant M_3,\end{cases}\quad (6)$$

都有$\|x_{k,l,m}\|<\epsilon$, 其中M_1,M_2,M_3同式(4).

定义 3 称系统(Σ_0)的平衡点$x_\mathrm{e}=0$是全局渐近稳定的, 如果x_e是稳定的, 并且对于满足初始条件(4)的系统(Σ_0)有$\lim\limits_{k+l+m\to\infty}x_{k,l,m}=0$.

定义 4[7] 称连续函数$\phi:[0,r]\to\mathbb{R}^+:=[0,\infty)$(或者, $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$)为$K$函数, 即$\phi\in K$. 如果满足$\phi(0)=0$且在$[0,r]$上(或者在$\mathbb{R}^+$上)是严格递增的. 如果$\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $\phi\in K$, 且$\lim\limits_{r\to\infty}\phi(r)=\infty$, 则称$\phi$为$KR$函数.

定义 5[7] 称连续函数$v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为正定函数, 如果$v$满足

1) $v(0)=0$;

2) 存在一个$\phi\in K$, 使得对于所有的$x\in B(r)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<r\}(r>0)$, 都有$v(x)\geqslant\phi(\|x\|)$.

下面给出后面将会用到的引理.

引理 1[13] 对于任意的$x,y\in\mathbb{R}^n$和正定矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 都有

$$2x^\mathrm{T}y\leqslant x^\mathrm{T}Px+y^\mathrm{T}P^{-1}y.$$

为了分析系统(Σ_0)的平衡点$x_\mathrm{e}=0$的稳定性, 特做如下假设.

假设 2 假定系统(Σ_0)存在一个正定且径向无界的函数$V(x_{k,l,m}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 并且使得对于所有的$[x^\mathrm{T}_{k,l+1,m+1},x^\mathrm{T}_{k+1,l,m+1},x^\mathrm{T}_{k+1,l+1,m}]^\mathrm{T}\neq 0$, 都有

$$\begin{aligned}&\varDelta V(k,l,m):=\\&V(F(x_{k,l+1,m+1},x_{k+1,l,m+1},x_{k+1,l+1,m}))-\\&\alpha V(x_{k,l+1,m+1})-\beta V(x_{k+1,l,m+1})-\\&\gamma V(x_{k+1,l+1,m})<0,\end{aligned}\quad (7)$$

其中: $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$, 并且满足$\alpha+\beta+\gamma=1$, $F(x_{k,l+1,m+1},x_{k+1,l,m+1},x_{k+1,l+1,m})$如式(5)所示.

引理 2 假定系统(Σ_0)的边界条件如式(4)(6)所确定, 则对任意的$\varepsilon>0$, 可以找到一个$\delta>0$, 使得

$$\max_{0\leqslant d\leqslant\max\{M_1,M_2,M_3\}}\{\sum_{(k,l,m)\in D(d)}V(x_{k,l,m})\}<\varepsilon,$$

其中函数V满足假设(2). d是任一正整数, $D(d)$做如下定义:

$$D(d):=\{(k,l,m):k+l+m=d,k,l,m\geqslant 0\}.\quad (8)$$

证　首先, 假定系统(Σ_0)的边界条件如式(4)所确定的那样, 并且对于$\delta_1>0$, 当$0\leqslant l+m\leqslant M_1$时, 有$\|x_{0,l,m}\|<\delta_1$; 当$0\leqslant k+m\leqslant M_2$时, 有$\|x_{k,0,m}\|<\delta_1$; 当$0\leqslant k+l\leqslant M_3$时, 有$\|x_{k,l,0}\|<\delta_1$. 接下来将证明对任意的$d>0$, 都有

$$\max_{(k,l,m)\in D(d)}\|x_{k,l,m}\|\leqslant(3a)^{d-1}\delta_1. \tag{9}$$

要证明式(9), 只需考虑$k,l,m>0$的情况, 因为当k,l,m有一个为零时, 都有$\|x_{k,l,m}\|\leqslant\delta_1$. 因此可知, 当$d=1$时, 式(9)成立. 假定当$d=t$时, 式(9)成立, 即

$$\max_{(k,l,m)\in D(t)}\|x_{k,l,m}\|\leqslant(3a)^{t-1}\delta_1. \tag{10}$$

注意到当$d=t+1$时,

$$\{(k-1,l,m),(k,l-1,m),(k,l,m-1)\}\in D(t),$$

因此, 对任意$(k,l,m)\in D(t+1), k,l,m>0$, 都有

$$\begin{aligned}&\|x_{k,l,m}\|=\\&\|A_1x_{k-1,l,m}+A_2x_{k,l-1,m}+A_3x_{k,l,m-1}+\\&Lf(\zeta_{k-1,l,m},\zeta_{k,l-1,m},\zeta_{k,l,m-1})\|\leqslant\\&(\|A_1\|+\lambda_1\|L\|\|D\|)\|x_{k-1,l,m}\|+\\&(\|A_2\|+\lambda_2\|L\|\|D\|)\|x_{k,l-1,m}\|+\\&(\|A_3\|+\lambda_3\|L\|\|D\|)\|x_{k,l,m-1}\|.\end{aligned} \tag{11}$$

