

## 线性系统近似生存域的计算

陈征<sup>1†</sup>, 高岩<sup>2</sup>

(1. 宁波工程学院 理学院, 浙江 宁波 315211; 2. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

**摘要:** 研究了构造控制系统近似生存域的方法和线性系统的近似生存性条件. 基于集合的逼近法锥, 给出了凸紧集的过剩近似生存域表达式. 在凸紧集边界上采样足够多个点的情况下, 此近似生存域可以逼近真实的生存域. 并研究了连续线性控制系统和离散线性控制系统在此近似生存域上的生存性, 将求生存控制器的问题转化为线性不等式组问题. 最后, 以悬挂点可以移动的钟摆模型和两类细菌数量变化模型为例说明了算法的有效性.

**关键词:** 线性控制系统; 生存性; 多面体; 法锥

中图分类号: TP11 文献标识码: A

## Computation of approximate viable sets for linear systems

CHEN Zheng<sup>1†</sup>, GAO Yan<sup>2</sup>

(1. School of Sciences, Ningbo University of Technology, Ningbo Zhejiang 315211, China;

2. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** We investigate the approximate viability conditions for linear control systems and the method of constructing approximate viable sets for control systems. Based on the proximal normal cone, a surplus viable set for a convex compact set is given, which can approximate the real viable set if the number of sample points on the boundary of the convex compact set is large enough. For continuous-time linear systems and discrete-time linear systems, the method to verify the viability of approximate viable set is given. Furthermore, the problem of viable controller design is formulated as a linear inequalities problem. Finally, we illustrate the effectiveness of the main results of this paper with a pendulum model with a movable suspension point and the other model of two types of bacteria.

**Key words:** linear control systems; viability; polytope; normal cone

### 1 引言(Introduction)

近年来, 控制系统的生存性问题引起了人们广泛的关注<sup>[1-4]</sup>. 所谓控制系统在某个区域上是可生存的指的是对于该区域内的任何初始值, 系统的运动都不离开此区域<sup>[5]</sup>. 生存理论的给出为控制系统的研究注入了新的研究方法, 主要是因为生存理论特别适用于研究系统整体的趋势而不是着眼于系统的某个解的运动趋势<sup>[3,5]</sup>, 当前广泛应用于各个学科. 目前关于生存性的研究主要有两个方向, 其一是针对某一特殊区域判断系统的生存性, 从而更好地控制系统的轨迹在生存域里面, 相关结果在生物、管理、金融上都有广泛的应用<sup>[5-9]</sup>. 但一般需要对研究区域的边界上的每一点都进行一次生存性的判断, 整体的计算量较大. 其二是当研究区域本身比较复杂, 生存性的判断不好进行时, 通过构造一个相对简单的区域来逼近原来的区域, 然后通过控制器使得系统在简单区域可生存<sup>[1,10]</sup>.

逼近原区域的方法一般有过剩逼近和不足逼近, 所谓过剩逼近是将原区域包含在逼近的区域内, 所谓不足逼近是将逼近区域包含在原区域内. 不管是哪种方法, 都是对系统的近似生存性研究. 另外, 此方法还应用在如何构造系统的最大吸引域和鲁棒不变集的研究上<sup>[11-12]</sup>.

本文将研究近似生存性中的过剩逼近生存域问题. 主要是通过非光滑分析中的逼近法锥给出任意精确的过剩逼近生存域, 然后通过控制器设计使得线性系统在逼近生存域上可生存, 并给出了控制器的具体算法. 最后, 给出了移动钟摆系统和细菌数量控制的例子来验证方法的有效性. 文中控制器的设计只要考虑如何控制有限个点使其在逼近生存域上可生存, 而其他点的生存控制可以由这有限个点的控制凸组合得到. 这样, 只要经过有限次计算就可以判断系统的生存性.

