

无刷直流电动机系统的有限时间同步

徐林^{1†}, 陈云¹, 刘忠¹, 陈永健²

(1. 海军工程大学 电子工程学院, 湖北 武汉 430033; 2. 91715部队, 广东 广州 510450)

摘要: 有限时间同步能够确保两个系统在有限的时间内实现同步, 具有重要的研究意义. 但常见的控制器往往只能确保两个系统渐近同步, 而能够实现有限时间同步的控制器目前尚不多见, 且存在控制器复杂, 不连续易产生抖动现象等缺陷. 为此, 本文设计了一种简单连续的有限时间同步控制器, 实现了主-从无刷直流电动机系统(the brushless DC motor system, BLDCM)的有限时间同步. 首先建立了基于该控制器的主-从有限时间同步框架. 然后, 从理论上证明了两个相同的BLDCM系统有限时间同步的充分性同步判据. 最后, 通过数值实例验证了所得判据的有效性.

关键词: 混沌; 有限时间同步; BLDCM系统; 同步时间

中图分类号: O231.2 **文献标识码:** A

Finite-time synchronization for the brushless DC motor systems

XU Lin^{1†}, CHEN Yun¹, LIU Zhong¹, CHEN Yong-jian²

(1. College of Electronic Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei 430033, China;
2. Army 91715, Guangzhou Guangdong 510450, China)

Abstract: It is a significant work to get two systems operating in synchronization within a finite time. Most conventional controllers only ensure the asymptotical synchronization. At present, some controllers can achieve finite-time synchronization but are with either complex configuration or switched configuration causing chattering. We develop a controller with simple and continuous configuration for achieving the finite-time synchronization of the brushless DC motor (BLDCM) systems. Firstly, the master-slave finite-time synchronization scheme for this controller is established; and then, some sufficient criteria for the finite-time synchronization of two BLDCM systems are theoretically proved by means of the finite-time stabilization theory. Finally, the effectiveness of the obtained criteria is validated by numerical examples.

Key words: chaos; finite-time synchronization; the brushless DC motor systems; synchronization time

1 引言(Introduction)

无刷直流电动机系统(brushless DC motor system, BLDCM)是一个三维自治系统^[1-2], 它被广泛地应用于机器人^[3]、航空航天^[4]等领域. 它的主要功能是能够消除电刷和转接器之间的物体接触^[1-2].

近年来, BLDCM系统的许多动力特性, 例如混沌, 已经得到了广泛的研究^[5-8]. 此外, 和许多系统一样^[9-10], BLDCM系统的渐近同步理论也得到了广泛而深入的研究^[1, 11].

值得注意的是, 上面提到的渐近同步只能保证BLDCM系统在时间趋于无穷大时实现同步. 而在实际工程应用中, 笔者总是希望混沌系统能够在有限的时间内实现同步. 但常见的控制器往往只能确保两个系统渐近同步, 这是因为某控制器下两个系统达到有

限时间同步的必要条件是其误差系统在原点是而非Lipschitz连续的^[12], 这些控制器不能满足这一条件. 对此, 近年来一些有限时间控制器已经被用于实现主-从混沌系统的有限时间同步, 例如: 终端滑膜控制^[13-15]、基于Lyapunov函数的控制^[16]、主动控制^[17]等等^[18]. 然而这些控制器的结构比较复杂, 从而使得成本过高; 有的不连续, 容易产生抖动现象^[14]. 为此, 本文设计了一种简单且连续的控制器的研究BLDCM系统的有限时间同步问题.

本文的结构如下: 第2部分介绍了证明判据过程中要用到的引理. 第3部分给出了BLDCM系统的表达式, 建立了在所设计的控制器下的BLDCM系统的有限时间同步框架. 第4部分基于该同步框架, 证明了同步框架中两个BLDCM系统有限时间同步的充分性代

数判据. 第5部分通过数值仿真证明了所得判据的有效性. 最后, 在第6部分得出了一些结论.

2 引理(Preliminaries)

考虑如下系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{D}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{f}: \mathbb{R}^+ \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续函数, 且 $\mathbf{f}(t, 0) = 0$ 对任意 $t \geq t_0$ 都成立, 即原点是系统(1)的一个平衡点.

引理 1^[12] 如果存在一个连续可微的正定函数 $V: \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$, 实数 $\beta > 0$ 和实数 $\alpha \in (0, 1)$ 以及一个原点的开邻域 $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{D}$, 使得

$$\dot{V}(\mathbf{x}) + \beta V(\mathbf{x})^\alpha \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{U} \setminus \{0\}, \quad (2)$$

那么系统(1)在原点是有限时间稳定的, 并且停息时间函数满足

$$T(\mathbf{x}_0) \leq \frac{1}{\beta(1-\alpha)} V(\mathbf{x}_0)^{1-\alpha}, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{U}, \quad (3)$$

其中 \mathbf{x}_0 是变量 \mathbf{x} 的初始值.

