

## 非脆弱递归滑模动态面自适应神经网络控制

刘希<sup>1†</sup>, 孙秀霞<sup>1</sup>, 刘树光<sup>1</sup>, 徐嵩<sup>1</sup>, 郝震<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学 航空航天工程学院, 陕西 西安 710038; 2. 中国人民解放军94270部队, 山东 济南 250117)

**摘要:** 针对一类非匹配不确定非线性系统的跟踪控制问题, 提出了一种递归滑模动态面自适应控制算法. 采用神经网络(neural network, NN)在线逼近系统不确定项, 通过设计递归滑模动态面有效综合反推步骤中每步跟踪误差之间相互影响和制约的关系. 该方法避免了反推法存在的“微分爆炸”问题, 克服了传统动态面方法对其低通滤波器时间常数和神经网络自适应参数摄动脆弱的缺点. 稳定性分析证明了该方法能够保证闭环系统所有状态半全局一致最终有界, 且跟踪误差可以收敛至原点的任意小邻域.

**关键词:** 滑模控制; 动态面控制; 神经网络; 非脆弱

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Non-fragile recursive sliding mode dynamic surface control with adaptive neural network

LIU Xi<sup>1†</sup>, SUN Xiu-xia<sup>1</sup>, LIU Shu-guang<sup>1</sup>, XU Song<sup>1</sup>, HAO Zhen<sup>2</sup>

(1. College of Aeronautics and Astronautics Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710038, China;  
2. Unit 94270 of PLA, Jinan Shandong 250117, China)

**Abstract:** A non-fragile recursive sliding mode dynamic surface adaptive control method is proposed for a class of uncertain, mismatched nonlinear system. By employing the neural network (NN) to approximate the system uncertainty and designing the recursive sliding mode dynamic surface to synthesize the interaction of the tracking error in each step of backstepping scheme, we make the method to get rid of the ‘explosion of complexity’ associated with the backstepping control and to avoid being fragile to the perturbation in both the filter time constant and adaptive parameters of neural network in the traditional dynamic surface control. Stability analysis verifies the semi-global, uniform, and ultimate boundedness (SUUB) for all the states of the closed-loop system, and guarantees the tracking error to converge to an arbitrarily small neighborhood of the origin.

**Key words:** sliding mode control; dynamic surface control (DSC); neural network; non-fragile

### 1 引言(Introduction)

非匹配不确定非线性系统的跟踪控制一直以来都是控制领域研究的热点和难点. 20世纪90年代由Saber, Kokotovic, Morse 和 Kanellakopoulos 等人提出的反推控制方法(backstepping control, BC)<sup>[1-3]</sup>, 是处理该类问题中广泛使用的一种方法. 但是在反推控制方法中, 每一步的控制律设计都需要对虚拟控制量求导, 使得控制律高度复杂, 且对被控对象和控制指令都有非常苛刻的要求. 基于此, Swaroop等人<sup>[4-5]</sup>提出了“动态面控制”(dynamic surface control, DSC)方法, 通过在原反推控制的每前后两步控制律设计中, 增加一个低通滤波器, 从而避免了下一步设计中中间虚拟控制量求导, 大大降低了控制律的复杂程度. 随着自适应和智能控制理论的兴起, 许多学者结合模

糊逼近和神经网络学习等智能方法提出了一些具有较强鲁棒性能的自适应动态面控制方法, 并进一步扩展了动态面控制方法的应用领域<sup>[6-13]</sup>.

然而, 自适应动态面控制方法虽然对于系统不确定性和外界干扰具有较强的鲁棒性, 但对其低通滤波器时间常数和自适应参数的摄动却非常脆弱. Swaroop等人<sup>[4-5]</sup>最初提出动态面控制方法的时候就注意了这一点, 并给出了因为低通滤波器时间常数 $\tau_i$ 稍大而引起系统发散的仿真实例. 在实际工程中, 低通滤波器时间常数和神经网络自适应参数通常都是靠经验取值. 大量实验表明, 这些控制器参数的取值范围通常很小, 参数的设置稍有不慎就可能引起系统振荡甚至发散. 自适应动态面控制器所表现出的脆弱性严重制约着该方法在许多领域的应用.

本文首先分析了传统动态面控制方法基于局部跟踪误差依次反推的局限性,指出了反推时每步控制律的设计需要综合考虑和预测每个子系统跟踪误差之间相互影响和制约的关系.然后,基于神经网络设计了一种非脆弱递归滑模动态面自适应控制方法.该方法可以保证闭环系统所有信号半全局一致最终有界,且通过调整控制器参数,可以使跟踪误差任意小.理论分析和仿真结果均表明该方法对于系统不确定性和控制器自身参数的摄动均具有很强的鲁棒性.