## 2 生存性及逼近法锥(The viability and proximal normal cone)

### 2.1 系统的生存性(The viability of systems)

本节首先将给出与本文相关的概念和性质. 下面将采用微分包含的形式来研究线性控制系统, 其优点是微分包含还可以用来描述不确定系统和逼近非线性系统. 考虑如下形式的微分包含:

$$\dot{x} \in F(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

这里 $F(x)$ 是满足一定条件的映射. 一般的连续线性系统 $\dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ 可以用微分包含式(1)来表示, 只要记式(1)中的 $F(x) = \{Ax + Bu | u \in U\}$ .

同样, 可以用差分包含

$$x(k+1) \in \{Ax(k) + Bu(k) | u(k) \in K\} \quad (2)$$

来表示一般的离散线性系统 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ .

正因为有如上的转化才可以研究一般线性系统的生存性, 下面给出可生存的定义. 对于连续控制系统, 有

**定义 1** 设 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ , 如果对任意初始条件 $x_0 \in W$ , 存在解 $x(t)$ , 使得 $x(t) \in W, \forall t \geq 0$ , 则称微分包含式(1)在集合 $W$ 上可生存.

类似的, 把上面定义中的 $x(t)$ 换成 $x(k)$ , 可以给出差分包含式(2)可生存的概念. 下面给出点到集合距离的概念.

**定义 2** 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , 距离函数 $d_S(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 表示如下:

$$d_S(x) = \inf \{\|x - s\| | s \in S\}.$$

下面给出生存性判别中用到的切锥的概念. 基于切锥的概念, 可以给出判断系统可生存的条件<sup>[13-14]</sup>.

**定义 3** 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空, 集合 $K$ 在点 $x \in K$ 的切锥定义为

$$T_K(x) = \{v | \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{d_S(x + \lambda v)}{\lambda} = 0\}.$$

**引理 1** 微分包含(1)在闭集 $W$ 上是可生存的充要条件是对任意的 $x \in W$ , 有

$$F(x) \cap T_W(x) \neq \emptyset.$$

**引理 2** 考虑集值映射 $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ , 差分包含 $x(k+1) \in F(x(k))$ 在闭集 $K$ 上可生存的充要条件是对任意 $x \in K$ , 有

$$F(x) \cap K \neq \emptyset.$$

下面介绍多面体的概念. 多面体一般有两种表示方法, 一种是交的形式, 通常表示为

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}, \quad (3)$$

其中:  $A$ 为 $m \times n$ 阶矩阵,  $b$ 为 $m$ 维向量.

另一种是和的形式, 通常表示为

$$P' = \text{co}\{v_1, \dots, v_m\}, \quad (4)$$

其中:  $\text{co}\{v_1, \dots, v_m\}$ 表示向量 $v_1, \dots, v_m$ 的凸包, 也就是 $\text{co}\{v_1, \dots, v_m\} = \{x | x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, v_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$ , 又 $v_i (i = 1, \dots, m)$ 称为多面体的极点. 值得注意的是多面体(3)与(4)之间是可以相互转换的, 具体见文献[15].

### 2.2 集合的逼近法锥(Proximal normal cone to a set)

下面给出逼近法锥的定义和一些性质.

**定义 4** 设集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , 如果对任意 $x_1, x_2, 0 \leq \lambda \leq 1$ , 有 $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$ , 则称 $S$ 为凸集合.

**定义 5** 设集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , 且 $s \in S$ .  $S$ 在点 $s$ 的逼近法锥定义为

$$N_S^P(s) = \{\zeta | \exists t > 0, d_S(s + t\zeta) = t\|\zeta\|\}.$$

在一般情况下, 不一定每一点 $s$ 都存在逼近法锥, 但有如下的结果.

**引理 3** 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 为闭凸集, 又 $s \in \text{bdry}(S)$ ,  $\text{bdry}(S)$ 表示 $S$ 的边界, 那么 $N_S^P(s) \neq \{0\}$ .