另外, 如果 $\mathbf{D} = \mathbb{R}^n$, V 是径向无界的, 那么系统(1)是全局有限时间稳定的.

引理 2^[19] 对任意正实数 α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ 和 $0 < p < 2$, 下面的不等式成立:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^p \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^2.$$

3 有限时间同步框架(Finite-time synchronization scheme)

BLDCM系统^[2]可以描述为

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (y_1, y_2, y_3)^T, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \rho \\ 0 & -\delta & 0 \\ \sigma & 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} -y_2 y_3 + v_q \\ y_1 y_3 + v_d \\ \eta y_1 y_2 - T_L \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

参数 $\rho, v_q, v_d, \delta, \eta, T_L$ 和 σ 为系统参数且都是正数.

给定两个相同的主BLDCM系统和从BLDCM系统:

$$\text{master: } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

$$\text{slave: } \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{f}(\mathbf{z}). \quad (6)$$

主系统的状态变量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 可以分解为

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_r)^T \in \mathbb{R}^3,$$

其中: $\mathbf{x}_d = (x_{d1}, \dots, x_{dn_d})^T \in \mathbb{R}^{n_d}$ 称为驱动向量, $\mathbf{x}_r = (x_{r1}, \dots, x_{rn_r})^T \in \mathbb{R}^{n_r}$ 称为响应向量, 且 $n_d +$

$n_r = 3$.

系统矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

其中: $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$, $\mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_r}$, $\mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_d}$, $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$.

非线性项可以相应的分解为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}_d(\mathbf{x}), \mathbf{f}_r(\mathbf{x}))^T,$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d(\mathbf{x}) &= (f_{d1}(\mathbf{x}), \dots, f_{dn_d}(\mathbf{x}))^T \in \mathbb{R}^{n_d}, \\ \mathbf{f}_r(\mathbf{x}) &= (f_{r1}(\mathbf{x}), \dots, f_{rn_r}(\mathbf{x}))^T \in \mathbb{R}^{n_r}. \end{aligned}$$

下面本文设计一个简单且连续的控制:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{u}_d^T, \mathbf{u}_r^T)^T, \\ \begin{cases} \mathbf{u}_d: \mathbf{z}_d = \mathbf{x}_d, \\ \mathbf{u}_r = \mathbf{K}\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r), \end{cases} & \quad \forall t > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

来实现有限时间同步. 其中: $\mathbf{u}_d: \mathbf{z}_d = \mathbf{x}_d, \forall t \geq 0$ 为控制器的替代变量控制部分, $\mathbf{u}_r = \mathbf{K}\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r) \in \mathbb{R}^{n_r}$ 为控制器的反馈控制部分, 式中

$$\mathbf{K} = \text{diag}\{k_{r1}, k_{r2}, \dots, k_{rn_r}\} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$$

为待定的耦合常数矩阵, 并且 $k_{r1}, k_{r2}, \dots, k_{rn_r} > 0$; $\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r) \in \mathbb{R}^{n_r}$ 是连续的非光滑函数, 表达式为

$$\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r) = \begin{pmatrix} \text{sat}_\varepsilon(|x_{r1} - z_{r1}|^\alpha \text{sgn}(x_{r1} - z_{r1})) \\ \vdots \\ \text{sat}_\varepsilon(|x_{rn_r} - z_{rn_r}|^\alpha \text{sgn}(x_{rn_r} - z_{rn_r})) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中: $\alpha \in (0, 1)$, sat_ε 为饱和函数且 $\varepsilon > 0$ 为正实数,

$$\text{sat}_\varepsilon(x) = \begin{cases} x, & |x| < \varepsilon, \\ \varepsilon \text{sgn } x, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

然而, 根据上面式(7)的控制器, 有限时间同步框架可以构造为

$$M: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_d + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_r + \mathbf{f}_d(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_d + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_r + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (9)$$

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_d = \mathbf{A}_{11}\mathbf{z}_d + \mathbf{A}_{12}\mathbf{z}_r + \mathbf{f}_d(\mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}}_r = \mathbf{A}_{21}\mathbf{z}_d + \mathbf{A}_{22}\mathbf{z}_r + \mathbf{f}_r(\mathbf{z}) + \mathbf{u}_r, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_d: \mathbf{z}_d = \mathbf{x}_d, \quad \forall t \geq 0, \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (\mathbf{f}_d(\mathbf{z}), \mathbf{f}_r(\mathbf{z}))^T \in \mathbb{R}^3.$$

本文的目标是选择替代向量 \mathbf{x}_d 和耦合矩阵 \mathbf{K} , 使得响应子系统 \mathbf{x}_r 和 \mathbf{z}_r 对于导致主系统出现混沌的任何初始状态 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^3$ 和从系统的任意初始状

态 $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(0) \in \mathbb{R}^3$, 存在常数 $T > 0$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0, z_0)} \|\mathbf{x}_r(t) - \mathbf{z}_r(t)\| = 0, \quad (12)$$

且当 $t \geq T(x_0, z_0)$ 时, $\|\mathbf{x}_r(t) - \mathbf{z}_r(t)\| = 0$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里德范数. 这时, 本文称同步框架(9)达到有限时间同步, T 为同步时间.