## 2 问题描述(Problem formulation)

本文方法适用于所有严反馈且增益方向已知的非线性不确定系统.为了便于阐述本文的控制器设计思想,考虑如下形式的严反馈非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(\bar{X}_i) + \Delta f_i(\bar{X}_i), \\ \dot{x}_n = u + f_n(\bar{X}_n) + \Delta f_n(\bar{X}_n), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\bar{X}_i = [x_1 \ \cdots \ x_i]^T$ , 并且  $f_i(\bar{X}_i)$  为已知函数,  $\Delta f_i(\bar{X}_i)$  为未知不确定函数,  $u$  为控制输入. 控制的目标是使输出  $y$  跟踪参考信号  $r(t)$ . 为书写方便,下文采用  $f_i$  和  $\Delta f_i$  分别表示  $f_i(\bar{X}_i)$  和  $\Delta f_i(\bar{X}_i)$ .

**假设 1**  $f_i$  为  $C^1$  类函数.

**假设 2** 参考信号  $r(t)$ ,  $\dot{r}(t)$ ,  $\ddot{r}(t)$  存在且有界,对于任意  $t \geq 0$ ,  $(r, \dot{r}, \ddot{r})$  属于一个已知的紧集,即

$$r \in \Omega_1 = \{(r, \dot{r}, \ddot{r}) | r^2 + \dot{r}^2 + \ddot{r}^2 \leq K_0\}, \quad (2)$$

其中  $K_0$  为已知常数.

## 3 传统动态面控制的局限性分析(The limitation analysis of traditional dynamic surface control)

### 3.1 传统动态面控制方法简介(Brief introduction of traditional dynamic surface control)

对于非线性不确定系统(1)的控制问题,传统动态面控制方法如下:

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - r, \\ x_{2,d} = -f_1 - \frac{e_1 \psi_1^2}{2\varepsilon} - k_1 e_1 + \dot{r}, \\ \tau_2 \dot{z}_2 + z_2 = x_{2,d}, \quad z_2(0) = x_{2,d}(0). \end{cases} \quad (3)$$

依此类推,对于  $2 \leq i \leq n-1$ , 有

$$\begin{cases} e_i = x_i - z_i, \\ x_{i+1,d} = -f_i - \frac{e_i \psi_i^2}{2\varepsilon} - k_i e_i + \dot{z}_i, \\ \tau_{i+1} \dot{z}_{i+1} + z_{i+1} = x_{i+1,d}, \quad z_{i+1}(0) = x_{i+1,d}(0). \end{cases} \quad (4)$$

最后,  $i = n$  时,

$$\begin{cases} e_n = x_n - z_n, \\ u_n = -f_n - \frac{e_n \psi_n^2}{2\varepsilon} - k_n e_n + \dot{z}_n, \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\varepsilon > 0$  为与跟踪精度相关的一个待设计参数,  $z_i$  为引入低通滤波器的状态变量,  $\tau_i > 0$  为低通滤波器时间常数,  $k_i > 0$  为控制增益, 而  $\psi_i$  代表  $C^1$  类函数  $\psi_i(\bar{X}_i)$ , 且满足  $|\Delta f_i| \leq \psi_i$ .

### 3.2 基于局部跟踪误差依次反推的局限性(The limitation of backstepping based on local tracking error)

从传统动态面控制方法简介可以看出,中间虚拟控制量  $x_{i,d}$  的设计仅考虑了前一个子系统跟踪误差  $e_{i-1}$ , 而没有兼顾所有之前子系统的跟踪误差  $e_1, \dots, e_{i-2}$ . 然而,各子系统的跟踪误差之间是相互影响和制约的.例如  $e_i > 0$  时,  $e_{i+1} < 0$  有利于减小  $e_i$ ;  $e_i < 0$  时,  $e_{i+1} < 0$  会加速  $e_i$  减小. 同样是  $e_{i+1} < 0$ , 对系统的影响却完全不同,一个是有利的,另一个却是有害的.所以,在反推时,虚拟控制量  $x_{i,d}$  的设计仅仅考虑前一个子系统跟踪误差  $e_{i-1}$  是片面的,每一个子系统的跟踪误差也不是越小越好.如果考虑低通滤波器引起的延迟,基于局部跟踪误差依次反推的局限性容易诱发系统振荡甚至发散.正因为如此,基于传统动态面方法的神经网络控制对其控制器自身参数的摄动非常脆弱.特别是其低通滤波器时间常数和自适应参数,通常取值范围很小,且没有有效的设置方法,在实际应用中需要根据经验进行大量试凑和验证工作.

