第 30 卷第 10 期
2013 年 10 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 30 No. 10
Oct. 2013

DOI: 10.7641/CTA.2013.30082

小波方法光顺的B样条模糊系统及其应用

谭彦华[1,2], 李洪兴[1†]

(1. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024; 2. 河北工业大学 理学院, 天津 300130)

摘要: 为了减少不准确数据对模糊系统的影响, 本文利用准均匀B样条小波方法光顺了B样条模糊系统. 首先将B样条模糊系统的多分辨率表示转化为准均匀B样条函数的多分辨率表示, 接着利用准均匀B样条小波分解方法对相应的准均匀B样条函数进行分解就得到了一系列光顺性逐渐增强、规则个数逐渐减少的模糊系统, 即基于小波方法的光顺B样条模糊系统. 最后, 仿真结果表明, 小波方法光顺的B样条模糊系统构造的模糊控制器在改善原来B样条模糊系统构造的模糊控制器性能的同时, 大大提高了原来控制器的运行效率.

关键词: 模糊系统; 小波光顺; B样条小波; 小波分解

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

B-spline fuzzy systems faired by wavelet method and its applications

TAN Yan-hua[1,2], LI Hong-xing[1†]

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;
2. School of Sciences, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China)

Abstract: The B-spline fuzzy systems (B-FSs) are faired by using the quasi-uniform B-spline wavelet decomposition method to reduce adverse effects of the inaccurate data. First, the multi-resolution of B-FSs is transformed to the multi-resolution of quasi-uniform B-splines; and then, the corresponding quasi-uniform B-splines are decomposed by using the quasi-uniform B-spline wavelet method to produce a series of fuzzy systems with gradually increasing fairness and gradually decreasing number of rules. Those fuzzy systems are called faired B-spline fuzzy systems by wavelet method. Simulation results show that fuzzy controllers constructed from faired B-FSs by wavelet method surpass in performances the fuzzy controllers by the original B-FSs, while consuming considerably less running time.

Key words: fuzzy systems; wavelet-based fairing method; B-spline wavelet; wavelet decomposition

1　引言(Introduction)

自从1965年Zadeh提出模糊集理论以来, 模糊系统已经成功的应用到包括模糊控制、分类、专家系统等很多领域. 众所周知, 模糊系统通常是由输入输出(I/O)数据构造的. 这些数据来自于实验、专家经验或者是观察数据. 然而, 由于软件或硬件的局限性, 使得笔者得不到准确的I/O数据[1]. 因此, 很多学者研究了模糊系统的鲁棒性[2–6]. 事实上, 模糊系统本质上是一个插值器[7], 也即当采样点取为上述输入数据时, 模糊系统的输出与上述输出数据差距不大. 于是, 当I/O数据有摄动时, 文献[1]利用优化方法给出了鲁棒性较好的模糊系统. 同时, 笔者在文献[8]中利用推广了的能量法光顺了文献[9–10]中的两类B样条模糊系统, 并用仿真实验表明, 能量法光顺的B样条模糊系统确实改善了模糊系统的性能, 尤其是在I/O数据不准确的时候.

由文献[8]知, 利用能量法光顺的B样条模糊系统, 光顺前后模糊系统的规则个数相同, 且随着规则和输入变量个数的增加, 处理的时间将迅速增加. 而在计算几何的众多光顺方法中, 注意到, 小波方法在光顺曲线(面)的同时具有减少控制顶点的作用, 且其运行时间对控制顶点个数不敏感. 又由于可将B样条模糊系统看成一类计算几何中的曲线(面), 而此时控制顶点个数与模糊系统的规则个数相当, 从而利用小波方法光顺B样条模糊系统可以实现: 1) 对模糊系统的光顺处理, 也即减少不准确的I/O数据对模糊系统的影响; 2) 对模糊系统的规则进行约简.

本文将利用小波方法对B样条模糊系统进行光顺和规则约简. 首先, 对于单输入单输出(single-input-single-output, SISO)B样条模糊系统, 笔者将它转化为$[0,1]$区间上的函数并用准均匀B样条函数对其逼近. 接着, 利用准均匀B样条函数的小波分解方法对逼近

收稿日期: 2013−01−27; 收修改稿日期: 2013−03−27.
†通信作者. E-mail: lhxqx@bnu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61074044, 61104038, 61374118); 国家“973”计划资助项目(2009CB320602).

函数进行分解, 并将分解得到的函数转化到原来的论域上, 就得到了一系列光顺性逐渐增强、规则个数逐渐减少的SISO模糊系统. 笔者称这些模糊系统为基于小波方法的光顺SISO B样条模糊系统. 对于多输入单输出(multiple-input-single-output, MISO)情形, 逐维按照光顺SISO B样条模糊系统的方法处理, 就可得到基于小波方法的光顺MISO B样条模糊系统. 最后, 利用仿真结果表明, 小波方法光顺的B样条模糊系统构造的模糊控制器改善了原来B样条模糊系统构造的模糊控制器的性能, 达到了与能量法光顺的B样条模糊系统构造的模糊控制器相当的性能. 但在上述所有控制器中, 基于小波方法的模糊控制器具有最高的运行效率.

2 预备知识(Preliminaries)

为了利用小波方法光顺B样条模糊系统, 本节介绍准均匀三次B样条小波的分解方法及其相关概念.