定义一个误差向量 $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{x}_r(t) - \mathbf{z}_r(t)$, 容易得

$$\mathbf{f}_r(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_r(\mathbf{z}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{e}_r, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{D}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$. 这样, 可以得到一个同步框架(9)的响应误差动态系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \mathbf{A}_{22}\mathbf{e}_r + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_r(\mathbf{z}) - \mathbf{u}_r = \\ &[\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x})]\mathbf{e}_r - \mathbf{K}\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r). \end{aligned} \quad (14)$$

根据非自治系统的Lyapunov稳定性理论, 如果误差系统(12)在原点 $\mathbf{e}_r = 0$ 一致有限时间稳定, 那么同步框架(9)达到一致有限时间同步. 误差系统(12)的停息时间即为同步时间.

4 有限时间同步判据(Finite-time synchronization criteria)

为了获得有限时间同步判据, 需要根据混沌吸引子的有界属性^[20], 做如下假设:

假设 1 对于主BLDCM系统(5)定义域内的任何初始状态 $\mathbf{x}(0)$, 存在实常数 $\bar{\rho}_i$ 和 $\underline{\rho}_i$ ($i = 1, 2, 3$), 使得主BLDCM系统的轨迹满足

$$\underline{\rho}_i \leq x_i(t, \mathbf{x}(0)) \leq \bar{\rho}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \geq 0.$$

定理 1 如果存在一个正定对角矩阵 $\mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, \dots, p_{n_r}\} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ 和式(7)定义的控制 \mathbf{u} , 使得

$$[\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x})]^T \mathbf{P} + \mathbf{P}[\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x})] \leq 0, \quad (15)$$

则BLDCM系统的主-从同步框架(9)分别在区域

$$\mathbf{E}_1 = \{(e_{r1}, \dots, e_{rn_r})^T : |e_{ri}|^\alpha < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n_r\} \quad (16)$$

和

$$\mathbf{E}_2 = \{(e_{r1}, \dots, e_{rn_r})^T : |e_{ri}| \geq 1, \quad |e_{ri}|^\alpha \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n_r\} \quad (17)$$

内达到有限时间同步, 且相应的同步时间分别满足

$$T_1 \leq T_1^* = \frac{1}{c(1-\alpha)} (\mathbf{e}_{r0}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{r0})^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad (18)$$

$$T_2 \leq T_2^* = \frac{1}{d(2-\alpha)} (\mathbf{e}_{r0}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{r0})^{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} c &= \min\{k_{r1} p_1^{\frac{1-\alpha}{2}}, \dots, k_{rn_r} p_{n_r}^{\frac{1-\alpha}{2}}\}, \\ d &= \min\{\varepsilon k_{r1} p_1^{1-\frac{\alpha}{2}}, \dots, \varepsilon k_{rn_r} p_{n_r}^{1-\frac{\alpha}{2}}\}, \\ \mathbf{e}_{r0} &= \mathbf{x}_{r0} - \mathbf{z}_{r0}, \quad \alpha \in (0, 1). \end{aligned}$$

证 选择如下连续、正定、渐减且径向无界的Lyapunov函数 $V(\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r^T \mathbf{P} \mathbf{e}_r$, 则 $V(\mathbf{e}_r)$ 沿着误差系统(12)的轨迹对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}_r) &= \dot{\mathbf{e}}_r^T \mathbf{P} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}_r = \\ &\mathbf{e}_r^T [(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x}))^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x}))] \mathbf{e}_r - \\ &(\mathbf{K}\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r))^T \mathbf{P} \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^T \mathbf{P} \mathbf{K}\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r) = \\ &\mathbf{e}_r^T [(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x}))^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x}))] \mathbf{e}_r - \\ &2\mathbf{e}_r^T \mathbf{P} \mathbf{K}\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r). \end{aligned} \quad (20)$$