## 4 递归滑模动态面自适应NN控制(Recursive sliding mode dynamic surface control with adaptive NN)

### 4.1 控制器设计(Controller design)

采用RBF神经网络在线逼近系统不确定项  $\Delta f_i$ ,  $\Delta f_i$  可以表示为

$$\Delta f_i = \theta_i^{*T} \xi_i(\bar{X}_i) + \delta_i(\bar{X}_i), \quad (6)$$

其中:  $\xi_i(\bar{X}_i) : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^{p_i}$  为神经网络基函数向量,  $p_i$  为神经网络  $i$  的隐层节点个数,  $\delta_i(\bar{X}_i)$  为神经网络重构误差函数.为书写方便,下文用  $\xi_i, \delta_i$  分别表示  $\xi_i(\bar{X}_i)$  和  $\delta_i(\bar{X}_i)$ . 式(6)中:

$$\theta_i^* = \arg \min_{\theta_i^T \in \mathbb{R}^{p_i}} \{ \sup_{\bar{X}_i \in \mathbb{R}^i} \|\Delta f_i - \theta_i^T \xi_i(\bar{X}_i)\| \} \quad (7)$$

为理想神经网络权值向量.实际上,  $\theta_i^*$  的值无法得到,用  $\hat{\theta}_i$  表示其估计值,定义  $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i^*$  为估计误差.于是  $\Delta f_i$  可以表示为

$$\Delta f_i = \hat{\theta}_i^T \xi_i - \tilde{\theta}_i^T \xi_i + \delta_i. \quad (8)$$

**假设 3** 神经网络权值  $\theta_i^*$  有界,即存在正常数  $\theta_M$ , 满足  $\|\theta_i^*\| < \theta_M$ .

**假设 4** 存在  $C^1$  类函数  $\rho_i(\bar{X}_i)$ , 满足  $\rho_i(\bar{X}_i) > |\delta_i|$ . 为书写方便,下文采用  $\rho_i$  表示  $\rho_i(\bar{X}_i)$ .

下面具体介绍控制器的设计步骤.

**Step 1** 考虑  $\dot{x}_1$ -子系统, 定义第 1 个滑模面

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - r, \\ s_1 = e_1, \end{cases} \quad (9)$$

则

$$\dot{s}_1 = x_2 + f_1 + \Delta f_1 - \dot{r}. \quad (10)$$

将式(8)代入式(10), 得

$$\dot{s}_1 = x_2 + f_1 + \hat{\theta}_1^T \xi_1 - \tilde{\theta}_1^T \xi_1 + \delta_1 - \dot{r}. \quad (11)$$

根据式(11), 设计如下虚拟控制律和自适应律:

$$\begin{cases} x_{2,d} = x_{2,d1} - \frac{s_1 x_{2,d1}^2}{2\varepsilon} - k_1 s_1, \\ x_{2,d1} = -f_1 - \hat{\theta}_1^T \xi_1 + \dot{r}, \\ x_{2,d2} = \rho_1, \end{cases} \quad (12)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma_1 [\xi_1 s_1 - \sigma_1 (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_1^0)]. \quad (13)$$

为了避免下一步设计中对虚拟控制律求导, 使用时间常数为  $\tau_2$  的一阶低通滤波器对虚拟控制律进行滤波, 得到  $x_{2,d}$  的估计值  $z_2$ ,

$$\tau_2 \dot{z}_2 + z_2 = x_{2,d}, \quad z_2(0) = x_{2,d}(0). \quad (14)$$

**Step  $i$**  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) 考虑  $\dot{x}_i$ -子系统, 定义第  $i$  个递归滑模面

$$\begin{cases} e_i = x_i - z_i, \\ s_i = c_{i-1} s_{i-1} + e_i, \quad c_{i-1} \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

则

$$\dot{s}_i = c_{i-1} \dot{s}_{i-1} + x_{i+1} + f_i + \Delta f_i - \dot{z}_i. \quad (16)$$

将式(8)代入式(16), 得

$$\dot{s}_i = c_{i-1} \dot{s}_{i-1} + x_{i+1} + f_i + \hat{\theta}_i^T \xi_i - \tilde{\theta}_i^T \xi_i + \delta_i - \dot{z}_i. \quad (17)$$

类似地, 设计虚拟控制律、自适应律和低通滤波器为

$$\begin{cases} x_{i+1,d} = x_{i+1,d1} - \frac{s_i x_{i+1,d1}^2}{2\varepsilon} - k_i s_i - s_{i-1}, \\ x_{i+1,d1} = c_{i-1} (x_{i,d1} - x_i) - f_i - \hat{\theta}_i^T \xi_i + \dot{z}_i, \\ x_{i+1,d2} = c_{i-1} x_{i,d2} + \rho_i, \end{cases} \quad (18)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma_i [\xi_i s_i - \sigma_i (\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_i^0)], \quad (19)$$

$$\tau_{i+1} \dot{z}_{i+1} + z_{i+1} = x_{i+1,d}, \quad z_{i+1}(0) = x_{i+1,d}(0). \quad (20)$$