令$a=\max\{1,(\|A_i\|+\lambda_i\|L\|\|D\|)\}(i=1,2,3)$, 可以得到

$$\begin{aligned}&\|x_{k,l,m}\|\leqslant\\&a(\|x_{k-1,l,m}\|+\|x_{k,l-1,m}\|+\|x_{k,l,m-1}\|)\leqslant\\&3a\cdot(3a)^{t-1}\delta_1=(3a)^{d-1}\delta_1.\end{aligned} \tag{12}$$

因此, 对任意的$d>0$, 式(9)成立. 故对所有的$0\leqslant d\leqslant\max\{M_1,M_2,M_3\}$, 有

$$\max_{(k,l,m)\in D(d)}\|x_{k,l,m}\|\leqslant(3a)^{T-2}\delta_1,$$

其中$T=\max\{M_1,M_2,M_3\}+1$. 对于给定的$\varepsilon>0$, 能够找到一个$\delta_2>0$, 使得当$\|x_{k,l,m}\|<\delta_2$时, 有$V(x_{k,l,m})<\varepsilon/T$. 选择

$$\delta=\min\{\delta_1,\frac{\delta_2}{(3a)^{T-2}}\},$$

那么, $\|x_{0,l,m}\|<\delta(0\leqslant l+m\leqslant M_1)$, $\|x_{k,0,m}\|<\delta$ $(0\leqslant k+m\leqslant M_2)$和$\|x_{k,l,0}\|<\delta(0\leqslant k+l\leqslant M_3)$就意味着

$$\max_{0\leqslant d\leqslant\max\{M_1,M_2,M_3\}}\{\max_{(k,l,m)\in D(d)}\|x_{k,l,m}\|\}\leqslant\delta_2.$$

进一步推导可以得出

$$\max_{0\leqslant d\leqslant\max\{M_1,M_2,M_3\}}\{\sum_{(k,l,m)\in D(d)}V(x_{k,l,m})\}<\varepsilon.$$

证毕.

根据上面的结论, 可以得出下面的定理.

定理 1　如果假设式(2)成立, 3–D非线性系统(Σ_0)的平衡点$x_\mathrm{e}=0$是全局渐近稳定的.

证　首先, 假定存在一个正定且径向无界的函数$V(x_{k,l,m}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 使得对于所有的$[x^\mathrm{T}_{k,l+1,m+1}, x^\mathrm{T}_{k+1,l,m+1}, x^\mathrm{T}_{k+1,l+1,m}]^\mathrm{T}\neq0$, 有

$$\begin{aligned}&\Delta V(k,l,m)=\\&V(F(x_{k,l+1,m+1},x_{k+1,l,m+1},x_{k+1,l+1,m}))-\\&\alpha V(x_{k,l+1,m+1})-\beta V(x_{k+1,l,m+1})-\\&\gamma V(x_{k+1,l+1,m})<0,\end{aligned}$$

其中: $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$且满足$\alpha+\beta+\gamma=1$. 故

$$\begin{aligned}&V(x_{k+1,l+1,m+1})=\\&V(F(x_{k,l+1,m+1},x_{k+1,l,m+1},x_{k+1,l+1,m}))<\\&\alpha V(x_{k,l+1,m+1})+\beta V(x_{k+1,l,m+1})+\\&\gamma V(x_{k+1,l+1,m}).\end{aligned} \tag{13}$$

对任意$d\geqslant\max\{M_1,M_2,M_3\}$, 由式(13) 并考虑到

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta+\gamma=1,\\&x(0,d,1)=x(d,0,1)=x(0,1,d)=\\&x(1,0,d)=x(1,d,0)=x(d,1,0)=\\&x(0,1,d-1)=x(0,d-1,1)=x(1,d-1,0)=\\&x(1,0,d-1)=x(d-1,1,0)=x(d-1,0,1)=0,\end{aligned}$$

可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{(k,l,m)\in D(d)}V(x_{k,l,m})=\\&\alpha V(x_{0,1,d-1})+\beta V(x_{1,0,d-1})+\gamma V(x_{1,1,d-2})+\\&\alpha V(x_{0,2,d-2})+\beta V(x_{1,1,d-2})+\gamma V(x_{1,2,d-3})+\\&\cdots+\alpha V(x_{0,d-1,1})+\beta V(x_{1,d-2,1})+\\&(\gamma+\alpha+\beta)V(x_{1,d-1,0})+\cdots+\beta V(x_{d-1,0,1})+\\&\gamma V(x_{d-1,1,0})+(\alpha+\beta)V(x_{d-1,1,0})+\\&(\alpha+\gamma)V(x_{d-1,0,1})+V(x_{d,0,0})\geqslant\\&V(x_{1,1,d-1})+V(x_{1,2,d-2})+\cdots+V(x_{1,d-1,1})+\\&V(x_{2,1,d-2})+V(x_{2,2,d-3})+\cdots+V(x_{2,d-2,1})+\\&V(x_{3,1,d-3})+V(x_{3,2,d-4})+\cdots+V(x_{3,d-3,1})+\\&\cdots+V(x_{d-2,1,2})+V(x_{d-2,2,1})+V(x_{d-1,1,1})=\\&\sum_{k+l+m=d+1}V(x_{k,l,m}).\end{aligned} \tag{14}$$