2.1 B样条尺度函数(B-spline scaling functions)

设k, d是两个正整数, 满足$k \geqslant d$, $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{k+d+1}$是一个非递减的序列, 则$d$次非均匀B样条$B_{0,d}(t), B_{1,d}(t), \cdots, B_{k,d}(t)$ 定义为[11–12]

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1,\ t_i \leqslant t < t_{i+1}, \\ 0,\ 其他, \end{cases}$$
$$B_{i,d}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} B_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} B_{i+1,d-1}(t),\ 规定\frac{0}{0} = 0,$$

其中: $t_i (i = 0, 1, \cdots, k + d + 1)$称为节点, $U = (t_0, t_1, \cdots, t_{k+d+1})$称为节点矢量.

特别地, 令$k = 2^j + d - 1$(j是非负整数), $d = 3$, 节点矢量

$$U = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{2^j}, \frac{2}{2^j}, \cdots, 1 - \frac{1}{2^j}, 1, 1, 1, 1),$$

则称$B_{0,d}(t), B_{1,d}(t), \cdots, B_{k,d}(t)$为$[0, 1]$上由节点矢量$U$定义的准均匀三次B样条[13]. 为表示B样条与整数j的关系, 记为$B^{(j)}_{0,3}(t), B^{(j)}_{1,3}(t), \cdots, B^{(j)}_{2^j+2,3}(t)$, 简记为$B^{(j)}_0, B^{(j)}_1, \cdots, B^{(j)}_{2^j+2}$, 节点矢量$U$记为$U_j$. 令

$$V^j = \mathrm{span}\{B^{(j)}_0, B^{(j)}_1, \cdots, B^{(j)}_{2^j+2}\},$$

在小波方法中称$B^{(j)}_0, B^{(j)}_1, \cdots, B^{(j)}_{2^j+2}$为线性空间$V^j$的B样条尺度函数, j称为层数[13]. 由de Boor递推公式可以证明[14], $V^0, V^1, \cdots, V^j, \cdots$具有嵌套关系: $V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^j \subset \cdots$. 令

$$\varPhi_j = (B^{(j)}_0, B^{(j)}_1, \cdots, B^{(j)}_{2^j+2}), \quad (1)$$

则有

$$\varPhi_{j-1} = \varPhi_j P_j, \quad (2)$$

其中矩阵P_j是$(2^j + 3) \times (2^{j-1} + 3)$阶带状矩阵[14].

2.2 准均匀三次B样条小波(Quasi-uniform cubic B-spline wavelets)

对任意$f(t), g(t) \in V^j$, 取内积为

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

则线性空间V^j关于这个内积构成内积空间. 由于$V^{j-1} \subset V^j$, 故V^{j-1}在V^j中存在唯一的正交补空间W^{j-1}, 并且使得$V^j = V^{j-1} \oplus W^{j-1}$, 其中: W^{j-1}的基$W^{(j-1)}_0, W^{(j-1)}_1, \cdots, W^{(j-1)}_{2^{j-1}-1}$称为$W^{j-1}$的准均匀3次B样条小波, 简称B样条小波, W^{j-1}称为小波空间[13]. 令

$$\varPsi_{j-1} = (W^{(j-1)}_0, W^{(j-1)}_1, \cdots, W^{(j-1)}_{2^{i-1}-1}), \quad (3)$$

则存在$(2^j + 3) \times 2^{j-1}$阶常数矩阵Q_j[14], 使得

$$\varPsi_{j-1} = \varPhi_j Q_j. \quad (4)$$

2.3 准均匀B样条函数的多分辨率表示及小波分解(Multi-resolution representation and wavelet decomposition of quasi-uniform cubic B-spline)

由第2.1节和第2.2节知, 对任意$f_j \in V^j$, 存在唯一的函数$f_{j-1} \in V^{j-1}$ 和$g_{j-1} \in W^{j-1}$, 使得

$$f_j = f_{j-1} + g_{j-1},\ 且\langle f_{j-1}, g_{j-1}\rangle = 0, \quad (5)$$

称f_{j-1}为f_j的低分辨部分, g_{j-1}为f_j的细节部分. 式(5)中, 由f_j获得f_{j-1} 和g_{j-1}的过程称为函数的小波分解[13].

小波分解过程可递归的应用于低分辨部分f_{j-1}, $f_{j-2}, \cdots, f_1$. 这个过程可表示为

$$\begin{aligned} f_j &= f_{j-1} + g_{j-1} = \\ & f_{j-2} + g_{j-2} + g_{j-1} = \cdots = \\ & f_0 + g_0 + \cdots + g_{j-1}, \end{aligned}$$

其中: $f_i \in V^i$, $g_i \in W^i (i = 0, 1, \cdots, j - 1)$. $f_0, f_1, \cdots, f_{j-1}$构成不同层次$i(i = 0, 1, \cdots, j - 1)$下对$f_j$的逼近, 称为$f_j$ 的多分辨率逼近. $g_0, g_1, \cdots, g_{j-1}$表示不同层次的$f_i (i = 0, 1, \cdots, j - 1)$逼近$f_j$时丢失的细节信息. 称$f_0, g_0, g_1, \cdots, g_{j-1}$为$f_j$的多分辨率表示[13].