一些用于生存域的常见集合 $C$ , 其每一点的逼近法锥是较容易计算的.

**推论 1** 设椭球体

$$C_1 = \{x | x^T Q x \leq 1\},$$

其中 $Q$ 是正定对称矩阵, 那么 $C_1$ 在点 $c \in \text{bdry}(C_1)$ 的逼近法锥为

$$N_{C_1}^P(c) = \{2tQc, t > 0\}.$$

**证** 注意到 $\{x | x^T Q x = 1\}$ 的梯度为 $2Qx$ , 由逼近法锥的定义可以直接证明.

**推论 2** 设单位 $n$ 维球体 $C_2 = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ , 那么 $C_2$ 在点 $c \in \text{bdry}(C_2)$ 的逼近法锥为

$$N_{C_2}^P(c) = \{tc, t > 0\}.$$

**推论 3** 设长方形 $C_3 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , 则 $C_3$ 在点 $c \in \text{bdry}(C_3)$ 的逼近法锥为

当 $c = (a_1, b_2)$ 时,  $N_{C_3}^P(c) = \{\lambda t(0, 1)^T + (1 - \lambda)t(-1, 0)^T\}$ ;

当 $c = (a_1, a_2)$ 时,  $N_{C_3}^P(c) = \{\lambda t(0, -1)^T + (1 - \lambda)t(-1, 0)^T\}$ ;

当 $c = (b_1, b_2)$ 时,  $N_{C_3}^P(c) = \{\lambda t(0, 1)^T + (1 - \lambda)t(1, 0)^T\}$ ;

当 $c = (b_1, a_2)$ 时,  $N_{C_3}^P(c) = \{\lambda t(0, -1)^T + (1 -$

$\lambda)t(1, 0)^T$ };

当  $x = b_1, a_2 < y < b_2$  时,  $N_{C_3}^P(c) = \{t(1, 0)^T\}$ ;

当  $x = a_1, a_2 < y < b_2$  时,  $N_{C_3}^P(c) = \{t(-1, 0)^T\}$ ;

当  $y = b_2, a_1 < x < b_1$  时,  $N_{C_3}^P(c) = \{t(0, 1)^T\}$ ;

当  $y = a_2, a_1 < x < b_1$  时,  $N_{C_3}^P(c) = \{t(0, -1)^T\}$ ;

其中:  $c = (x, y)^T, t > 0, 0 \leq \lambda \leq 1$ .

性质2和性质3的证明直接由定义可得, 其他一些常见的凸紧集的逼近法锥也都可以简单的求出. 正因为如此, 可以用下节中介绍的方法来求具体的近似生存域.

### 3 系统的近似生存性(Approximate viability for systems)

#### 3.1 连续线性系统的近似生存性(Approximate viability for continuous linear systems)

考虑凸紧集  $K$ , 由引理3其上面每一点都存在逼近法锥, 则集合  $K$  可以表示为如下的集合:

$$K = \bigcap_{x_0 \in \text{bdry}(K)} \{x \in \mathbb{R}^n | \zeta_0^T(x - x_0) \leq 0, \zeta_0 \in N_K^P(x_0)\}.$$

上式说明任意一个凸紧集  $K$  都可以由集合上每一点的逼近法锥所确定的图形来逼近. 由前面的讨论不难得到如下的性质:

**引理 4** 设  $K$  为一凸紧集,  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$  为  $\text{bdry}(K)$  上的任意  $r$  个点. 定义超半平面  $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | \zeta_i^T(x - x_i) \leq 0, \zeta_i \in N_K^P(x_i)\}, i = 1, \dots, r$ . 由上面的  $r$  个集合可以定义如下的多面体:

$$K' = \bigcap_{i=1}^r H_i, \tag{5}$$

那么  $K \subseteq K'$ .