**Step  $n$**  考虑  $\dot{x}_n$ -子系统, 定义第  $n$  个递归滑模面

$$\begin{cases} e_n = x_n - z_n, \\ s_n = c_{n-1} s_{n-1} + e_n, \quad c_{n-1} \geq 0, \end{cases} \quad (21)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= c_{n-1} \dot{s}_{n-1} + u + f_n + \Delta f_n - \dot{z}_n = \\ &= c_{n-1} \dot{s}_{n-1} + u + f_n + \hat{\theta}_n^T \xi_n - \tilde{\theta}_n^T \xi_n + \delta_n - \dot{z}_n. \end{aligned} \quad (22)$$

最后, 设计控制输入  $u$  和自适应律

$$\begin{cases} u = u_{d1} - \frac{s_n u_{d2}^2}{2\varepsilon} - k_n s_n - s_{n-1}, \\ u_{d1} = c_{n-1} (x_{n,d1} - x_n) - f_n - \hat{\theta}_n^T \xi_n + \dot{z}_n, \\ u_{d2} = c_{n-1} x_{n,d2} + \rho_n, \end{cases} \quad (23)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \Gamma_n [\xi_n s_n - \sigma_n (\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^0)], \quad (24)$$

其中:  $k_i, c_i, \sigma_i$  和  $\varepsilon$  为待设计正常数,  $\Gamma_i$  为待设计正定对称矩阵,  $\hat{\theta}_i^0$  为神经网络初始权值.

**注 1** 传统动态面的虚拟控制律仅仅考虑了跟踪误差  $e_i$ , 而本文通过定义递归滑模面(15)和(21), 综合考虑了当前子系统之前的所有子系统跟踪误差.

**注 2** 递归的控制律形式使得控制律充分利用了已有的信息, 减小了计算量.

**注 3** 当本文方法中  $c_i = 0 (i = 1, \dots, n-1)$  时, 本文方法等价于传统神经网络动态面控制方法. 可见本文方法为一种更为广义的神经网络动态面控制方法.

#### 4.2 稳定性分析(Stability analysis)

**定理 1** 考虑满足假设 1-2 的非线性不确定系统(1), 采用式(12)-(13)(18)-(19)(23)-(24)的控制式, 则存在  $\tau_i (i = 2, \dots, n); \sigma_i, k_i, \Gamma_i (i = 1, \dots, n); c_i (i = 1, \dots, n-1), \varepsilon > 0$ , 使得闭环控制系统满足:

- 1) 闭环系统所有状态半全局一致最终有界.
- 2) 跟踪误差最终可以收敛至原点的任意小邻域.

**证** 定义 Lyapunov 函数

$$V_{is} = \frac{1}{2} s_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (25)$$

则

$$\dot{V}_{1s} = s_1 (x_2 + f_1 + \Delta f_1 - \dot{r}) + \tilde{\theta}_1^T (\Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1). \quad (26)$$

由式(14)-(15), 有

$$x_2 = s_2 - c_1 s_1 + x_{2,d} - \tau_2 \dot{z}_2. \quad (27)$$

将式(8)(27)代入式(26), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1s} &= s_1 (s_2 - c_1 s_1 + x_{2,d} - \tau_2 \dot{z}_2 + f_1 + \\ &\quad \hat{\theta}_1^T \xi_1 + \delta_1 - \dot{r}) + \tilde{\theta}_1^T (\Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 - \xi_1 s_1). \end{aligned} \quad (28)$$

由 Young's 不等式, 有

$$\frac{s_i^2 \rho_i^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \geq |s_i| \rho_i \geq |s_i| |\delta_i|, \quad (29)$$

$$\tilde{\theta}_i^T (\hat{\theta}_i - \theta_i^0) \geq \frac{1}{2} |\tilde{\theta}_i|^2 - \frac{1}{2} |\theta_i^* - \theta_i^0|^2. \quad (30)$$

将式(12)-(13)(29)-(30)代入式(28), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1s} &\leq -(c_1 + k_1) s_1^2 - \frac{\sigma_1}{2\lambda_{\max}(\Gamma_1^{-1})} \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\theta}_1 + \\ &\quad s_1 s_2 - \tau_2 \dot{z}_2 s_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma_1}{2} |\theta_1^* - \theta_1^0|^2. \end{aligned} \quad (31)$$

类似地, 对于  $2 \leq i \leq n-1$ , 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{is} \leq & -(c_i + k_i)s_i^2 - \frac{\sigma_i}{2\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})}\tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i - \\ & \tau_{i+1}\dot{z}_{i+1}s_i - s_{i-1}s_i + s_i s_{i+1} + \\ & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma_i}{2}|\theta_i^* - \theta_i^0|^2. \end{aligned} \quad (32)$$