文献[13]给出了由f_j计算f_{j-1}和g_{j-1}的方法. 设$f_j = \varPhi_j C_j$, 其中C_j是由f_j的$2^j + 3$个控制顶点构成的列向量. 设$f_{j-1} = \varPhi_{j-1} C_{j-1}$及$g_{j-1} = \varPsi_{j-1} D_{j-1}$, 由式(2)和式(4)知

$$\varPhi_j C_j = f_j = f_{j-1} + g_{j-1} = \varPhi_j P_j C_{j-1} + \varPhi_j Q_j D_{j-1},$$

故可由

$$(P_j\ \ Q_j) \begin{pmatrix} C_{j-1} \\ D_{j-1} \end{pmatrix} = C_j \quad (6)$$

解出C_{j-1}和D_{j-1}, 从而求得f_{j-1}和g_{j-1}.

3　基于小波方法的光顺单输入单输出B样条模糊系统及其规则约简 (Faired SISO B–FSs and its rule-reduction based on wavelet method)

小波分解时若保留低分辨部分, 滤掉细节部分, 则分解的次数越多, 得到的函数越光顺[15]. 因此, 小波分解可用于光顺操作. 这一节, 笔者将利用小波分解的方法实现SISO B样条模糊系统的光顺及其规则约简. 由于空间V^j中的函数均定义在$[0,1]$区间上, 为了对任意的B样条模糊系统进行小波光顺, 笔者首先将其转化为$[0,1]$区间上的函数, 然后用$[0,1]$区间上的准均匀三次B样条函数逼近这个$[0,1]$区间上的函数. 接着, 对这个准均匀B样条函数进行小波分解并得到各个层次下的多分辨率逼近函数. 最后, 将逼近函数转化到原来的论域上, 就得到了各个层次下光顺的模糊系统. 由于层数越小, 逼近函数越光顺, 控制顶点也越少, 故由逼近函数转化得到的模糊系统也随着层数的减少而越来越光顺. 同时, 这些模糊系统相应的规则也越来越少. 从而可知, 利用小波分解方法在光顺模糊系统的同时实现了规则约简.

3.1　B样条模糊系统的准均匀三次B样条函数逼近 (To approximate B-FSs by quasi-uniform cubic B-splines)

设$F(x)$是由n条规则构造的B样条模糊系统, $x\in[a,b]$, 令

$$f(x)\triangleq F((b-a)x+a),\ x\in[0,1],\tag{7}$$

也即将$[a,b]$区间上的模糊系统$F(x)$转化为$[0,1]$区间上的函数$f(x)$. 于是可用$[0,1]$区间上的准均匀B样条函数$f_j(x)$对$f(x)$进行逼近, 从而可将任意的SISO B样条模糊系统的多分辨率表示转化为准均匀B样条函数的多分辨率表示, 其中$f_j\subset V^j$. $f_j(x)$逼近$f(x)$的算法如下:

Step 1　选取正整数j, 使得$n\leqslant 2^j+1$;

Step 2　求出$f(k/2^j)$, $k=0,1,\cdots,2^j$;

Step 3　根据求得的2^j+1个数据点$(k/2^j, f_j(k/2^j))$, 再根据实际需要加上两个边界条件$f_j'(0)$和$f_j'(1)$, 反算出具有2^j+3个控制顶点的准均匀三次B样条函数$f_j(x)$, 使$f_j(k/2^j)=f(k/2^j)$. 称$f_j(x)$为模糊系统$F(x)$相应的准均匀三次B样条逼近函数.

3.2　基于小波方法的B样条模糊系统光顺及其规则约简(To fair the B-FSs and reduce their rules by wavelet method)

设与B样条模糊系统$F(x)$相应的准均匀三次B样条逼近函数为$f_j(x)$, 则由3.1节的逼近算法知, $f_j(x)$可由2^j+1个数据点和两个导数边界条件唯一确定, 也即除去边界条件, $f_j(x)$对应的所有数据点组成集合$\{(k/2^j, f_j(k/2^j))|k=0,1,\cdots,2^j\}$. 令

$$F_j(x)\triangleq f_j(\frac{x-a}{b-a}),$$

则$F_j(x)$为$[a,b]$上的模糊系统, 且其对应的I/O数据为

$$\{((b-a)\frac{k}{2^j}+a, f_j(\frac{k}{2^j}))|k=0,1,\cdots,2^j\}.$$

由于在模糊系统的设计中总结规则和寻找一组I/O数据是一回事[7], 故$F_j(x)$相当于2^j+1条规则构造的模糊系统, 在这里笔者称之为第j层光顺的模糊系统.