当 $|e_{ri}|^\alpha < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n_r$ 时, 对于任意的 $\alpha \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} 2\mathbf{e}_r^T \mathbf{P} \mathbf{K}\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r) &= \\ 2 \sum_{i=1}^{n_r} k_{ri} p_i e_{ri} \text{sat}_\varepsilon(|e_{ri}|^\alpha \text{sgn } e_{ri}) &= \\ 2 \sum_{i=1}^{n_r} k_{ri} p_i |e_{ri}|^{1+\alpha} &= \\ 2 \sum_{i=1}^{n_r} k_{ri} p_i^{\frac{1-\alpha}{2}} p_i^{\frac{1+\alpha}{2}} |e_{ri}|^{1+\alpha} &\geq \\ 2c \sum_{i=1}^{n_r} p_i^{\frac{1+\alpha}{2}} |e_{ri}|^{1+\alpha} &\geq 2c \left(\sum_{i=1}^{n_r} p_i e_{ri}^2\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} = \\ 2c(V(\mathbf{e}_r))^{\frac{1+\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

根据引理1, 由式(13)(18)–(19)可知: 如果存在一个常数 c , 使得

$$\dot{V}(\mathbf{e}_r) + 2c(V(\mathbf{e}_r))^{\frac{1+\alpha}{2}} \leq 0, \quad \forall \mathbf{e}_r \in \mathbb{R}^{n_r}, \quad (22)$$

则同步框架(9)在式(14)定义的区域 E_1 内达到有限时间同步, 同步时间 T 满足不等式(16).

当 $|e_{ri}|^\alpha \geq \varepsilon$, 且 $|e_{ri}| \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n_r$) 时, 对于任意 $\alpha \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} 2\mathbf{e}_r^T \mathbf{P} \mathbf{K}\text{sat}(\mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r) &= \\ 2 \sum_{i=1}^{n_r} k_{ri} p_i e_{ri} \text{sat}_\varepsilon(|e_{ri}|^\alpha \text{sgn}(e_{ri})) &= \\ 2 \sum_{i=1}^{n_r} k_{ri} p_i \varepsilon |e_{ri}| &\geq 2 \sum_{i=1}^{n_r} k_{ri} p_i \varepsilon |e_{ri}|^\alpha = \\ 2 \sum_{i=1}^{n_r} \varepsilon k_{ri} p_i^{1-\frac{\alpha}{2}} (\sqrt{p_i} |e_{ri}|)^\alpha &\geq 2d \left(\sum_{i=1}^{n_r} p_i e_{ri}^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \\ 2d(V(\mathbf{e}_r))^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

根据引理1, 由式(13)(18)和(21)可知: 如果存在一个常数 d , 使得

$$\dot{V}(\mathbf{e}_r) + 2d(V(\mathbf{e}_r))^{\frac{\alpha}{2}} \leq 0, \quad \forall \mathbf{e}_r \in \mathbb{R}^{n_r}, \quad (24)$$

则同步框架(9)在式(15)定义的区域 E_2 内达到有限时间同步, 同步时间 T 满足不等式(17). 证毕.

为了简化同步框架, 降低同步成本, 笔者通常考虑单驱动向量, 即 $n_d = 1$ 时的同步框架.

推论 1 如果系统的参数满足

$$\delta\sigma \geq \eta\rho_1^2, \quad (25)$$

则BLDCM系统在控制器

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d : \mathbf{x}_d &= x_1, \\ \mathbf{u}_r &= \begin{pmatrix} k_{r1} \text{sat}_\varepsilon(|x_2 - z_2|^\alpha \text{sgn}(x_2 - z_2)) \\ k_{r2} \text{sat}_\varepsilon(|x_3 - z_3|^\alpha \text{sgn}(x_3 - z_3)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

下的主-从同步框架(9)分别在区域

$$\mathbf{E}_1 = \{(e_{r1}, e_{r2})^T : |e_{ri}|^\alpha < \varepsilon, i = 1, 2\} \quad (27)$$

和区域

$$\mathbf{E}_2 = \{(e_{r1}, e_{r2})^T : |e_{ri}| \geq 1, |e_{ri}|^\alpha \geq \varepsilon, i = 1, 2\} \quad (28)$$

内达到有限时间同步, 且相应的同步时间分别满足

$$\begin{aligned} T_{11} &\leq T_{11}^* = \\ &\frac{1}{c(1-\alpha)} \left((x_{20} - z_{20})^2 + \frac{(x_{30} - z_{30})^2}{\eta} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (29)$$

和

$$\begin{aligned} T_{12} &\leq T_{12}^* = \\ &\frac{1}{d(2-\alpha)} \left((x_{20} - z_{20})^2 + \frac{(x_{30} - z_{30})^2}{\eta} \right)^{1-\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中: $\alpha \in (0, 1)$, $\rho_1 = \max\{|\bar{\rho}_1|, |\underline{\rho}_1|\}$, $\bar{\rho}_1, \underline{\rho}_1$ 为主混沌BLDCM系统的状态分量 x_1 的上界和下界,

$$\begin{aligned} c &= \min\{k_{r1}, k_{r2} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\}, \\ d &= \min\{\varepsilon k_{r1}, \varepsilon k_{r2} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\}. \end{aligned}$$