最后,有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ns} \leq & -k_n s_n^2 - \frac{\sigma_n}{2\lambda_{\max}(\Gamma_n^{-1})}\tilde{\theta}_n^T \Gamma_n^{-1} \tilde{\theta}_n - \\ & s_{i-1}s_i + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma_n}{2}|\theta_n^* - \theta_n^0|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

定义Lyapunov函数

$$V_s = \sum_{i=1}^n V_{is}, \quad (34)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}_s \leq & -(\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i)s_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_{i+1}\dot{z}_{i+1}s_i - \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})}\tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i + \frac{n\varepsilon}{2} + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2}|\theta_i^* - \theta_i^0|^2. \end{aligned} \quad (35)$$

定义

$$y_i = z_i - x_{id}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (36)$$

由定义(36)及式(14)(20),有

$$y_i = -\tau_i \dot{z}_i. \quad (37)$$

将式(37)代入式(35),有

$$\begin{aligned} \dot{V}_s \leq & -(\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i)s_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}s_i - \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})}\tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i + \frac{n\varepsilon}{2} + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2}|\theta_i^* - \theta_i^0|^2. \end{aligned} \quad (38)$$

由定义(36)及式(14)(20),有

$$\dot{y}_i = -\frac{y_i}{\tau_i} - \dot{x}_{id}. \quad (39)$$

由式(12)(18),以及假设1-2和假设4,易知必定存在连续函数 $\eta_i$ ,使式(40)成立:

$$\begin{aligned} |\dot{x}_{id}| \leq & \eta_i(s_1, \dots, s_i, y_2, \dots, y_i, \tau_2, \dots, \tau_{i-1}, k_1, \\ & \dots, k_{i-1}, c_1, \dots, c_{i-2}, x_{1d}, \dot{x}_{1d}, \ddot{x}_{1d}). \end{aligned} \quad (40)$$

定义Lyapunov函数

$$V_{iy} = \frac{y_i^2}{2}. \quad (41)$$

由式(39)-(40)及Young's不等式,有

$$\dot{V}_{iy} \leq -\frac{y_i^2}{\tau_i} + |y_i|\eta_i \leq -(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{2})y_i^2 + \frac{\eta_i^2}{2}. \quad (42)$$

最后,定义Lyapunov函数

$$V = V_s + \sum_{i=2}^n V_{iy}, \quad (43)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i)s_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}s_i + \\ & \sum_{i=2}^n \frac{\eta_i^2}{2} + \frac{n\varepsilon}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})}\tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2}|\theta_i^* - \theta_i^0|^2 - \sum_{i=2}^n (\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{2})y_i^2. \end{aligned} \quad (44)$$

取

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_i} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4(\lambda_i + c_i)} + \alpha_0, \\ k_i \geq \lambda_i + \alpha_0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ k_n \geq \alpha_0, \end{cases} \quad (45)$$

其中:  $\lambda_i > 0, \alpha_0 > 0$ . 利用Young's不等式有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -a_0(\sum_{i=1}^n s_i^2 + \sum_{i=2}^n y_i^2) + \sum_{i=2}^n \frac{\eta_i^2}{2} + \frac{n\varepsilon}{2} + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2}|\theta_i^* - \theta_i^0|^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})}\tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i. \end{aligned} \quad (46)$$

定义如下紧集:

$$\begin{aligned} \Omega_i = & \{(s_1, \dots, s_i, y_2, \dots, y_i, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_i) | \\ & \sum_{j=1}^i (s_j^2 + \tilde{\theta}_j^T \Gamma_j^{-1} \tilde{\theta}_j) + \sum_{j=2}^i y_j^2 \leq 2p\}, \\ & i = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (47)$$

其中 $p > 0$ 为常数.

根据假设2,参考信号 $r$ 的属性集合 $\Omega_1$ 是已知紧集,因此 $\Omega_1 \times \Omega_i, i = 2, \dots, n$ 仍是紧集,所以,连续函数 $|\eta_i|$ 在 $\Omega_1 \times \Omega_i$ 上存在最大值,不妨设为 $M_i$ .因此由式(46),有

$$\dot{V} \leq -2\mu V + C, \quad (48)$$

其中:

$$\mu = \min_{1 \leq i \leq n} \{a_0, \frac{\sigma_i}{2\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})}\}, \quad (49)$$

$$C = \frac{n\varepsilon}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{M_i^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2}|\theta_i^* - \theta_i^0|^2. \quad (50)$$

通过设置 $a_0, \sigma_i, \Gamma_i$ 可以使 $\mu > C/(2p)$ ,则当 $V \geq p$ 时, $\dot{V} < 0$ .因此 $V \leq p$ 是一个不变集.即如果 $V(0) \leq p$ ,则 $V(t) \leq p$ 对 $\forall t > 0$ 成立.跟踪误差最终可以收敛到半径为 $C/(2\mu)$ 的球域.取 $\mu > \max\{C/(2p), C/\varepsilon\}$ ,则 $e_1^2 \leq 2V \leq \varepsilon$ .因为 $\varepsilon$ 可以任意设置,所以跟踪误差最终可以收敛至原点的任意小邻域.证毕.