由此可得出

$$\lim_{k+l+m\to\infty}x_{k,l,m}=0. \tag{15}$$

考虑任意给定的$\varepsilon>0$. 由于V是径向无界的正定函数, 故存在一个函数$\phi_1\in KR$使得对所有满足$\|x\|<\varepsilon+1$的x, 都有$V(0)=0$且$V(x)\geqslant\phi_1(\|x\|)$. 根据引理2, 可以选取一个足够小的$\delta>0$, 使得当

$\|x_{0,l,m}\| < \delta(0 \leqslant l+m \leqslant M_1)$, $\|x_{k,0,m}\| < \delta(0 \leqslant k+m \leqslant M_2)$和$\|x_{k,l,0}\| < \delta(0 \leqslant k+l \leqslant M_3)$时,

$$\max_{0\leqslant d\leqslant \max\{M_1,M_2,M_3\}}\{\sum_{(k,l,m)\in D(d)} V(x_{k,l,m})\} < \phi_1(\varepsilon). \tag{16}$$

由式(14)(16)可得出, 对所有的$d \geqslant 0$,

$$\sum_{(k,l,m)\in D(d)} V(x_{k,l,m}) < \phi_1(\varepsilon). \tag{17}$$

因此, 对所有的$M_1 \geqslant 0$, $M_2 \geqslant 0$及$M_3 \geqslant 0$, $\|x_{k,l,m}\|$都不能达到ε. 因为如果$\|x_{k,l,m}\| = \varepsilon$, 则

$$V(x_{k,l,m}) \geqslant \phi_1(\|x_{k,l,m}\|) = \phi_1(\varepsilon),$$

这就与式(17)矛盾. 所以, 系统(Σ_0)的平衡点$x_{\rm e} = 0$是稳定的. 根据式(15)和定义3. 证毕.

下面的定理给出了3–D非线性系统(Σ_0)的渐近稳定的充分条件.

定理 2 系统(Σ_0)的平衡点$x_{\rm e} = 0$是全局渐近稳定的, 如果存在矩阵$P > 0$, 标量$\alpha>0$, $\beta>0, \gamma > 0$, $\varepsilon > 0$且满足$\alpha+\beta+\gamma = 1$, 使得

$$\bar{A}^{\rm T}P\bar{A} - \bar{Q} < 0, \tag{18}$$

其中: $\bar{A} := [A_1\ \ A_2\ \ A_3\ \ L]$, 并且$\bar{Q} := {\rm diag}\{\alpha P - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_1^2 I_n,\ \beta P - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_2^2 I_n,\ \gamma P - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_3^2 I_n,\ \varepsilon I_n\}$, λ_D为$D^{\rm T}D$的最大特征值.

证 假定存在一个矩阵$P > 0$和标量$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$满足$\alpha+\beta+\gamma = 1$, 使得LMI(18)成立. 对于3–D非线性系统(Σ_0), 选取径向无界的正定Lyapunov函数$V(x) = x^{\rm T}Px$, 则

$$\begin{aligned}
&\Delta V(k,l,m) := \\
&V(F(x_{k,l+1,m+1}, x_{k+1,l,m+1}, x_{k+1,l+1,m})) - \\
&\alpha V(x_{k,l+1,m+1}) - \beta V(x_{k+1,l,m+1}) - \\
&\gamma V(x_{k+1,l+1,m}) = \\
&(A_1x_{k,l+1,m+1}+A_2x_{k+1,l,m+1}+A_3x_{k+1,l+1,m})^{\rm T}P\times \\
&(A_1x_{k,l+1,m+1} + A_2x_{k+1,l,m+1} + A_3x_{k+1,l+1,m}) + \\
&2(A_1x_{k,l+1,m+1}+A_2x_{k+1,l,m+1}+A_3x_{k+1,l+1,m})^{\rm T}\times \\
&PLf(\zeta_{k,l+1,m+1}, \zeta_{k+1,l,m+1}, \zeta_{k+1,l+1,m}) + \\
&\varepsilon f^{\rm T}(\zeta_{k,l+1,m+1}, \zeta_{k+1,l,m+1}, \zeta_{k+1,l+1,m}) \times \\
&f(\zeta_{k,l+1,m+1}, \zeta_{k+1,l,m+1}, \zeta_{k+1,l+1,m}) - \\
&f^{\rm T}(\zeta_{k,l+1,m+1}, \zeta_{k+1,l,m+1}, \zeta_{k+1,l+1,m}) \times \\
&(\varepsilon I - L^{\rm T}PL) \times \\
&f(\zeta_{k,l+1,m+1}, \zeta_{k+1,l,m+1}, \zeta_{k+1,l+1,m}) - \\
&x_{k,l+1,m+1}^{\rm T}\alpha Px_{k,l+1,m+1} - x_{k+1,l,m+1}^{\rm T}\beta Px_{k+1,l,m+1} - \\
&x_{k+1,l+1,m}^{\rm T}\gamma Px_{k+1,l+1,m}.
\end{aligned} \tag{19}$$