由引理4, 可以将  $K'$  看作  $K$  的近似生存域, 如图1. 并且可以知道当采样点足够多的时候, 近似生存域  $K'$  逼近生存域  $K$ .

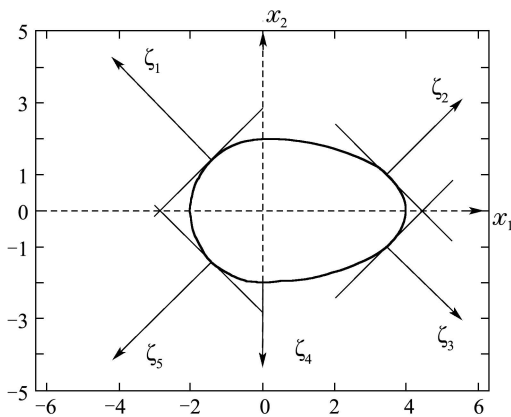


图 1 近似生存域

Fig. 1 Approximate viable set

下面对于连续线性系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ , 设计控制器  $u$  使得系统在集合  $K'$  上可生存. 首先由前面的讨论可以将式(5)转化为和的形式

$$K' = \text{co}\{v_1, \dots, v_l\}. \tag{6}$$

下面给出关于连续线性系统生存性的一个结果.

**定理 1** 对于微分包含式(1), 其中  $F(x) = \{Ax + Bu | u \in U\}, U$  是凸集. 如果在点  $v_1, \dots, v_l$  满足  $F(v_i) \cap T_{K'}(v_i) \neq \emptyset, i = 1, \dots, l$ . 那么微分包含式(1)在集合(6)上是可生存的.

**证** 首先, 由于式(6)中的集合  $K'$  是多面体, 所以点  $y \in T_{K'}(x)$  当且仅当存在  $t > 0$  和  $\beta_j \geq 0, \sum_{j=1}^l \beta_j = 1$  使得

$$x + ty = \sum_{j=1}^l \beta_j v_j,$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{t} \left( \sum_{j=1}^l \beta_j v_j - x \right).$$

因为  $F(v_i) \cap T_{K'}(v_i) \neq \emptyset$ , 所以存在  $u_i$  使得

$$Av_i + Bu_i = \frac{1}{t_i} \left( \sum_{j=1}^l \beta_{ij} v_j - v_i \right), i = 1, \dots, l,$$

其中:  $\beta_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^l \beta_{ij} = 1$ , 为了便于计算, 可以取  $t = \min\{t_1, \dots, t_l\}$ , 于是上式变为

$$Av_i + Bu_i = \frac{1}{t} \left( \sum_{j=1}^l \beta_{ij} v_j - v_i \right). \tag{7}$$

另注意到任意的  $x \in K'$  可以表示为  $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i$ , 于是在上面  $l$  个等式中依此乘上  $\lambda_i (i = 1, \dots, l)$  再相加, 得

$$A \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i + B \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i = \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^l \lambda_i \sum_{j=1}^l \beta_{ij} v_j - \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i \right),$$

$$\text{即 } Ax + B\bar{u} = \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^l \lambda_i \sum_{j=1}^l \beta_{ij} v_j - x \right), \text{ 其中 } \bar{u} = \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i$$

$\in U$ , 又  $\sum_{i=1}^l \lambda_i \sum_{j=1}^l \beta_{ij} v_j \in K'$ , 所以  $F(x) \cap T_{K'}(x) \neq \emptyset$ , 也就是说微分包含(1)在集合(6)上是可生存的.

由引理1得知定理1的逆命题显然是成立的.

**证毕.**

由定理1的证明过程, 对于每一个  $v_i$ , 式(7)可以表示为

$$Av_i + Bu_i = \frac{1}{t} \left( \sum_{j=1}^l \beta_{ij} v_j - v_i \right), \sum_{j=1}^l \beta_{ij} = 1, \beta_{ij} \geq 0. \tag{8}$$

上式是关于  $\beta_{ij}, u_i$  的线性不等式组, 也就是将求控制  $u_i$  转化为一个求解线性不等式组问题. 为了描述方便将式(8)的解就记为  $u_i$ . 又对于  $x \in K', x$  一定能表示

为  $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1$ . 此时, 对应于  $x$  的控制为  $\bar{u} = \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i$ .