令$f_j=\Phi_jC_j$, 由式(6)可求出C_{j-1}, 从而得到f_j的低分辨部分$f_{j-1}=\Phi_{j-1}C_{j-1}$, 故$f_{j-1}$可由$2^{j-1}+1$个数据点

$$\{(\frac{k}{2^{j-1}}, f_{j-1}(\frac{k}{2^{j-1}}))|k=0,1,\cdots,2^{j-1}\}$$

及两个相应的边界条件唯一确定, 且第$j-1$层光顺的模糊系统

$$F_{j-1}(x)\triangleq f_{j-1}(\frac{x-a}{b-a})$$

为由$2^{j-1}+1$条规则构造的模糊系统. 继续分解下去, 即可得到不同层次的光顺的模糊系统$F_k(x)$, $k=0,1,\cdots,j$及其相应的被约简了的规则(式(8)), 笔者称$F_k(x)$, $k=0,1,\cdots,j$为基于小波方法的光顺SISO B样条模糊系统.

$$\begin{aligned}&f_j\rightarrow F_j(x)(2^j+1\text{条规则构造的模糊系统})\Rightarrow\\&f_{j-1}\rightarrow F_{j-1}(x)(2^{j-1}+1\text{条规则构造的模糊系统})\Rightarrow\\&\quad\vdots\\&f_0\rightarrow F_0(x)(2\text{条规则构造的模糊系统}).\end{aligned}\tag{8}$$

综上, 一个n条规则的B样条模糊系统$F(x)$, 经过小波分解后可得到一系列规则逐渐减少且光顺性逐渐增加的模糊系统, 从而在实现模糊系统光顺的同时对模糊系统的规则进行了约简.

4　基于小波方法的光顺MISO B样条模糊系统及其规则约简(Faired MISO B-FSs and its rule-reduction based on wavelet method)

对于MISO B样条模糊系统, 逐维按照光顺SISO B样条模糊系统的方法处理, 就可在光顺的同时实现规则约简. 下面仅以双输入单输出(double-input-single-output,DISO)的B样条模糊系统为例进行说明.

对mn条规则构造的DISO B样条模糊系统$F(x,y)$, $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$, 令

$$\begin{aligned}&f(x,y)\triangleq F((b-a)x+a,(d-c)y+c),\\&(x,y)\in[0,1]\times[0,1],\end{aligned}\tag{9}$$

也即将$[a,b]\times[c,d]$区间上的B样条模糊系统$F(x,y)$转化为$[0,1]^2$区间上的函数$f(x,y)$. 于是可用$[0,1]^2$区间上的准均匀双三次B样条函数$f_{j_1,j_2}(x,y)$对$f(x,y)$进行逼近, 从而可将任意的DISO B样条模糊系统的

多分辨率表示转化为准均匀双三次B样条函数的多分辨率表示. 逼近算法如下:

Step 1 选取正整数j_1, j_2, 使得$m \leqslant 2^{j_1}+1, n \leqslant 2^{j_2}+1$;

Step 2 求出$f(k/2^{j_1}, l/2^{j_2}), k=0,1,\cdots,2^{j_1}, l=0,1,\cdots,2^{j_2}$;

Step 3 根据求得的$(2^{j_1}+1)\times(2^{j_2}+1)$个数据点$(k/2^{j_1}, l/2^{j_2}, f(k/2^{j_1}, l/2^{j_2}))$, 再增加相应的边界条件, 反算出具有$(2^{j_1}+3)\times(2^{j_2}+3)$个控制顶点的准均匀双三次B样条函数$f_{j_1,j_2}(x,y)$, 使

$$f_{j_1,j_2}(\frac{k}{2^{j_1}}, \frac{l}{2^{j_2}}) = f(\frac{k}{2^{j_1}}, \frac{l}{2^{j_2}}).$$

称f_{j_1,j_2}为B样条模糊系统F相应的准均匀双三次B样条逼近函数.

由于$f_{j_1,j_2}(x,y)$是由$(2^{j_1}+1)\times(2^{j_2}+1)$个数据点及其相应的边界条件唯一确定的, 故由其得到的模糊系统

$$F_{j_1,j_2}(x,y) \triangleq f_{j_1,j_2}(\frac{x-a}{b-a}, \frac{x-c}{d-c}) \tag{10}$$

是由$(2^{j_1}+1)\times(2^{j_2}+1)$条规则构造的第$(j_1,j_2)$层光顺的模糊系统.

事实上,

$$f_{j_1,j_2}(x,y) = \Phi_{j_1} V \Phi_{j_2}^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

其中V为一个$(2^{j_1}+3)\times(2^{j_2}+3)$阶的矩阵. 下面给出由$f_{j_1,j_2}$求逼近函数$f_{j_1-1,j_2}$和$f_{j_1-1,j_2-1}$的步骤:

Step 1 令$V = (v_1, v_2, \cdots, v_{2^{j_1}+3})^{\mathrm{T}}$, 对$v_i$(也即$V$的第$i$行)求解线性方程组

$$(P_{j_1}\ \ Q_{j_1}) \begin{pmatrix} C^i_{j_1-1} \\ D^i_{j_1-1} \end{pmatrix} = v_i^{\mathrm{T}},\ i=1,2,\cdots,2^{j_1}+3,$$

将得到的$C^i_{j_1-1}$做成矩阵

$$V_1 = (C^1_{j_1-1}, C^2_{j_1-1}, \cdots, C^{2^{j_1}+3}_{j_1-1})^{\mathrm{T}}.$$

Step 2 $f_{j_1-1,j_2} = \Phi_{j_1-1} V_1 \Phi_{j_2}^{\mathrm{T}}$.

Step 3 令$V_1 = (v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1,2^{j_1-1}+3})$, 对$V_1$的每列$v_{1i}$, 解线性方程组

$$(P_{j_2}\ \ Q_{j_2}) \begin{pmatrix} C^i_{j_2-1} \\ D^i_{j_2-1} \end{pmatrix} = v_{1i},\ i=1,2,\cdots,2^{j_1-1}+3,$$

并做$(2^{j_1-1}+3)\times(2^{j_2-1}+3)$阶的矩阵

$$V_2 = (C^1_{j_2-1}, C^2_{j_2-1}, \cdots, C^{j_2-1}_{j_2-1});$$

Step 4 $f_{j_1-1,j_2-1} = \Phi_{j_1-1} V_2 \Phi_{j_2-1}^{\mathrm{T}}$.