**注4** 由稳定性分析可以看出,本文通过引入参数 $c_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ),一方面综合考虑了所有子系统的跟踪误差之间的相互影响,可以减小 $M_i$ 的值,进而扩大了参数 $\tau_i, \Gamma_i$ ,和 $k_i$ 的取值范围,另一方面由式(45)可以看出参数 $c_i$ 的引入直接增大了 $\tau_i$ 和 $k_i$ 的取值范围.说明了本文方法相对于动态面控制方法具有非脆弱的特性.

### 5 仿真算例(Simulation examples)

为了分析本文方法对控制器自身参数摄动的非脆弱性, 选择传统神经网络动态面控制方法<sup>[10]</sup>与本文方法进行仿真对比. 直接选用文献[10]仿真所用的非匹配不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \Delta f_1(\bar{X}_1), \\ \dot{x}_2 = x_3 + \Delta f_2(\bar{X}_2), \\ \dot{x}_3 = u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (51)$$

其中:  $\Delta f_1(\bar{X}_1), \Delta f_2(\bar{X}_2)$  为未知非线性函数. 控制的目的是设计控制输入  $u$ , 使输出  $y$  跟踪参考信号  $r(t)$ . 在仿真中设  $\Delta f_1(\bar{X}_1) = x_1^3, \Delta f_2(\bar{X}_2) = x_1^2 + x_2^2$ , 系统初始状态为  $[x_{10}, x_{20}, x_{30}] = [0, 1, 0]$ , 参考信号  $r(t) = \sin t$ .

本文方法和文献[10]相同的参数取  $\rho_1 = 10^{-4}, k_1 = 40, k_2 = k_3 = 60, \varepsilon = 0.2, \sigma_1 = \sigma_2 = 10^{-3}$ ; 本文方法的另外两个参数取  $c_1 = 10, c_2 = 30$ . 两种方法采用相同的神经网络, 其中  $\theta_1, \theta_2$  的隐层神经元个数分别为 10 和 100, NN 的基函数向量

$$\xi_i = \exp\left(-\frac{\|\bar{X}_i - \bar{a}_i\|^2}{b}\right),$$

神经网络初始权值  $\hat{\theta}_1^0 = \mathbf{0}, \hat{\theta}_2^0 = \mathbf{0}$ ; 中心值  $\bar{a}_i$  在区间  $[-1, 1]$  均匀取值, 尺度因子  $b = 0.1$ . 分别取如下 4 组低通滤波器时间常数  $\tau_2, \tau_3$  和神经网络学习速率参数  $\Gamma_1, \Gamma_2$  进行仿真, 仿真中微分方程数值求解采用函数 ode45.

- 1)  $\tau_2 = \tau_3 = 0.02; \Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}\{5\}$ .
- 2)  $\tau_2 = \tau_3 = 0.02; \Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}\{280\}$ .
- 3)  $\tau_2 = \tau_3 = 0.026; \Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}\{1\}$ .
- 4)  $\tau_2 = \tau_3 = 0.026; \Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}\{8\}$ .

仿真结果如图 1-4 所示.

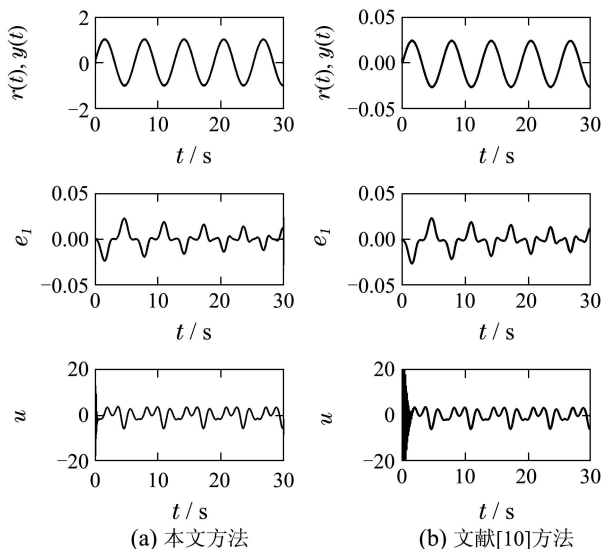


图 1 参数组 1) 下控制效果对比  
Fig. 1 Performance contrast for parameter set 1)