综上, 得到连续线性系统(1)在生存域(6)上的生存控制器设计步骤.

**算法 1**

**Step 1** 在集合  $K$  的边界上取  $r$  各抽样点  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ ;

**Step 2** 分别求得  $\zeta_i \in N_K^P(x_i), i = 1, \dots, r$ ;

**Step 3** 求解式(6);

**Step 4** 解线性不等式组(8), 求得  $U_i$ ;

**Step 5** 求得  $\bar{u} = \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i$ .

这样得到一个控制器使得系统近似生存. 关于线性不等式的计算问题可以参考文献[16].

**3.2 离散线性系统的近似生存性(Approximate viability for discrete linear systems)**

同样可以考虑差分包含形式的离散线性系统(2)在近似生存域(6)上的生存性. 首先给出如下的结果.

**定理 2** 对于离散线性系统(2)和集合(6), 其中  $U$  是凸集. 如果点  $v_1, \dots, v_l$  满足  $\{Av_i + Bu(k)|u(k) \in U\} \cap K' \neq \emptyset, i = 1, \dots, l$ . 那么离散线性系统(2)在集合(6)上是可生存的.

**证** 因为  $\{Av_i + Bu(k)|u(k) \in U\} \cap K' \neq \emptyset, i = 1, \dots, l$ , 所以存在  $u_i \in U$ , 使得

$$Av_i + Bu_i \in K'.$$

也就是

$$Av_i + Bu_i = x_i, x_i \in K', i = 1, \dots, l. \quad (9)$$

对任意的  $x \in K'$ , 有  $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1$ . 进一步有, 对式(9)中的每个式子乘上相应的  $\lambda_i$ , 然后相加得

$$A \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i + B \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i,$$

即  $Ax + B \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i \in K'$ . 由于  $U$  是凸集, 所以  $\bar{u} = \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i \in U$ , 也就是说

$$\{Ax + Bu(k)|u(k) \in U\} \cap K' \neq \emptyset,$$

所以离散线性系统(2)在集合(6)上是可生存的.

由引理2得知定理2的逆命题显然是成立的.

证毕.

由定理2的证明过程, 对于每一个  $v_i$ , 式(9)可以表示为

$$Av_i + Bu_i = x_i = \sum_{j=1}^l \lambda_{ij} v_j,$$

$$\sum_{j=1}^l \lambda_{ij} = 1, 0 \leq \lambda_{ij} \leq 1. \quad (10)$$

上式是关于  $\lambda_{ij}, u_i$  的线性不等式组, 同样地将控制向量  $u_i$  转化为一个求解线性不等式组问题. 为了描述方便将式(10)的解就记为  $u_i$ .

同样, 得到离散线性系统(2)在生存域(6)上的生存性控制器设计步骤.

**算法 2** 给出离散线性系统(2)和凸紧集  $K$ .

**Step 1** 在集合  $K$  的边界上取  $r$  个抽样点  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ ;

**Step 2** 分别求得  $\zeta_i \in N_K^P(x_i), i = 1, \dots, r$ ;

**Step 3** 求解式(6);

**Step 4** 解线性不等式组(10), 求得  $u_i$ ;

**Step 5** 求得  $\bar{u} = \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i$ .

这样就得到一个控制器使得离散线性系统生存.

**4 数值算例(Numerical examples)**

本节给出两个实际的例子来仿真说明上述方法的有效性, 首先给出文献[17]中的连续线性系统的例子.