注 1 事实上, Step 1是按照3.2节的方法对矩阵V的行向量进行的小波分解, 而Step 3则是对Step 2得到的矩阵V_1按列利用3.2节的方法进行的小波分解. 如果Step 1是按列对矩阵V进行小波分解, 则Step 2得到的将是f_{j_1,j_2-1}.

继续分解下去, 并按照式(10)的方法, 就可以得到基于小波方法的光顺DISO B样条模糊系统F_{k_1,k_2}, $k_1=0,1,\cdots,j_1$, $k_2=0,1,\cdots,j_2$及其对应的约简的规则(式(12)).

$$\begin{aligned}
&f_{j_1,j_2} \to F_{j_1,j_2}((2^{j_1}+1)(2^{j_2}+1)\text{条规则}) \Rightarrow \\
&f_{j_1-1,j_2} \to F_{j_1-1,j_2}((2^{j_1-1}+1)(2^{j_2}+1)\text{条规则}) \Rightarrow \\
&f_{j_1-1,j_2-1} \to \\
&F_{j_1-1,j_2-1}((2^{j_1-1}+1)(2^{j_2-1}+1)\text{条规则}) \Rightarrow \\
&\qquad \vdots \\
&f_{0,0} \to F_{0,0}(x)(2^2\text{条规则}).
\end{aligned} \tag{12}$$

综上可知, 对于MISO B样条模糊系统, 只需逐维按照对SISO B样条模糊系统小波光顺的方法操作, 即可得到基于小波方法的光顺MISO B样条模糊系统, 并同时实现MISO B样条的模糊系统的规则约简.

5 仿真(Simulations)

大家都知道, 模糊控制器是一类闭环的模糊系统, 而自适应模糊控制器是带有自适应或者训练算法的模糊系统[16–21]. 特别的, 文献[22–24]提出了变论域的方法, 并利用这一方法成功的实现了四级倒立摆的仿真[25]及实物实验. 这一节, 本文将利用上文中得到的模糊系统为二级倒立摆的稳定控制设计变论域自适应模糊控制器, 并以此来检验他们的性能. 特别的, 我们还利用约简得到的最简规则设计了控制器, 以此来检验约简后的规则的性能.

二级倒立摆主要由小车、摆杆组成, 它们之间自由链接. 小车可以在水平导轨上左右移动, 摆杆可以在铅锤平面内运动. 规定顺时针方向的转角和力矩均为正, 并约定以下记号: u为外界作用力, x为小车位移, θ_i为摆杆i与铅锤线方向的夹角, O_i和G_i为摆杆的链接点和摆杆的重心位置, m_0为小车的质量, m_i为摆杆i的质量, J_i为摆杆i绕O_i的转动惯量, l_i为O_i到G_i的距离, L_i为摆杆i的长度, f_0为小车与导轨间的滑动摩擦系数, f_i为摆杆i绕O_i的转动摩擦阻力矩系数$(i=1,2)$. 二级倒立摆的数学模型为

$$H_1 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = H_2 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ a_1 g \sin\theta_1 \\ a_2 g \sin\theta_2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1\cos\theta_1 & b_1 & a_2 L_1 \mathcal{A} \\ a_2\cos\theta_2 & a_2 L_1 \mathcal{A} & b_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_1 - f_2 & a_2 L_1 \dot{\theta}_2 \mathcal{B} + f_2 \\ 0 & -a_2 L_1 \dot{\theta}_1 \mathcal{B} + f_2 & -f_2 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{B} = \sin(\theta_2 - \theta_1),\ a_1 = m_1 l_1 + m_2 L_1,$

$a_2 = m_2 l_2,\ b_1 = J_1 + m_2 L_1^2,\ b_2 = J_2.$

对于二级倒立摆系统, 控制目标是通过对小车施加作用力u, 使摆1、摆2的转角θ_1, θ_2趋于零, 与此同时, 小车要移动到指定位置x_{d}处. 在仿真实验中, 二级倒立摆系统中诸参数分别取为:

$$m_1 = 0.373\,\mathrm{kg},\ m_2 = 0.088\,\mathrm{kg},\ L_1 = 0.397\,\mathrm{m},$$
$$l_1 = 0.31815\,\mathrm{m},\ L_2 = 0.345\,\mathrm{m},\ l_2 = 0.15205\,\mathrm{m},$$
$$J_1 = 0.044048\,\mathrm{kg\cdot m^2},\ J_2 = 0.00297947\,\mathrm{kg\cdot m^2},$$
$$f_1 = 0\,\mathrm{N\cdot s\cdot m},\ f_2 = 0\,\mathrm{N\cdot s\cdot m},\ g = 9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

取状态变量$z = (x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)^{\mathrm{T}}$, 用文献[25]的方法为二级倒立摆设计变论域自适应模糊控制器:

$$u = \| k \|_2\, \beta(t) F(\frac{e}{\alpha(e)}, \frac{ec}{\alpha(ec)}), \tag{14}$$

其中: k是用LQR方法求得的状态反馈矩阵,

$$\beta(t) = \int_0^t 5(e + ec) F(\frac{e}{\alpha(e)}, \frac{ec}{\alpha(ec)})\, \| k \|_2\, \mathrm{d}t + 1,$$

$F(\cdot)$是一个DISO的模糊系统,

$$e \triangleq \frac{k(1)z(1) + k(2)z(2) + k(3)z(3)}{\| k \|_2},$$

$$ec \triangleq \frac{k(4)z(4) + k(5)z(5) + k(6)z(6)}{\| k \|_2},$$

分别称为综合误差和综合误差变化率, $\alpha(e)$和$\alpha(ec)$分别为误差和误差变化率的伸缩因子.