证 当驱动变量 $\mathbf{x}_d = x_1$ 时, 主BLDCM系统的状态变量可以分解为 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_r)^T$, 响应变量为 $\mathbf{x}_r = (x_2, x_3)^T$. 因此, 误差系统(12)的系统矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{22} &= \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ \eta x_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -\delta & x_1 \\ \eta x_1 & -\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

选择正定矩阵 $\mathbf{P} = \text{diag}\{1, 1/\eta\}$, 容易得到

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x})]^T \mathbf{P} + \mathbf{P} [\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x})] &= \\ \begin{pmatrix} -2\delta & 2x_1 \\ 2x_1 & \frac{-2\sigma}{\eta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

以上矩阵是负半定的, 当且仅当

$$\frac{4\delta\sigma}{\eta} - 4x_1^2 \geq 0,$$

即

$$\delta\sigma \geq \eta x_1^2. \quad (32)$$

根据假设1易得到 $\bar{\rho}_1 \leq x_1 \leq \underline{\rho}_1$, 又 $\rho_1 = \max\{|\bar{\rho}_1|, |\underline{\rho}_1|\}$, 因而可得 $\eta x_1^2 \leq \eta \rho_1^2$. 显然, 如果不等式(23)成立, 则不等式(30)成立. 又式(27)和(28)成立, 则式(16)–(17)成立. 因此, 根据定理1可知, 推论1成立.

证毕.

当驱动变量 $\mathbf{x}_d = x_2$ 时, 主BLDCM系统的状态变量可以分解为 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_r)^T$, 响应变量为 $\mathbf{x}_r = (x_1, x_3)^T$, 则误差系统(12)的系统矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{22} &= \begin{pmatrix} -1 & \rho \\ \sigma & -\sigma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & -x_2 \\ \eta x_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -1 & \rho - x_2 \\ \sigma + \eta x_2 & -\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

选择正定矩阵 $\mathbf{P} = \text{diag}\{1, 1/\eta\}$, 则由定理1容易得到如下结果:

推论 2 如果系统参数满足

$$4\sigma\eta \geq (\rho\eta + \sigma)^2, \quad (33)$$

则BLDCM系统在控制器

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d : \mathbf{x}_d &= x_2, \\ \mathbf{u}_r &= \begin{pmatrix} k_{r1} \text{sat}_\varepsilon(|x_1 - z_1|^\alpha \text{sgn}(x_1 - z_1)) \\ k_{r2} \text{sat}_\varepsilon(|x_3 - z_3|^\alpha \text{sgn}(x_3 - z_3)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

下的主-从同步框架(9)分别在区域

$$\mathbf{E}_1 = \{(e_{r1}, e_{r2})^T : |e_{ri}|^\alpha < \varepsilon, i = 1, 2\} \quad (35)$$

和区域

$$\mathbf{E}_2 = \{(e_{r1}, e_{r2})^T : |e_{ri}| \geq 1, |e_{ri}|^\alpha \geq \varepsilon, i = 1, 2\} \quad (36)$$

内达到有限时间同步, 且相应的同步时间分别满足

$$\begin{aligned} T_{21} &\leq T_{21}^* = \\ &\frac{1}{c(1-\alpha)} \left((x_{10} - z_{10})^2 + \frac{(x_{30} - z_{30})^2}{\eta} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (37)$$

和

$$\begin{aligned} T_{22} &\leq T_{22}^* = \\ &\frac{1}{d(2-\alpha)} \left((x_{10} - z_{10})^2 + \frac{(x_{30} - z_{30})^2}{\eta} \right)^{1-\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned} \quad (38)$$

其中: $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} c &= \min\{k_{r1}, k_{r2} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\}, \\ d &= \min\{\varepsilon k_{r1}, \varepsilon k_{r2} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\}. \end{aligned}$$

当驱动变量 $\mathbf{x}_d = x_3$ 时, 主BLDCM系统的状态变量可以分解为 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_r)^T$, 响应变量为 $\mathbf{x}_r = (x_1,$

$x_2)^T$, 则误差系统(12)的系统矩阵可以表示为

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}, \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{22} + \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & -x_3 \\ x_3 & -\delta \end{pmatrix}.$$

选择正定矩阵 $\mathbf{P} = \text{diag}\{1, 1\}$, 根据定理1, 有

推论3 对于任何系统参数, BLDCM系统在控制器

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d : \mathbf{x}_d &= x_3, \\ \mathbf{u}_r &= \begin{pmatrix} k_{r1} \text{sat}_\varepsilon(|x_1 - z_1|^\alpha \text{sgn}(x_1 - z_1)) \\ k_{r2} \text{sat}_\varepsilon(|x_2 - z_2|^\alpha \text{sgn}(x_2 - z_2)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