**例 1** 考虑悬挂点可以移动的钟摆模型. 这里假设悬挂点的移动速度是  $u$ , 并用  $v$  来表示风力的干扰.  $x_1$  表示钟摆偏离垂直线的角度,  $x_2$  表示在地面固定参考系中的悬负载速度. 这样系统的动力方程就可以描述为

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\beta u \\ v \end{pmatrix},$$

其中:  $x = (x_1, x_2)^T, \alpha$  和  $\beta$  是依赖于悬负载的质量值和钟摆的长度值的正系数.

这里假设  $\alpha = \beta = 1$ , 于是考虑系统在椭圆面  $\{(x_1, x_2)^T | \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1\}$  上的生存性. 首先在椭圆  $\{(x_1, x_2)^T | \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1\}$  上取点  $(2, 0)^T, (0, 1)^T, (-2, 0)^T, (0, -1)^T$  作为采样点, 于是得到的近似生存域为长方形  $K' = \{(x_1, x_2)^T | -2 \leq x_1 \leq 2, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ , 如图2所示.

在顶点  $(2, 1)^T$  处解相应的线性不等式组得  $u_1 = (u, v)^T = (2, -4)^T$ , 在顶点  $(-2, 1)^T$  处解相应的线性不等式组得  $u_2 = (u, v)^T = (-1, -3)^T$ , 在顶点  $(-2, -1)^T$  处解相应的线性不等式组得  $u_3 = (u, v)^T = (-3, -1)^T$ , 在顶点  $(2, -1)^T$  处解相应的线性不等式组得  $u_4 = (u, v)^T = (1, 3)^T$ . 于是由算法 1, 可以得到当  $x = \lambda_1(2, 1)^T + \lambda_2(-2, 1)^T + \lambda_3(-2, -1)^T + \lambda_4(2, -1)^T, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$  时, 控制为  $\bar{u} = \lambda_1(2, -4)^T + \lambda_2(-1, -3)^T + \lambda_3(-3, -1)^T + \lambda_4(1, 3)^T$ . 由上面的算法可知, 控制器是根据系统状态来决定的,

并且只要计算4个顶点的控制, 其他点的控制实际上是这4个顶点的控制的凸组合. 如此只要通过4个顶点的控制就可以控制钟摆的运动状态.

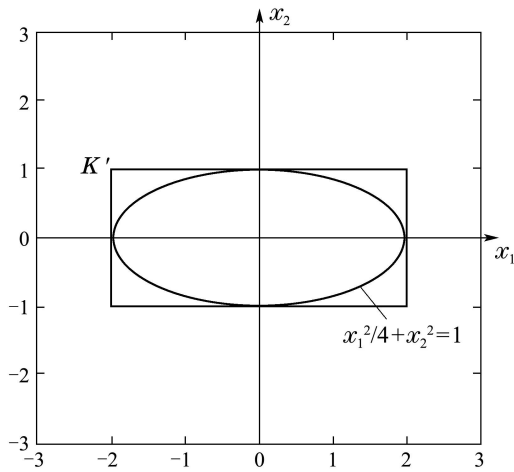


图 2 椭圆面的近似生存域

Fig. 2 Approximate viable set of an ellipsoid

**例 2** 考虑如下的两类细菌数量变化模型:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(k),$$

其中:  $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$  表示  $k$  时刻第 1 种细菌和第 2 种细菌的数量,  $u(k)$  表示人工措施对细菌数量的一种控制.

下面考虑上述系统在圆面  $\{(x_1, x_2)^T | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  上的生存性. 首先在圆  $\{(x_1, x_2)^T | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  上取点  $(1, 0)^T, (0, 1)^T, (-1, 0)^T, (0, -1)^T$  作为采样点, 于是得到的近似生存域为正方形  $K' = \{(x_1, x_2)^T | -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ , 如图 3 所示.