取综合误差和综合误差变化率的初始论域均为$[-1, 1]$. 取e的模糊划分为:

$$A_1 = NB,\ A_2 = NM,\ A_3 = NS,\ A_4 = ZO,$$
$$A_5 = PS,\ A_6 = PM,\ A_7 = PB,$$

ec的模糊划分为:

$$B_1 = NB,\ B_2 = NM,\ B_3 = NS,\ B_4 = ZO,$$
$$B_5 = PS,\ B_6 = PM,\ B_7 = PB.$$

基于综合误差和综合误差变化率的模糊控制规则如表1所示.

表 1　二级倒立摆的模糊控制规则

Table 1　Control rules for double inverted pendulum

ec	e						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
B_1	−0.8333	−0.8333	−0.6333	−0.5	−0.3333	−0.1667	0
B_2	−0.8333	−0.6333	−0.5	−0.3333	−0.1667	0	0.1667
B_3	−0.6333	−0.5	−0.3333	−0.1667	0	0.1667	0.3333
B_4	−0.5	−0.3333	−0.1667	0	0.1667	0.3333	0.5
B_5	−0.3333	−0.1667	0	0.1667	0.3333	0.5	0.6333
B_6	−0.1667	0	0.1667	0.3333	0.5	0.6333	0.8333
B_7	0	0.1667	0.3333	0.5	0.6333	0.8333	0.8333

由此, 笔者可以认为对于模糊系统$F(\cdot)$来说, 相对好的I/O数据为

$$\mathrm{IOD} \triangleq \{(x_i, y_j, z_{ij}) | i = 1, 2, \cdots, 7,\ j = 1, 2, \cdots, 7\},$$

其中:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_7) = (-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1),$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_7) = (-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1),$$

矩阵$(z_{ij})_{7\times 7}$由表1中的数据构成.

对于不准确的I/O数据, 笔者仅考虑加高斯白噪声的数据. 在这个仿真中, 通过给输入输出数据(input-output data, IOD)加均值为0, 方差为$(0.001)^2$的高斯白噪声得到不准确的I/O数据IOD^1.

为了利用上述数据构造基于小波方法的光顺B样条模糊系统, 首先构造一个第1类B样条模糊系统F_{B}并将其转化为$[0, 1]^2$上的函数f. 接着, 取$j_1 = 3, j_2 = 3$, 构造准均匀双三次B样条函数f_{j_1, j_2}来逼近f, 其中边界条件取矩形$[0, 1]^2$的4条边界上所有节点处的一阶法向偏导数为0, 4个顶点处的二阶混合偏导数为0. 随后对f_{j_1, j_2}进行小波分解得到基于小波方法光顺的B样条模糊系统$F_{i,j} (i = 0, 1, 2,\ j = 0, 1, 2)$, 其中$F_{0,0}$的规则个数最少, 只有$2^2$条, 它们是$\{(x_i, y_j, z_{ij}) | i = 1, 2, j = 1, 2\}$, 其中:

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = (-1, 1),$$

$$(z_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -0.91 & 0 \\ 0 & 0.91 \end{pmatrix}.$$

利用上述2^2条规则, 笔者构造了以三角波为隶属函数的模糊系统F_{tri}, 此处称之为约简的模糊系统. 为了比较, 笔者利用文献[8]中的能量法光顺了第1类B样条模糊系统F_B, 并记光顺得到的模糊系统为F_{en}. 接下来, 取基于小波方法的光顺B样条模

糊系统$F_{2,2}$, $F_{1,1}$和$F_{0,0}$, 约简的模糊系统F_{tri}, 第1类B样条模糊系统F_B和能量法光顺的B样条模糊系统F_{en}来代替式(14)中的$F(\cdot)$, 并记相应的控制器为$u_{2,2}$, $u_{1,1}$, $u_{0,0}$, u_{tri}和u_{en}.

取$Q=\mathrm{diag}\{1,1,1,1,1,1\}$, $R=0.1$求状态反馈矩阵k, 并取

$$\alpha(e)=1-0.97\exp(-e^2),$$

$$\alpha(ec)=1-0.97\exp(-0.2e^2-0.8ec^2),$$

初值$z_0=(0\ \ 0.03\ \ -0.03\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^{\mathrm{T}}$, $T=100\,\mathrm{s}$. 表2和表3分别展示了数据IOD和IOD^{1}情形时, 控制系统的各项性能指标, 其中

$$\mathrm{diff}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}\sum\limits_{i=1}^{7}(F(x_i,y_j)-z_{ij})^2}{\sum\limits_{i=1}^{7}\sum\limits_{i=1}^{7}z_{ij}^2}\times 100\%$$

定义为模糊系统F对数据的相对调整量, 运行时间是MATLAB程序在机器配置为Intel Core 2 Duo CPU(E8400, 3.00 GHz), 1.98 GB(2.99 GHz)内存处理器下的运行时间, u_{en}的运行时间中没有包含其计算系数矩阵的时间1.6266×10^3 s, 表3是100次随机噪声后的平均结果.