下的主-从同步框架(9)分别在区域

$$\mathbf{E}_1 = \{(e_{r1}, e_{r2})^T : |e_{ri}|^\alpha < \varepsilon, i = 1, 2\} \quad (40)$$

和区域

$$\mathbf{E}_2 = \{(e_{r1}, e_{r2})^T : |e_{ri}| \geq 1, |e_{ri}|^\alpha \geq \varepsilon, i = 1, 2\} \quad (41)$$

内达到有限时间同步, 且相应的同步时间分别满足

$$T_{31} \leq T_{31}^* = \frac{1}{c(1-\alpha)} ((x_{10} - z_{10})^2 + (x_{20} - z_{20})^2)^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad (42)$$

和

$$T_{32} \leq T_{32}^* = \frac{1}{d(2-\alpha)} ((x_{10} - z_{10})^2 + (x_{20} - z_{20})^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (43)$$

其中: $\alpha \in (0, 1)$,

$$c = \min\{k_{r1}, k_{r2}\}, d = \min\{\varepsilon k_{r1}, \varepsilon k_{r2}\}.$$

5 例子与仿真(Numerical simulation)

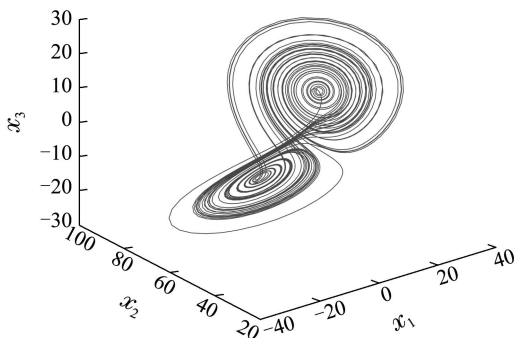
下面, 将通过表1给出的两个例子来验证所得同步判据的有效性, 系统参数与初始值、控制器、控制参数、同步时间、所满足的同步判据和同步时间的估计表达式如表1所示.

主系统和从系统的轨迹分别如图1(a)–1(b)所示, 同步过程分别如图1(c)–1(d)所示. 通过图1和图2的仿真结果可知所得到的判据是有效的.

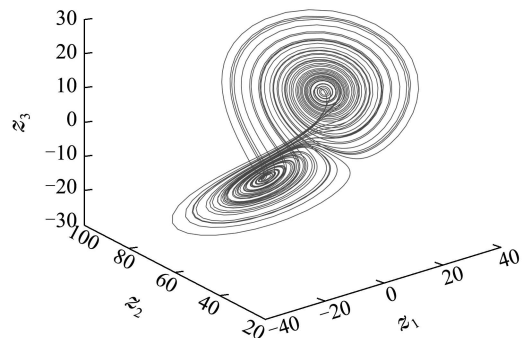
表1 仿真实例

Table 1 Examples for simulation

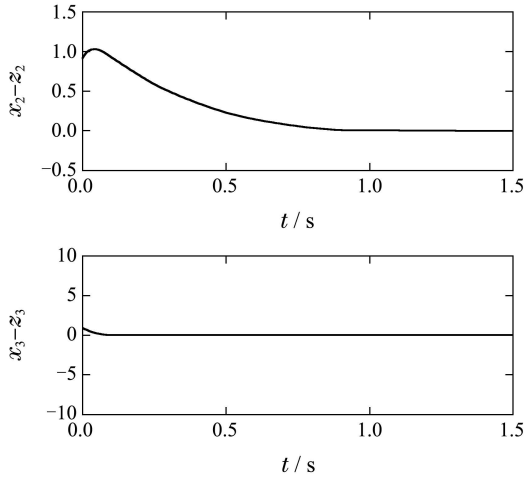
例子	系统参数与初始值	控制器	控制参数	同步时间	估计表达式
1	$\rho = 60, v_q = 0.168, v_d = 20.66,$ $\delta = 2, \eta = 0.001, T_L = 0.53,$ $\sigma = 10.$	$\mathbf{x}_d = x_1,$ $\mathbf{K} = \text{diag}\{1, 10\}$	$\alpha = 1/3, c = 1,$ $\varepsilon = 1$	14.5001	式(27)
	$x(0) = (10, 60, 10)^T,$ $z(0) = (10.93, 59.1, 9.05)^T$	$\mathbf{x}_d = x_3,$ $\mathbf{K} = \text{diag}\{0.2, 0.2\}$	$\alpha = 1/3, c = 0.2,$ $\varepsilon = 1$	8.9069	式(40)
2	$\rho = 0.1, v_q = 0.168, v_d = 20.66,$ $\delta = 2, \eta = 1, T_L = 0.53, \sigma = 2.$	$\mathbf{x}_d = x_2,$ $\mathbf{K} = \text{diag}\{0.1, 0.3\}$	$\alpha = 1/3, d = 0.1,$ $\varepsilon = 1$	9.4765	式(36)
	$x(0) = (8, -7, 3)^T,$ $z(0) = (9.5, -5.3, 4.3)^T$	$\mathbf{x}_d = x_3,$ $\mathbf{K} = \text{diag}\{0.1, 0.2\}$	$\alpha = 1/3, d = 0.1,$ $\varepsilon = 1$	10.3547	式(41)