根据引理1和假设1, 可得出

$$\begin{aligned}
&\Delta V(k,l,m) \leqslant \\
&(A_1x_{k,l+1,m+1}+A_2x_{k+1,l,m+1}+A_3x_{k+1,l+1,m})^{\rm T}P\times \\
&(A_1x_{k,l+1,m+1}+A_2x_{k+1,l,m+1}+A_3x_{k+1,l+1,m}) + \\
&(A_1x_{k,l+1,m+1}+A_2x_{k+1,l,m+1}+A_3x_{k+1,l+1,m})^{\rm T}\times \\
&PL(\varepsilon I - L^{\rm T}PL)^{-1}L^{\rm T}P \times \\
&(A_1x_{k,l+1,m+1} + A_2x_{k+1,l,m+1} + A_3x_{k+1,l+1,m}) + \\
&x_{k,l+1,m+1}^{\rm T}(2\varepsilon\lambda_D\lambda_1^2I_n - \alpha P)x_{k,l+1,m+1} + \\
&x_{k+1,l,m+1}^{\rm T}(2\varepsilon\lambda_D\lambda_2^2I_n - \beta P)x_{k+1,l,m+1} + \\
&x_{k+1,l+1,m}^{\rm T}(2\varepsilon\lambda_D\lambda_3^2I_n - \gamma P)x_{k+1,l+1,m} = \\
&\begin{bmatrix} x_{k,l+1,m+1} \\ x_{k+1,l,m+1} \\ x_{k+1,l+1,m} \end{bmatrix}^{\rm T} S \begin{bmatrix} x_{k,l+1,m+1} \\ x_{k+1,l,m+1} \\ x_{k+1,l+1,m} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned}
S = &\begin{bmatrix} A_1^{\rm T} \\ A_2^{\rm T} \\ A_3^{\rm T} \end{bmatrix} P[A_1\ \ A_2\ \ A_3] + \begin{bmatrix} A_1^{\rm T}PL \\ A_2^{\rm T}PL \\ A_3^{\rm T}PL \end{bmatrix} \times \\
&(\varepsilon I - L^{\rm T}PL)^{-1}[L^{\rm T}PA_1\ \ L^{\rm T}PA_2\ \ L^{\rm T}PA_3]^{\rm T} - \\
&{\rm diag}\{\alpha P - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_1^2 I_n, \beta P - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_2^2 I_n, \\
&\gamma P - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_3^2 I_n\}.
\end{aligned}$$

根据Schur补定理, 式(18)等价于$S < 0$, 这也等价于$\Delta V(k,l,m) \leqslant 0$, 且只有在

$$[x_{k,l+1,m+1}^{\rm T}\ \ x_{k+1,l,m+1}^{\rm T}\ \ x_{k+1,l+1,m}^{\rm T}]^{\rm T} = 0$$

时等号成立. 根据定理1, 可以得出系统(Σ_0)的平衡点$x_{\rm e} = 0$是全局渐近稳定的. 证毕.

在定理2中, 令$\alpha P = Q_1, \beta P = Q_2$, 则$\gamma P = P - Q_1 - Q_2$. 这样, 可以得到如下的定理.

定理 3 系统(Σ_0)的平衡点$x_{\rm e} = 0$是全局渐近稳定的, 如果存在矩阵$P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0$和标量$\varepsilon > 0$, 使得

$$\bar{A}^{\rm T}P\bar{A} - \bar{Q} < 0, \tag{21}$$

其中: $\bar{A} := A_1\ A_2\ A_3\ L]$, $\bar{Q} := {\rm diag}\{Q_1 - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_1^2 I_n, Q_2 - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_2^2 I_n, P - Q_1 - Q_2 - 2\varepsilon\lambda_D\lambda_3^2 I_n, \varepsilon I_n\}$.

4 非线性函数观测器的存在性及设计(Existence and design for nonlinear functional observers)

本小节在定理3的基础上研究给定系统(Σ)的非线性函数观测器的存在性和设计问题.

首先, 考虑如下的3–D函数观测器$(\hat{\Sigma})$:

$$\begin{aligned}
&z_{k+1,l+1,m+1} = \\
&F_1z_{k,l+1,m+1} + F_2z_{k+1,l,m+1} + F_3z_{k+1,l+1,m} + \\
&H_1y_{k,l+1,m+1} + H_2y_{k+1,l,m+1} + \\
&H_3y_{k+1,l+1,m} + G_1u_{k,l+1,m+1} +
\end{aligned}$$

$$G_2u_{k+1,l,m+1}+G_3u_{k+1,l+1,m}+$$
$$\hat{\Gamma}f(\hat{\zeta}_{k,l+1,m+1},\hat{\zeta}_{k+1,l,m+1},\hat{\zeta}_{k+1,l+1,m}),\tag{22}$$
$$\hat{\zeta}_{k,l,m}=z_{k,l,m}+My_{k,l,m},\tag{23}$$

其中: 向量$z_{k,l,m}\in\mathbb{R}^r$为函数观测器的状态向量, $\hat{\zeta}_{k,l,m}\in\mathbb{R}^r$为$\zeta_{k,l,m}$的渐近估计, 另外, $f(\hat{\zeta}_{k,l+1,m+1},\hat{\zeta}_{k+1,l,m+1},\hat{\zeta}_{k+1,l+1,m})$为非线性项, $\hat{\Gamma}$和M为待定的具有合适维数的常值矩阵. 对于3–D系统$(\hat{\Sigma})$, 边界条件满足: 存在3个正整数$\xi_i(\ i=1,2,3)$, 使得

$$\begin{cases}z_{0,l,m}=0,\ \ l+m\geqslant\xi_1,\\ z_{k,0,m}=0,\ k+m\geqslant\xi_2,\\ z_{k,l,0}=0,\ \ \ k+l\geqslant\xi_3.\end{cases}\tag{24}$$

估计误差记作$e_{k,l,m}:=\zeta_{k,l,m}-\hat{\zeta}_{k,l,m}$.下面给出一个系统$(\Sigma)$的3–D渐近函数观测器的定义.