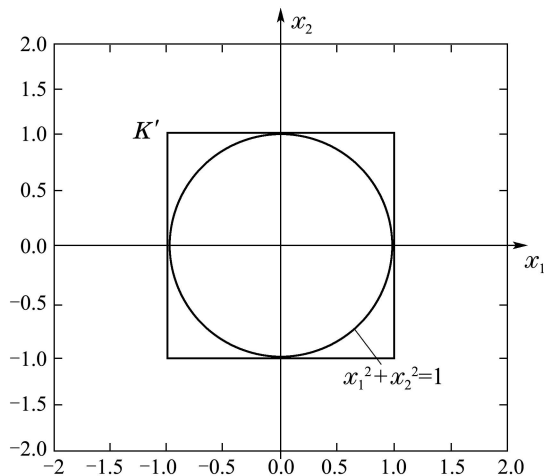


图 3 圆的近似生存域

Fig. 3 Approximate viable set of a circle

在顶点  $(1, 1)^T$  处, 解相应的线性不等式组得  $u_1 = (-3, -1)^T$ , 在顶点  $(-1, 1)^T$  处, 解相应的线性不等式组得  $u_2 = (-1, -1)^T$ , 在顶点  $(-1, -1)^T$  处, 解相应

的线性不等式组得  $u_3 = (-1, 1)^T$ , 在顶点  $(1, -1)^T$  处, 解相应的线性不等式组得  $u_4 = (1, 1)^T$ . 于是由算法 2, 可以得到当

$$(x, v)^T = \lambda_1(1, 1)^T + \lambda_2(-1, 1)^T + \lambda_3(-1, -1)^T + \lambda_4(1, -1)^T$$

时, 控制为

$$\bar{u} = \lambda_1(-3, -1)^T + \lambda_2(-1, -1)^T + \lambda_3(-1, 1)^T + \lambda_4(1, 1)^T.$$

由上面得到的控制器可以知道只要控制正方形的 4 个顶点, 就可以将两类细菌的数量控制在正方形所表示的区域以内, 即两种群的数量都在区间  $[-1, 1]$  内.

### 5 结语(Conclusions)

本文研究了连续线性系统和离散线性系统近似生存性的问题. 给出了任意一个凸紧集的近似生存域表示, 此表示主要是利用了集合边界上每一点的逼近法锥. 另外, 即使集合不满足凸紧的条件, 比如集合只满足闭的条件的时候, 逼近法锥存在的点在边界集上是稠密的, 所以此方法仍然成立. 然后, 给出了控制器的设计, 使得系统在近似生存域上是可生存的. 最后, 给出了实际例子来说明结果的有效性.

### 参考文献(References):

- [1] 陈征, 高岩. 人口控制的混杂模型与应用 [J]. 系统管理学报, 2009, 18(1): 107 - 110.  
(CHEN Zheng, GAO Yan. Hybrid model of population control and its application [J]. *Journal of System & Management*, 2009, 18(1): 107 - 110.)
- [2] 陈征, 高岩. 两种群捕食-被食系统收获模型及控制 [J]. 生物数学学报, 2009, 24(3): 419 - 426.  
(CHEN Zheng, GAO Yan. Two species predator-prey system harvest model and control [J]. *Journal of Biomathematics*, 2009, 24(3): 419 - 426.)
- [3] AUBIN J P. *Dynamic Economic Theory: a Viability Approach* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [4] GAO Y, LYGEROS J, QUINCAMPOIX M, et al. On the control uncertain impulse systems: approximate stabilization and controlled invariance [J]. *International Journal of Control*, 2004, 77(16): 1393 - 1407.
- [5] AUBIN J P. *Viability Theory* [M]. Boston: Birkhauser, 1991.
- [6] BENE C, DOYEN L, GABAY D. A viability analysis for a bio-economic model [J]. *Ecological Economics*, 2001, 36(3): 385 - 396.
- [7] AUBIN J P, BAYEN A M, PATRICK S P. *Viability Theory New Directions* [M]. Princeton: Springer-Verlag, 2011.
- [8] 高岩. 仿射非线性控制系统生存性的判别 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(6): 654 - 656.  
(GAO Yan. Determining the viability for an affine nonlinear control system [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(6): 654 - 656.)
- [9] 蒋卫华, 黄琳, 楚天广, 等. 离散非线性时变凸多面体系统族的鲁棒正不变集 [J]. 自动化学报, 2001, 27(5): 631 - 636.  
(JIANG Weihua, HUANG Lin, CHU Tianguang, et al. Robust positively invariant sets of discrete-time nonlinear and time-variable convex polyhedral system family [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(5): 631 - 636.)