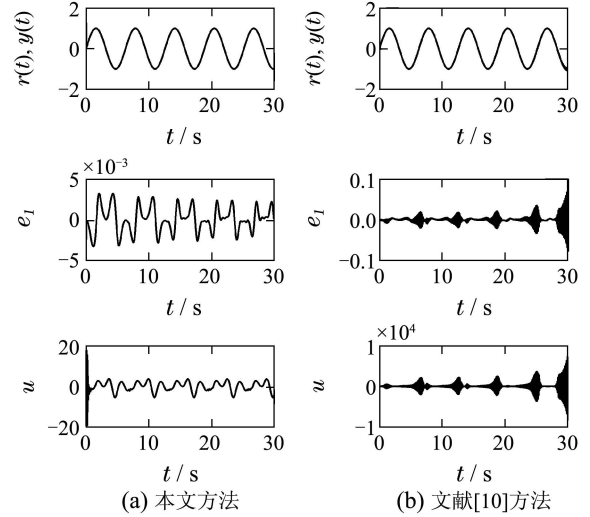


图 2 参数组 2) 下控制效果对比

Fig. 2 Performance contrast for parameter set 2)

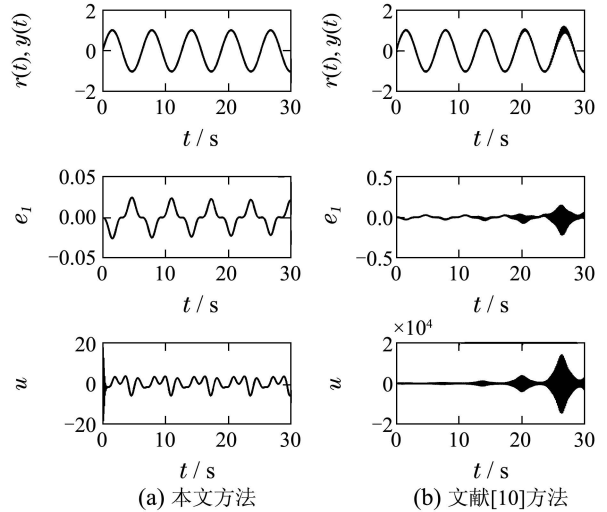


图 3 参数组 3) 下控制效果对比

Fig. 3 Performance contrast for parameter set 3)

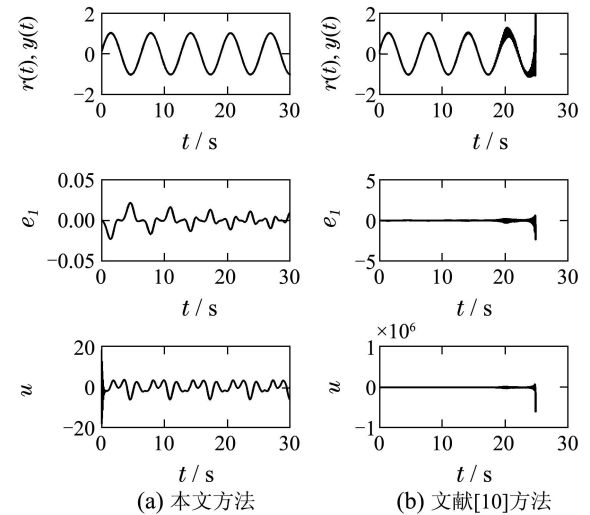


图 4 参数组 4) 下控制效果对比

Fig. 4 Performance contrast for parameter set 4)

从图 1-4 中可以看出, 两种方法都对系统不确定性

具有鲁棒性,但文献[10]方法在低通滤波器时间常数 $\tau_2, \tau_3$ 和神经网络学习速率 $\Gamma_1, \Gamma_2$ 过大时都容易引起振荡甚至发散.本文方法对低通滤波器时间常数 $\tau_2, \tau_3$ 和神经网络学习速率参数 $\Gamma_1, \Gamma_2$ 的摄动都具有很强的非脆弱性,这是常规神经网络自适应动态面不可比拟的.此外,由图1可以看出本文方法控制输入没有出现明显的振荡,而文献[10]方法控制输入经过约3s的振荡才开始稳定,可见本文方法神经网络学习效率也明显高于文献[10].为进一步验证本文方法的非脆弱性,取更为极端的参数参数组5)  $\tau_2 = \tau_3 = 0.1; \Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}\{100\}$ 进行仿真,结果如图5所示,可见本文方法仍然能够保持较好的跟踪效果.而传统动态面方法控制系统维持不到1s就发散了.