定义 6　称系统$(\hat{\Sigma})$是系统(Σ)的一个渐近函数观测器, 如果系统的边界条件分别满足式(4)和式(24), 则对于任意的一个已知的输入序列$u_{k,l,m}$, 都有

$$\lim_{k+l+m\to\infty}e_{k,l,m}=0.$$

因此, 函数观测器$(\hat{\Sigma})$的设计问题可以归结为: 找到具有适当维数的矩阵F_k,H_k,$G_k(k=1,2,3)$, $\hat{\Gamma}$和M, 使得$\hat{\zeta}_{k,l,m}$渐近收敛于$\zeta_{k,l,m}$. 为此, 通过对系统(Σ)和$(\hat{\Sigma})$的观测器误差动态系统进行分析, 可以得到下面的结论.

引理 3　系统(Σ)和$(\hat{\Sigma})$如式(1)–(2)及(22)–(23)给定, 则系统$(\hat{\Sigma})$是系统(Σ)的一个渐近函数观测器, 如果下面的条件成立:

a) $\Gamma A_i-F_i\Gamma-H_iC=0, i=1,2,3;$

b) $G_i=\Gamma B_i, i=1,2,3;$

c) $\hat{\Gamma}:=\Gamma L;$

d) 下面的系统的平衡点是全局渐近稳定的:

$$e_{k+1,l+1,m+1}=$$
$$F_1e_{k,l+1,m+1}+F_2e_{k+1,l,m+1}+F_3e_{k+1,l+1,m}+$$
$$\Gamma L[f(\zeta_{k,l+1,m+1},\zeta_{k+1,l,m+1},\zeta_{k+1,l+1,m})-$$
$$f(\hat{\zeta}_{k,l+1,m+1},\hat{\zeta}_{k+1,l,m+1},\hat{\zeta}_{k+1,l+1,m})],\tag{25}$$

其中$\Gamma=D-MC$.

证　容易看到, 如果条件a)–c)成立, 结合系统(Σ)和$(\hat{\Sigma})$得到的观测器误差动态系统就可以化简为系统(25). 当条件d)成立时, 观测器估计误差$e_{k,l,m}$就会渐近收敛于零, 系统$(\hat{\Sigma})$是系统(Σ)的一个渐近函数观测器.　　证毕.

下面的定理提供一个基于系统(Σ)的系数矩阵的渐近函数观测器存在性的充分条件.

定理 4　系统(Σ)存在一个渐近函数观测器, 如果下列条件成立:

1)

$$\operatorname{rank}S_1=\operatorname{rank}S_2,\tag{26}$$

其中:

$$S_1^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm T}C^{\mathrm T}&C^{\mathrm T}&0&0&A_1^{\mathrm T}D^{\mathrm T}&D^{\mathrm T}&0&0\\A_2^{\mathrm T}C^{\mathrm T}&0&C^{\mathrm T}&0&A_2^{\mathrm T}D^{\mathrm T}&0&D^{\mathrm T}&0\\A_3^{\mathrm T}C^{\mathrm T}&0&0&C^{\mathrm T}&A_3^{\mathrm T}D^{\mathrm T}&0&0&D^{\mathrm T}\end{bmatrix},$$

$$S_2^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm T}C^{\mathrm T}&C^{\mathrm T}&0&0&D^{\mathrm T}&0&0\\A_2^{\mathrm T}C^{\mathrm T}&0&C^{\mathrm T}&0&0&D^{\mathrm T}&0\\A_3^{\mathrm T}C^{\mathrm T}&0&0&C^{\mathrm T}&0&0&D^{\mathrm T}\end{bmatrix}.$$

2) 存在一个矩阵Θ, 使得下面的系统的平衡点是全局渐近稳定的:

$$e_{k+1,l+1,m+1}=$$
$$(\hat{A}_1-\Theta\hat{C}_1)e_{k,l+1,m+1}+(\hat{A}_2-\Theta\hat{C}_2)e_{k+1,l,m+1}+$$
$$(\hat{A}_3-\Theta\hat{C}_3)e_{k+1,l+1,m}+(\hat{A}_0-\Theta\hat{C}_0)\times$$
$$[f(\zeta_{k,l+1,m+1},\zeta_{k+1,l,m+1},\zeta_{k+1,l+1,m})$$
$$-f(\hat{\zeta}_{k,l+1,m+1},\hat{\zeta}_{k+1,l,m+1},\hat{\zeta}_{k+1,l+1,m})],\tag{27}$$