表 2 数据IOD情形下控制系统的性能指标

Table 2 Performance index of control systems with I/O data IOD

	diff / %	稳态误差 / m			超调量 / m			运行时间 / s
		$x(\times10^{-10})$	$\theta_1(\times10^{-10})$	$\theta_2(\times10^{-10})$	x	θ_1	θ_2	t
$u_{2,2}$	0.2588	3.2548	8.7179	0.9262	0.2925	0.0636	0.0495	12.4840
$u_{1,1}$	0.1167	2.4196	6.4810	0.6886	0.2926	0.0636	0.0496	12.5930
$u_{0,0}$	0.2248	1.9100	5.1158	0.5436	0.2927	0.0636	0.0496	12.0930
u_{en}	1.1955	2.0183	5.4058	0.5742	0.2928	0.0636	0.0496	244.5940
u_B	0	8.2109	21.9930	2.3370	0.2926	0.0636	0.0496	221.1250
u_{tri}	4.3068	1.8520	4.9601	0.5263	0.3052	0.0668	0.0523	28.7180

表 3 数据IOD^{1}情形下控制系统的性能指标

Table 3 Performance index of control systems with I/O data IOD^1

	diff / %	稳态误差 / m			超调量 / m			运行时间 / s
		x	$\theta_1(\times10^{-10})$	$\theta_2(\times10^{-10})$	x	θ_1	θ_2	t
$u_{2,2}$	0.2401	0.0391	8.3622	0.8885	0.3270	0.0638	0.0518	45.4118
$u_{1,1}$	0.1273	0.0321	8.4658	0.8995	0.3205	0.0638	0.0513	45.4051
$u_{0,0}$	0.2925	0.0078	8.6381	0.9178	0.2949	0.0637	0.0498	45.2735
u_{en}	1.2557	0.0097	7.7245	0.8205	0.2876	0.0636	0.0494	250.0764
u_B	0	0.0341	9.7329	1.0342	0.3204	0.0634	0.0518	231.5624
u_{tri}	5.1021	0.0169	4.3682	0.4635	0.3159	0.0665	0.0524	59.8975

由表2和表3可以看出:

1) 不管I/O数据是否准确, u_{tri}都能够实现二级倒立摆的稳定控制, 虽然它相应控制系统的性能比其他两类光顺的模糊控制器略差, 但其运行效率仅次于基于小波方法的模糊控制器;

2) 对于相对准确的I/O数据IOD, 只需小的调整量, 基于小波方法的模糊控制器的控制效果就优于原来的B样条模糊系统F_{B}构造的模糊控制器u_{B}, 也即表2中$u_{2,2}$的控制效果优于u_{B}. 而对于不准确的I/O 数据IOD^1, 则需要较大的调整量, 基于小波方法的模糊控制器的控制效果才能优于u_{B}, 也即表3中$u_{0,0}$的控制效果优于u_{B}. 此外, 无论何种数据情形, 基于小波方法的模糊控制器的运行效率均远高于原来的B样条模糊系统F_{B}构造的模糊控制器u_{B};

3) 除了数据为IOD情形时, 基于小波方法的模糊控制器$u_{0,0}$相应的控制系统的性能略优于基于能量法的模糊控制器u_{en}外, 其他情形下, 基于小波方法和能量法的模糊控制器的控制效果虽然各有优劣, 但差别均不大, 只是无论何种数据, 基于小波方法的所有模糊控制器相应的控制系统的运行效率均远高于基于能量法的模糊控制器相应的控制系统.

综上所述, 利用约简的规则构造的模糊控制器能够实现倒立摆的稳定控制, 从模糊系统构造的控制器的控制效果来看, 小波方法光顺得到的模糊系统的性能优于光顺前的模糊系统, 而与能量法光顺的模糊系统的性能差别不大, 但是小波方法光顺

的B样条模糊系统构造的控制器的运行效率远高于其他控制器.

6 结论(Conclusions)

本文首先将B样条模糊系统转化为$[0,1]^n$上的函数, 接着利用准均匀B样条函数对其逼近, 由此将模糊系统的小波分解问题转化为准均匀B样条的小波分解问题. 随后, 利用准均匀B样条的小波分解方法得到了基于小波方法的光顺B样条模糊系统. 为了验证小波方法光顺的B样条模糊系统的性能, 文中利用它们为二级倒立摆的稳定设计了变论域自适应模糊控制器. 仿真结果表明, 小波方法光顺的模糊系统改善了原来模糊系统的性能, 达到了与能量法光顺的模糊系统相当的性能, 同时大大提高了运行效率. 另外, 利用约简的规则构造的模糊控制器也能够实现倒立摆的稳定控制, 且运行效率也很高. 故本文的方法更有利于实物实现. 事实上, 本文得到的光顺的模糊系统是具有一定鲁棒性的模糊系统, 详细分析它们的鲁棒性是笔者进一步的工作.