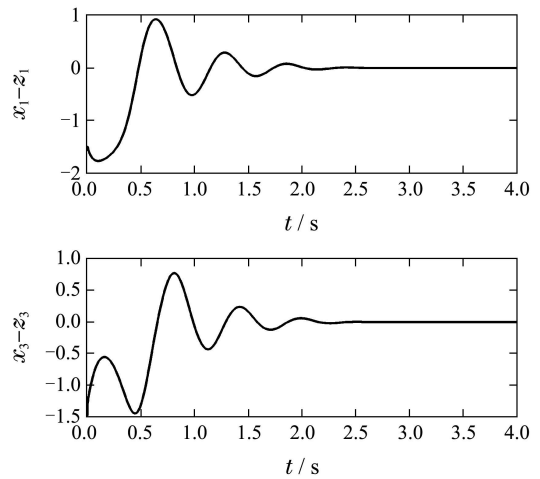
(a) 主系统的轨迹



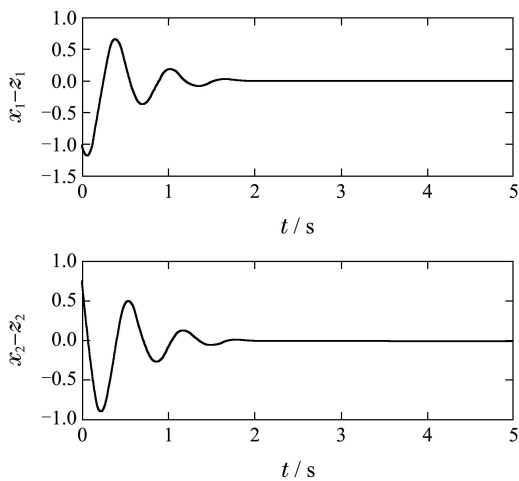
(b) 未受控的从系统轨迹



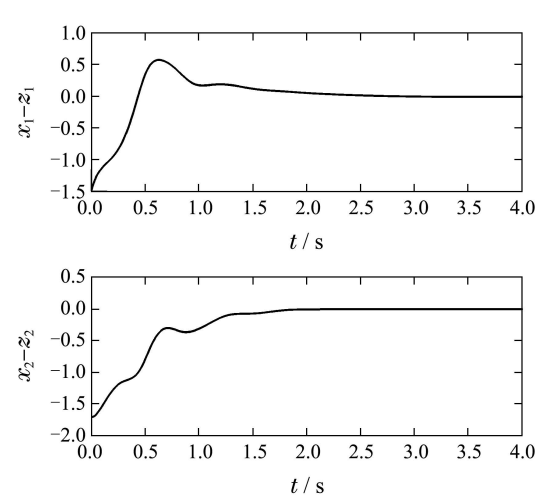
(c) 在 $x_d = x_1, K = \text{diag}\{1, 10\}$ 时的同步过程



(c) 在 $x_d = x_2, K = \text{diag}\{0.1, 0.3\}$ 时的同步过程



(d) 在 $x_d = x_3, K = \text{diag}\{0.2, 0.2\}$ 时的同步过程



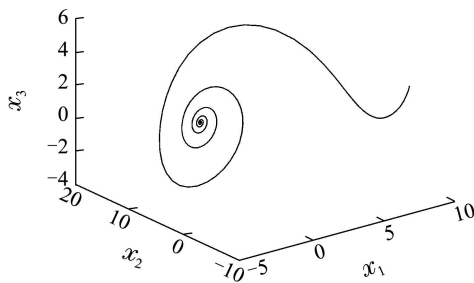
(d) 在 $x_d = x_3, K = \text{diag}\{0.1, 0.2\}$ 时的同步过程

图 1 例 1 主-从 BLDCM 系统的全局有限时间混沌同步

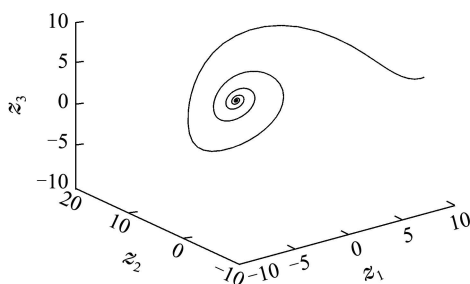
图 2 例 2 主-从 BLDCM 系统的全局有限时间同步

Fig. 1 Global finite-time chaos synchronization for the master and slave BLDCM systems in Example 1