其中:

$$\hat{A}_i=DA_iD^+-\Phi\Omega^+\begin{bmatrix}CA_iD^+\\Y_iCD^+\end{bmatrix},\tag{28}$$

$$\hat{C}_i=(I_{4q}-\Omega\Omega^+)\begin{bmatrix}CA_iD^+\\Y_iCD^+\end{bmatrix},\tag{29}$$

$$\hat{A}_0=DL-\Phi\Omega^+\begin{bmatrix}Y_1\\0_q\end{bmatrix}CL,\tag{30}$$

$$\hat{C}_0=(I_{4q}-\Omega\Omega^+)\begin{bmatrix}Y_1\\0_q\end{bmatrix}CL,\tag{31}$$

$$\Phi=[D\bar{A}_1\ \ D\bar{A}_2\ \ D\bar{A}_3],\tag{32}$$

$$\Omega=\begin{bmatrix}C\bar{A}_1&C\bar{A}_2&C\bar{A}_3\\\bar{C}&0&0\\0&\bar{C}&0\\0&0&\bar{C}\end{bmatrix},\tag{33}$$

$$Y_1:=\begin{bmatrix}I_q\\0_q\\0_q\end{bmatrix},\ Y_2:=\begin{bmatrix}0_q\\I_q\\0_q\end{bmatrix},\ Y_3:=\begin{bmatrix}0_q\\0_q\\I_q\end{bmatrix},\tag{34}$$

$$\bar{C}=C(I_n-D^+D),\tag{35}$$

$$\bar{A}_i=A_i(I_n-D^+D),\ i=1,2,3.\tag{36}$$

证　根据引理3, 一旦找到矩阵M, H_i, $F_i(i=1,2,3)$满足引理3中的条件a)和c), 那么引理3中的条件b)随之成立, 这样就可求出$G_i(i=1,2,3)$. 令

$$\Lambda:=[D^+\ \ (I_n-D^+D)].\tag{37}$$

易知Λ是行满秩矩阵. 则引理3中a)成立当且仅当

$$(\Gamma A_i-F_i\Gamma-H_iC)\Lambda=0,\ i=1,2,3,\tag{38}$$

这也等价于下面两式同时成立:

$$(\Gamma A_i - F_i\Gamma - H_iC)(I_n - D^+D) = 0, \tag{39}$$

$$(\Gamma A_i - F_i\Gamma - H_iC)D^+ = 0,\ i = 1,2,3. \tag{40}$$

将$\Gamma = D - MC$代入式(39)和(40), 且令

$$X := [M\ \ H_1 - F_1M\ \ H_2 - F_2M\ \ H_3 - F_3M], \tag{41}$$

则等式(39)可以写作

$$X\Omega = \Phi, \tag{42}$$

其中Ω和Φ如式(32)–(33)所确定.

等式(40)可以写作

$$F_i = DA_iD^+ - X\begin{bmatrix} CA_iD^+ \\ Y_iCD^+ \end{bmatrix},\ i = 1,2,3, \tag{43}$$

$\hat{\Gamma}$可以由下式确定:

$$\hat{\Gamma} := \Gamma L = DL - X\begin{bmatrix} Y_1 \\ 0_q \end{bmatrix}CL, \tag{44}$$

其中Y_i如式(34)所定义.

注意到, 如果矩阵方程(42)有解, 则式(43)–(44)随之可得. 因此, 引理3中的条件b)和c)成立等价于矩阵方程(42)有解.

根据文献[13], 矩阵方程(42)有解当且仅当

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \Omega \\ \Phi \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\ \Omega, \tag{45}$$

令$\hat{\Lambda} := \mathrm{diag}\{\Lambda, \Lambda\}$, 其中$\Lambda$如(37)所定义. 那么, 等式(26)的左边等价于

$$\mathrm{rank}S_1 = \mathrm{rank}S_1\hat{\Lambda} = 3r + \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \Omega \\ \Phi \end{bmatrix}. \tag{46}$$

同理, 等式(26)的右边等价于

$$\mathrm{rank}S_2 = \mathrm{rank}S_2\hat{\Lambda} = 3r + \mathrm{rank}\Omega. \tag{47}$$

因此, 由式(45)–(47)可知, 矩阵方程(42)有解, 即引理3中的条件a)成立, 当且仅当式(26)成立. 进一步, 假定条件(26)成立, 则矩阵方程(42)的通解为

$$X = \Phi\Omega^+ + \Theta(I_{4q} - \Omega\Omega^+), \tag{48}$$

其中Θ是任意的具有适当维数的矩阵.

把式(48)代入式(43)–(44), 可得

$$F_i = \hat{A}_i - \Theta\hat{C}_i,\ i = 1,2,3, \tag{49}$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}_0 - \Theta\hat{C}_0, \tag{50}$$

其中: $Y_i, \hat{A}_i, \hat{C}_i, \hat{A}_0$和$\hat{C}_0$如式(28)–(31)以及式(34)所定义.

由此, 可以得到形如(27)的观测器估计误差系统. 根据引理3中的条件d), 如果存在一个矩阵Θ, 使得系统(27)的平衡点是全局渐近稳定的, 那么, 系统$(\hat{\Sigma})$是系统(Σ)的一个渐近的函数观测器. 即本定理的条件b)成立. 证毕.

易知在满足条件(26)的情况下, 函数观测器$(\hat{\Sigma})$的设计问题可以归结为找到一个满足定理4的条件b)的矩阵Θ的问题. 下面的定理利用LMI方法给出关于矩阵Θ存在的一个充分条件, 并提出一个针对给定非线性系统的函数观测器的有效的设计方法.