- [10] HU T, MA L, LIN Z. Stabilization of switched systems via composite quadratic functions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(11): 2571 – 2585.
- [11] LIMON D, ALAMO T, CAMACHO E F. Enlarging the domain of attraction of MPC controllers [J]. *Automation*, 2005, 41(4): 629 – 635.
- [12] BORRELLI F, VECCHIO C D, PARISIO A. Robust invariant sets for constrained storage systems [J]. *Automation*, 2009, 45(12): 2930 – 2936.
- [13] 高岩. 非光滑优化 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.  
(GAO Yan. *Nonsmooth Optimization* [M]. Beijing: Science Press, 2008.)
- [14] CLARKE F H, LEDA YU S, STEM R J, et al. *Nonsmooth Analysis and Control Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [15] YAN H, WEI Q L. A method of transferring cones of intersection form to cones of sum form and its applications in data envelopment analysis models [J]. *International Journal of Systems Science*, 2000, 31(5): 629 – 638.
- [16] DEN HERTOOG D. *Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming: Algorithms and Complexity* [M]. Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1994.
- [17] BOTKIN N D, RYAZANTSEVA E A. Structure of viability kernel for some linear differential games [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2010, 147(1): 42 – 57.

#### 作者简介:

陈征 (1977-), 男, 博士, 目前研究方向为混杂系统的稳定性和生存性, E-mail: chenzhengnb@tom.com;

高岩 (1962-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非光滑优化、非线性系统和混杂系统的稳定性与生存性, E-mail: gaoyan@usst.edu.cn.

## 《智能系统学报》2014年征订启事

《智能系统学报》(CAAI Transactions on Intelligent Systems)是中国人工智能学会会刊, 由中国人工智能学会和哈尔滨工程大学联合主办, 并且被“中国科学引文数据库(CSCD)”、“中国科技论文统计源期刊”(中国科技核心期刊)、《中文核心期刊要目总览》(中文核心期刊)、英国《科学文摘》、美国《剑桥科学文摘》、波兰《哥白尼索引》等数据库收录. 读者对象主要为国内外各研究机构的科研人员、相关企业工程技术人员及高等院校相关专业广大师生.

本刊以“构建智能平台, 打造精品期刊”为办刊理念和目标, 主要刊登智能科学领域最新的科研成果和高水平的学术论文. 所刊内容包括人工智能与计算智能、智能控制与决策、智能信息处理、专家系统与知识工程、机器学习与知识发现、人工心理与机器情感以及智能技术在各领域的应用等. 该刊以较强的专业性和学术影响力, 受到了专家和学者的广泛关注, 目前已成为智能科学领域具有较高知名度的学术期刊.

该刊创刊于2006年, 为双月刊, 连续出版物号: ISSN 1673-4785, CN 23-1538/TP, 国内邮发代号: 14-190, 国外邮发代号: BM4940, 定价15元/期, 90元/年. 全国各地邮局均可订阅, 也可直接联系期刊编辑部办理.

**通信地址:** 哈尔滨市南岗区南通大街145号1号楼《智能系统学报》编辑部

**邮政编码:** 150001

**联系电话:** 0451-82518134

**邮 箱:** tis@vip.sina.com

**网 址:** http://tis.hrbeu.edu.cn