参考文献(References):

[1] BIGLARBEGIAN M, MELEK W, MENDEL J. On the robustness of Type-1 and interval Type-2 fuzzy logic systems in modeling [J]. *Information Sciences*, 2011, 181(7): 1325 – 1347.

[2] SONG W Y, WANG D G, WANG W G. Analysis for perturbation of fuzzy systems modeling [J]. *ICIC Express Letters*, 2009, 3(3): 573 – 578.

[3] LI Y M, LI D C, PEDRYCZ W, et al. An approach to measure the robustness of fuzzy reasoning [J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2005, 20(4): 393 – 413.

[4] LI Y M. Approximation and robustness of fuzzy finite automata [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2008, 47(2): 247 – 257.

[5] ZHANG L, CAI K Y. Optimal fuzzy reasoning and its robustness analysis [J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2004, 19(11): 1033 – 1049.

[6] ZHENG Z, LIU W, CAI K Y. Robustness of fuzzy operators in environments with random perturbations [J]. *Soft Computing*, 2010, 14(12): 1339 – 1348.

[7] LI H X. Interpolation mechanism of fuzzy control [J]. *Science in China (Series E)*, 1998, 41(3): 313 – 320.

[8] TAN Y H, LI H X. Faired MISO B-spline fuzzy systems and its applications [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, Article ID 870595.

[9] 谭彦华, 李洪兴, 许吉祥. 两类B样条模糊系统及其应用 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(11): 1651 – 1657.
(TAN Yanhua, LI Hongxing, XU Jixiang. Two classes of B-spline fuzzy systems and their applications [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28 (11): 1651 – 1657.)

[10] 谭彦华, 李洪兴, 马秀娟, 等. B样条函数在模糊系统中的应用 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(11): 已录用.
(TAN Yanhua, LI Hongxing, MA Xiujuan, et al. The application of B-spline functions in fuzzy systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(11): Accepted.)

[11] COX M G. The numerical evaluation of B-splines [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1972, 10 (2): 134 – 149.

[12] DE BOOD C. On calculating with B-splines [J]. *Journal of Approximation Theory*, 1972, 6(1): 50 – 62.

[13] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
(ZHU Xinxiong. *Curve and Surface Modeling Technology* [M]. Beijing: Science Press, 2000.)

[14] FINKELSTEIN A, SALESIN D. Multiresolution curves [C] //*Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*. Orlando: SIGGRAPH' 94, 1994: 261 – 268.

[15] 孙延奎, 朱心雄. 曲线分层表示的小波方法 [J]. 工程图学学报, 1999(1): 40 – 44.
(SUN Yankui, ZHU Xinxiong. Hierarchical representations of curves based on wavelets [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 1999(1): 40 – 44.)

[16] WANG L X. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*,1993, 1(2): 146 – 155.

[17] TONG S C, WANG W, QU L J. Decentralized robust control for uncertain T-S fuzzy large-scale systems with time-delay [J]. *International Journal of Innovative Computing Information and Control*, 2007, 3(3): 657 – 672.

[18] TONG S C, LI Y, LI Y M, et al. Observer-based adaptive fuzzy backstepping control for a class of stochastic nonlinear strict-feedback systems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, 2011, 41(6): 1693 – 1704.

[19] 范永青, 王银河, 罗亮, 等. 带有伸缩器和饱和器的一类非线性系统模糊自适应控制设计 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(9): 1105 – 1110.
(FAN Yongqing, WANG Yinhe, LUO Liang, et al. Fuzzy adaptive control design for a class of nonlinear systems with scalers and saturators [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(9): 1105 – 1110.)

[20] 贺乃宝, 高倩, 姜长生, 等. MIMO非仿射非线性系统的自适应模糊控制 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(12): 1783 – 1786.
(HE Naibao, GAO Qian, JIANG Changsheng, et al. Adaptive fuzzy control for MIMO non-affine nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(12): 1783 – 1786.)

[21] 潘永平, 黄道平, 孙宗海. 欠驱动船舶航迹Backstepping自适应模糊控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(7): 907 – 914.
(PAN Yongping, HUANG Daoping, SUN Zonghai. Backstepping adaptive fuzzy control for track-keeping of underactuated surface vessels [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(7): 907 – 914.)

[22] 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功—–关于"关于模糊逻辑似是而非的争论"的似是而非的介入 [J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(4): 1 – 14.
(LI Hongxing. To see the success of fuzzy logic from mathematical essence of fuzzy control—on "the paradoxical success of fuzzy logic" [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1995, 9(4): 1 – 14.)

[23] LI H X, MIAO Z H, LEE E S. Variable universe stable adaptive fuzzy control of a nonlinear system [J]. *Computers Mathematics with Applications*, 2002, 44(5/6): 799 – 815.

[24] LI H X. Adptive fuzzy controllers based on variable universe [J]. *Science China (Series E)*, 1999, 42(1): 10 – 20.

[25] LI H X, MIAO Z H, WANG J Y. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum [J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 45(2): 213 – 224.

作者简介:

谭彦华 (1980–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为模糊系统建模及模糊控制, E-mail: tanyh@hebut.edu.cn;

李洪兴 (1953–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制、变论域自适应控制、不确定性系统的统一理论和微分方程逼近论等, E-mail: lhxqx@bnu.edu.cn.