定理 5 假定条件(26)成立. 则系统$(\hat{\Sigma})$是系统(Σ)的一个渐近的函数观测器, 若存在矩阵$P > 0$, $Q_1 > 0, Q_2 > 0, Z$和标量$\varepsilon > 0$使得

$$\begin{bmatrix} -Q_1 + 2\varepsilon\lambda_D\lambda_1^2 I_n & * & * & * & * \\ 0 & -Q_2 + 2\varepsilon\lambda_D\lambda_2^2 I_n & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & P_0 + 2\varepsilon\lambda_D\lambda_3^2 I_n \\ 0 & 0 & -\varepsilon I & * & 0 \\ P\hat{A}_1 - Z\hat{C}_1 & P\hat{A}_2 - Z\hat{C}_2 & P\hat{A}_0 - Z\hat{C}_0 & -P & P\hat{A}_3 - Z\hat{C}_3 \end{bmatrix} < 0, \tag{51}$$

其中: $\hat{A}_i, \hat{C}_i (i = 0,1,2,3)$如式(28)–(31)所确定,

$$P_0 := -P + Q_1 + Q_2.$$

在这种情况下, 令$\Theta := P^{-1}Z$.则矩阵方程(42)有一个解$X = \Phi\Omega^+ + \Theta(I - \Omega\Omega^+)$, 期望的函数观测器$(\hat{\Sigma})$的系数矩阵$M, \hat{\Gamma}$, H_i, F_i及G_i $(i = 1,2,3)$可以如下设计:

$$M = X\begin{bmatrix} Y_1 \\ 0_q \end{bmatrix}, \tag{52}$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}_0 - \Theta\hat{C}_0, \tag{53}$$

$$F_i = \hat{A}_i - \Theta\hat{C}_i, \tag{54}$$

$$H_i = F_iM + X\begin{bmatrix} 0_q \\ Y_i \end{bmatrix}, \tag{55}$$

$$G_i = (D - MC)B_i, \tag{56}$$

其中$Y_i (i = 1,2,3)$如式(34)所定义.

证 由假定知式(26)成立, 则矩阵方程(42)有通解$X = \Phi\Omega^+ + \Theta(I - \Omega\Omega^+)$, 其中$\Theta$为具有适当维数的任意矩阵. 从式(49)–(50)知

$$F_i = \hat{A}_i - \Theta\hat{C}_i,\ i = 1,2,3, \tag{57}$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}_0 - \Theta\hat{C}_0, \tag{58}$$

其中: $\hat{A}_i, \hat{C}_i$如式(28)–(31)所定义.

接下来要找到一个使定理4的条件(b)成立的Θ.

假定存在矩阵$P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, Z$和$\varepsilon > 0$使得式(51)成立. 令$\Theta := P^{-1}Z$.则$Z = P\Theta$. 将其代入式(51), 由式(57)–(58)并根据定理3和Schur补定理, 易知系统$(\hat{\Sigma})$是(Σ)的一个渐近函数观测器. 因此找到

了一个符合条件的Θ. 从而得到了矩阵方程(42)的一个解$X = \Phi\Omega^{+} + P^{-1}Z(I - \Omega\Omega^{+})$, 进而得到期望的函数观测器的系数矩阵$M, H_i, G_i (i = 1, 2, 3)$如式(52)(55)–(56)所定义.　　证毕.

2–D系统是3–D系统的特例, 由定理4和定理5很容易推导出非线性2–D系统函数观测器的存在条件及设计方法, 在此予以省略.

5　算例(Examples)

下面给出两个例子来说明给定非线性系统的函数观测器的设计.

例 1　考虑带有如下系数的非线性3–D系统:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.3 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.6 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = [1\ \ 0.2],$$

$$L = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0.8 \end{bmatrix},\ \ D = [0.5\ \ -0.2].$$

令

$$f(\zeta_{k,l+1,m+1}, \zeta_{k+1,l,m+1}, \zeta_{k+1,l+1,m}) = 6\sin(\zeta_{k,l+1,m+1} + \zeta_{k+1,l,m+1} + \zeta_{k+1,l+1,m}),$$

则$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 6$. 容易看出, 假设1和条件(26)满足, 根据定理(5), 可以得到如下的函数观测器:

$$\begin{aligned}(\hat{\Sigma}):\ & z_{k+1,l+1,m+1} = \\ & 0.1579 z_{k,l+1,m+1} + 0.0632 z_{k+1,l,m+1} - \\ & 0.2053 z_{k+1,l+1,m} - 0.014 y_{k,l+1,m+1} + \\ & 0.0358 y_{k+1,l,m+1} - 0.0499 y_{k+1,l+1,m} - \\ & 0.3882 u_{k,l+1,m+1} - 0.2697 u_{k+1,l,m+1} - \\ & 0.1184 u_{k+1,l+1,m} - 0.0191 \times \\ & f(\hat{\zeta}_{k,l+1,m+1}, \hat{\zeta}_{k+1,l,m+1}, \hat{\zeta}_{k+1,l+1,m}), \\ & \hat{\zeta}_{k,l,m} = z_{k,l,m} + 0.3487 y_{k,l,m}.\end{aligned}$$

下面是一个2–D非线性系统的算例, 该算例是在文献[9]算例的基础上加了一定的非线性因素, 通过仿真便于直观了解所提供方法的合理性.