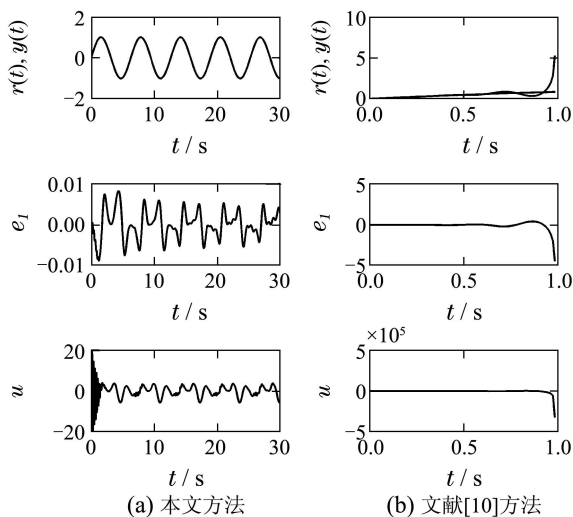


图5 参数组5)下控制效果对比

Fig. 5 Performance contrast for parameter set 5)

## 6 结论(Conclusion)

本文针对传统动态面控制方法对其控制器自身参数摄动脆弱的缺点,首先分析了传统动态面控制方法基于局部跟踪误差依次反推的局限性,指出了反推时每步控制律的设计需要综合考虑和预测了每个子系统跟踪误差之间相互影响和制约的关系.然后基于神经网络设计了一种非脆弱的自适应递归滑模动态面控制方法.该方法设计的控制器对系统未知不确定性和控制器自身参数的摄动都具有很强的鲁棒性.本文将动态面方法与滑模控制原理有机结合,大大提高控制器的非脆弱性,为解决非匹配不确定系统的控制提供了新的途径.

## 参考文献(References):

- [1] SABERI A, KOKOTOVIC P V, SUSSNAM H J. Global stabilization of partially linear composite systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1990, 128(6): 1491 – 1503.
- [2] KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 – 1253.

- [3] KRSTIC M, KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(4): 738 – 752.
- [4] SWAROOP D, GERDES J C, YIP P P, et al. Dynamic surface control of nonlinear systems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New Mexico: Albuquerque, 1997, 6: 3028 – 3034.
- [5] SWAROOP D, HEDRICK J K, YIP P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1893 – 1890.
- [6] JIN Y S, PARK J B, CHOI Y H. Adaptive dynamic surface control for stabilization of parametric strict feedback nonlinear systems with unknown time delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(12): 2360 – 2365.
- [7] 周丽,姜长生,都延丽.一种基于反步法的鲁棒自适应终端滑模控制 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(6): 678 – 682. (ZHOU Li, JIANG Changsheng, DU Yanli. A robust and adaptive terminal sliding mode control based on backstepping [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(6): 678 – 682.)
- [8] 贾涛,刘军,钱富才.一类非线性时滞系统的自适应模糊动态面控制 [J]. *自动化学报*, 2011, 37(1):83 – 91. (JIA Tao, LIU Jun, QIAN Fucui. Adaptive fuzzy dynamic surface control for a class of nonlinear systems with unknown time-delays [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(1): 83 – 91.)
- [9] 王允建,刘贺平,王玲.自寻优自适应动态面控制[J]. *控制与决策*, 2010, 25(6): 939 – 942. (WANG Yunjian, LIU Heping, WANG Ling. Self-optimize adaptive dynamic surface control [J]. *Control and Decision*, 2010, 25(6): 939 – 942.)
- [10] WANG D, HUANG J. Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2005, 16(1): 195 – 202.
- [11] 余修端,孙秀霞,林岩.面向控制性能的一类非线性关联系统输出反馈动态面控制 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(12): 1754 – 1762. (YU Xiuduan, SUN Xiuxia, LIN Yan. Control performance-oriented output feedback dynamic surface control for a class of interconnected nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(12): 1754 – 1762.)
- [12] ZHANG X Y, LIN Y. A robust adaptive dynamic surface control for nonlinear systems with hysteresis input [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(9): 1264 – 1271.
- [13] CHEN W S, JIAO L C, DU Z B. Output-feedback adaptive dynamic surface control of stochastic non-linear systems [J]. *IET Control Theory Applications*, 2010, 4(12): 3012 – 3021.

## 作者简介:

刘希 (1986–),男,博士研究生,目前研究方向为先进控制理论与应用, E-mail: liuxiafe@126.com;

孙秀霞 (1962–),女,博士生导师,主要研究方向为控制理论与控制工程, E-mail: kgycw@163.com;

刘树光 (1981–),男,讲师,主要研究方向为控制理论与控制工程, E-mail: dawnny418@126.com;

徐嵩 (1985–),男,博士研究生,主要研究方向为控制理论与控制工程, E-mail: xusong\_pla@163.com;

郝震 (1984–),男,博士研究生,主要研究方向为计算机仿真, E-mail: haozhen\_004@126.com.