Fig. 2 Global finite-time synchronization for the master and slave BLDCM systems in Example 2



(a) 主系统的轨迹



(b) 未受控的从系统轨迹

6 结束语(Conclusion)

本文构造了一种简单控制器下的主-从 BLDCM 系统的有限时间同步框架, 证明了一些全局同步判据, 求出了同步时间的估计表达式, 并通过数值仿真验证了同步判据的有效性. 本文所设计的控制器克服了现有控制器的一些缺陷, 具有结构简单、同步成本低、连续、不会产生抖振现象等优点.

参考文献(References):

[1] GE Z M, CHANG C M. Chaos synchronization and parameters identification of single time scale brushless dc motors [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 20(4): 883 – 903.

[2] GE Z M, CHANG C M, CHEN Y S. Anti-control of chaos of single time scale brushless dc motors and chaos synchronization of different order systems [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 27(5): 1298 – 1315.

[3] ASADA H, YOUCEF-TOUMI K. *Direct drive robots: theory and practice* [D]. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.

- [4] MURUGESAN S. An overview of electric motors for space applications [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, 1981, 28(4): 260 – 265.
- [5] KRAUSE P C. *Analysis of Electric Machinery* [M]. New York: McGraw-Hill, 1986.
- [6] HEMARTI N, LEU M C. A complete model characterization of brushless dc motors [J]. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 1992, 28(1): 172 – 180.
- [7] HEMATI N. Strange attractors in brushless dc motors [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1994, 41(1): 40 – 45.
- [8] HEMATI N. Dynamic analysis of brushless motors based on compact representations of the equations of motion [C]//*Industry Applications Society Annual Meeting*. Toronto, Ont: IEEE Industry Applications Society, 1993, 1: 51 – 58.
- [9] 杨涛, 邵惠鹤. 基于遗传算法混沌系统同步的研究 [J]. *控制理论与应用*. 2002, 19(5): 789 – 792.
(YANG Tao, SHAO Huihe. Chaotic synchronization based on genetic algorithms [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(5): 789 – 792.)
- [10] 任子武, 熊蓉, 储健. 基于混合类电磁机制算法的混沌系统控制与同步 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(7): 1009 – 1014.
(REN Ziwu, XIONG Rong, CHU Jian. Control and synchronization of chaotic systems based on a hybrid electromagnetism-like mechanism algorithm [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(7): 1009 – 1014.)
- [11] GE Z M, LIN G H. The complete. lag and anticipated synchronization of a BLDCM chaotic system [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 34(3): 740 – 764.
- [12] BHAT S P, BERSTEIN D S. Finite time stability of continuous autonomous systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [13] WANG H, HAN Z Z, XIE Q Y, et al. Finite-time chaos control via nonsingular terminal sliding mode control [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(6): 2728 – 2733.
- [14] 刘云峰, 杨小冈, 缪栋, 等. 基于模糊滑模的有限时间混沌同步实现 [J]. *物理学报*. 2007, 56(11): 6250 – 6257.
(LIU Yunfeng, YANG Xiaogang, MIAO Dong, et al. Chaotic synchronization problem of finite-time convergence based on fuzzy sliding mode [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(11): 6250 – 6257.)
- [15] AGHABABA M P, KHANMOHAMMADIV S, ALIZADEH G. Finite-time synchronization of two different chaotic systems with unknown parameters via sliding mode technique [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(6): 2080 – 3091.
- [16] WANG H, HAN Z Z, XIE Q Y, et al. Finite-time synchronization of uncertain unified chaotic systems based on the CLF [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(5): 2842 – 2849.
- [17] LI S H, TIAN Y P. Finite-time synchronization of chaotic systems [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, 15(2): 303 – 310.
- [18] WANG H, HAN Z Z, XIE Q Y, et al. Finite-time chaos synchronization of unified chaotic system with uncertain parameters [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(5): 2239 – 2247.
- [19] YU S, YU X, SHIRINZADEH B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode [J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957 – 1964.
- [20] CURRAN P F, CHUA L O. Absolute stability theory and the synchronization problem [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, 7(6): 1357 – 1382.

作者简介:

徐林 (1988–), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为复杂系统建模与仿真, E-mail: xulin0612@126.com;

陈云 (1978–), 男, 讲师, 博士后, 主要研究方向为复杂系统建模与仿真, E-mail: mathyun@sina.com;

刘忠 (1963–), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为目标定位和复杂系统建模与仿真, E-mail: 380055262@qq.com;

陈永健 (1978–), 男, 硕士, 助理工程师, 主要研究方向为复杂系统建模与仿真, E-mail: 329447061@qq.com.