例 2　考虑带有如下系数的2–D线性系统

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1\ \ 1\ \ 0],\ D = [0\ \ 1\ \ 0].$$

根据文献[9]可知, 该线性系统不存在任何渐近状态观测器. 令

$$L = [1.3\ \ 0.6\ \ 3.1]^{\mathrm{T}},$$
$$f(\zeta_{k,l+1}, \zeta_{k+1,l}) = 6\sin(\zeta_{k,l+1} + \zeta_{k+1,l}),$$

则$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$. 容易验证: 系统满足假设1和条件(26), 函数观测器可以如下设计:

$$\begin{aligned}(\hat{\Sigma}):\ & z_{k+1,l+1} = \\ & -0.0101 z_{k,l+1} + 0.9569 z_{k+1,l} + \\ & 0.0069 y_{k,l+1} + 0.3029 y_{k+1,l} - \\ & 0.0633 u_{k,l+1} + 0.2734 u_{k+1,l} - \\ & 0.0014 f(\hat{\zeta}_{k,l+1}, \hat{\zeta}_{k+1,l}) \\ & \hat{\zeta}_{k,l} = z_{k,l} + 0.3165 y_{k,l}.\end{aligned}$$

令已知输入为$u_{k,l} = \sin(k - l)$, 初始条件如下:

$$x_{k,0} = \begin{cases} [\cos k\ \ 0.1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ 0 < k \leqslant 60, \\ 0, \qquad \text{其他}, \end{cases}$$

$$z_{k,0} = \begin{cases} \sin(-k),\ 0 < k \leqslant 60, \\ 0, \qquad \text{其他}, \end{cases}$$

$$x_{0,l} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \cos l & 0.1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ 0 < l \leqslant 60, \\ 0, \qquad \text{其他}, \end{cases}$$

$$z_{0,l} = \begin{cases} \sin l,\ 0 < l \leqslant 60, \\ 0, \qquad \text{其他}, \end{cases}$$

估计误差$e_{k,l} (k, l = 0, 1, \ldots, 100)$如图1所示, 从图1中容易看出估计误差确实渐近收敛到零.

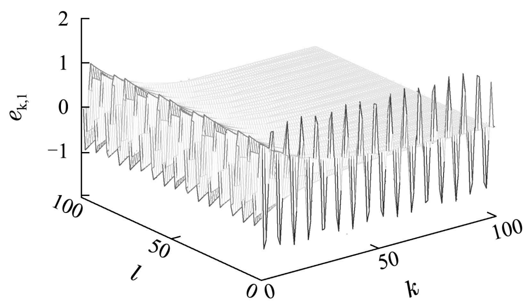

图 1　估计误差$e_{k,l}$

Fig. 1　Estimation error $e_{k,l}$

6　结论(Conclusions)

本文主要研究了一类3–D非线性系统的渐近函数观测器的设计方法. 主要贡献在于:

1) 给出了一类3–D非线性系统全局渐近稳定性的充分条件;

2) 利用秩条件和LMI方法, 提供了一种渐近函数观测器的设计方法.

参考文献(References):

[1] LIU D, MICHEL A N. Stability analysis of state-space realizations for two-dimensional filters with overflow nonlinearities [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 1994, 41(2): 127 – 137.

[2] XIE C, DU C, SOH YC, et al. H_∞ and robust control of 2–D systems in FM second model [J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2002, 13(3): 265 – 287.

[3] XU S, LAM J, LIN Z, et al. Positive real control for uncertain two-dimensional systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2002, 49(11): 1659 – 1666.

[4] ZHOU T. On the stability of spatially distributed systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2385 – 2391.

[5] 向峥嵘, 陈庆伟, 胡维礼. 非线性离散系统基于观测器的反馈控制 [J]. 控制理论与应用, 2001, 18(1): 80 – 82.
(XIANG Zhengrong, CHEN Qingwei, HU Weili. Feedback control of nonlinear discrete-time systems based on observers [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(1): 80 – 82.)

[6] BISIACCO M. On the structure of 2D-observers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(7): 676 – 680.

[7] BISIACCO M, VALCHER M E. Unknown input observers for 2D state-space models [J]. *International Journal of Control*, 2004, 77(9): 861 – 876.

[8] NTOGRAMATZIDIS L, CANTONI M. Detectability subspaces and observer synthesis for two-dimensional systems [J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2012, 23(1/2): 79 – 96.

[9] XU H, LIN Z, MAKUR A. The existence and design of functional observers for two-dimensional systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(2): 362 – 368.

[10] XU H, LIN Z, MAKUR A, et al. Asymptotic unknown input observers for two-dimensional systems [C] //*The 7th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems*. Poitiers, France: IEEE, 2011.

[11] LIU D R. Lyapunov stability of two-dimensional digtial filters with overflow nonlinearities [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 1998, 45(5): 574 – 577.

[12] WANG L, XU H, XU L, et al. Analysis and design of unknown input observers for a class of 2–D nonlinear systems [J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2013, 24(4): 621 – 635.

[13] RAO C, MITRA S. *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* [M]. New York: Wiley, 1971.

[14] WANG W, ZOU Y. The detectability and observer design of 2–D singular systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2002: 49(5): 698 – 703.

作者简介:

王 璐 (1976–), 女, 博士研究生, 目前研究方向: 多维系统、奇异系统, E-mail: wlulu0327@hotmail.com;

徐慧玲 (1969–), 女, 教授, 目前研究方向: 多维系统、非线性系统、奇异系统、鲁棒控制及滤波, E-mail: xuhuiling@njust.edu.cn.