

离散时间系统零动态的研究现状和未来挑战

曾 诚^{1,2}, 梁 山^{1,3†}, 李洪兵¹, 苏盈盈¹

(1. 重庆大学 自动化学院, 重庆 400044; 2. 贵阳学院 数学系, 贵州 贵阳 550005;

3. 重庆大学 信息物理社会可信服务计算教育部重点实验室, 重庆 400044)

摘要: 在数字控制系统的分析与设计中, 零动态是一个被广泛关注的重要概念, 近年来取得了诸多新的理论与方法进展. 本文首先描述了离散时间系统零动态理论的研究背景和研究意义, 同时简要介绍了离散时间系统零动态理论所涉及到的3个相关问题, 如: 信号的采样与重建、连续时间系统的等价离散时间系统模型以及在离散连续时间系统过程中所需要的工具(q 算子和 δ 算子). 其次, 立足现有文献, 针对离散零动态的特点, 从线性离散时间系统和非线性离散时间系统两个方面全面而深入地介绍了近年来离散零动态研究工作的进展. 最后分析了零动态在数字控制系统分析与设计中的局限性以及出现的挑战性课题, 并指明未来工作的研究方向.

关键词: 零动态; 稳定性; 离散时间系统; 信号重建; 采样控制器

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Current development and future challenges for zero dynamics of discrete-time systems

ZENG Cheng^{1,2}, LIANG Shan^{1,3†}, LI Hong-bing¹, SU Ying-ying¹

(1. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. Department of Mathematics, Guiyang University, Guiyang Guizhou 550005, China;

3. Key Laboratory of Dependable Service Computing in Cyber Physical Society, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Zero dynamics has been broadly concerned in the analysis and design of digital control systems, about which a number of novel methods and algorithms have been developed recently. We give a description about the research background and the significance of the zero dynamics theory for discrete-time systems, and briefly introduce several related issues of the discrete system zero dynamics theory, such as the signal sampling and reconstruction, discrete-time modeling of continuous-time systems, as well as the tools for discretization, i.e. q -operator and δ -operator. According to the current literature, we categorize comprehensively the current development of the discretization zero dynamics in linear and nonlinear discrete-time systems. Finally, restrictions and challenging problems of zero dynamics in computer-controlled systems are put forward to readers, showing the future research directions in this field.

Key words: zero dynamics; stability; discrete-time systems; signal reconstruction; sampled-data controller

1 引言(Introduction)

在控制系统分析与设计中, 零动态是一个极其重要的概念. 它与高增益反馈、状态反馈、稳定交互控制、输出调节、无源性等有密切的联系^[1]. 而随着计算机技术的迅速发展, 目前所有的控制系统实际上都是基于计算机控制来实现的. 也就是说, 所有的现代控制系统都是计算机控制系统. 计算机控制系统中既含有连续时间信号, 也含有离散时间信号(采样信号), 通常称这类系统为离散时间系统(采样数据模型). 目前对于离散时间系统的分析与设计已经成为国际控制

论界持续的研究热点之一^[2-3]. 而离散时间系统的零动态作为衡量离散时间系统稳定性和精确性等内在特性的重要指标, 得到了众多的理论和应用工作者的极大兴趣和关注, 被广泛应用于敏感度和鲁棒性^[4-6]、反馈控制系统中的跟踪特性和逆系统^[7-10]、模型匹配系统和模型参考自适应控制器^[11-13]等领域.

纵观离散时间系统零动态的研究历程, 可以将其分为两个阶段: 第1个阶段为线性系统零动态的研究阶段, 这个阶段的零动态也被称为零点. 它反映内部变量与输入输出的耦合关系, 在控制系统分析与设计

收稿日期: 2013-03-29; 收修改稿日期: 2013-07-11.

†通信作者. E-mail: lightsun@cqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574003); 重庆市科委自然科学基金计划资助项目(cstc2012jjA40026); 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJXS12170006); 贵州省科学技术基金资助项目(黔科合J字LKG[2013]46号).

中起着非常重要的作用. 此外, 由于采样过程影响零动态的稳定性, 使得零动态在数字控制系统设计与分析中的作用进一步增强. 因此自1984年著名的控制论学者Åström等^[14]关于线性离散时间系统零动态奠基性的研究以来, 研究者围绕不同的信号保持器下线性离散零动态的特性问题, 面向单输入单输出(single-input single-output, SISO)系统, 时间延迟系统和多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)系统展开了广泛而持续的研究, 取得了丰硕的研究成果. 另一方面, 物理系统本质上就是非线性的, 且一切控制系统都是一定程度上的非线性系统, 线性系统只是为了数学处理上的简化而导出的一种理想化的模型. 这就导致了第2阶段的研究: 非线性系统零动态的研究阶段. 对于非线性系统, 研究者初步探讨了非线性系统的离散零动态, 并且惊奇的发现能保持与线性系统相类似的结果^[15]. 但是由于系统的非线性, 对非线性系统离散零动态的研究显得更为困难和复杂. 因此将线性离散时间系统零动态研究的注意力转到非线性系统零动态就是一个自然和必要的要求^[16-17].

零动态的稳定性与采样控制系统的控制性能, 以及采样控制器的设计都有密切的联系, 因此不稳定零动态系统的控制问题是控制系统设计与分析中的主要挑战之一. 不稳定零动态的存在限制了控制系统可能达到的控制性能, 也导致很难构建一些控制系统. 此外在前馈补偿控制中, 要求被控系统具有一个与自身相逆的系统作为补偿控制器, 即要求对象必须具有稳定的零动态. 另一方面, 当一个连续时间系统经采样开关和保持器离散化后, 连续时间系统的零动态和离散时间系统的零动态之间的关系变得非常复杂, 即使原连续时间系统是最小相位的, 相应的离散时间系统仍将呈现非最小相位特性, 其原因就在于离散后的控制系统存在不稳定零动态(采样零动态), 这也说明零动态的稳定性在采样过程中不一定能得到保存.

为帮助人们对离散时间系统零动态的研究成果、研究现状及其发展趋势的全面了解, 本文将对关于离散时间系统零动态的研究工作和研究成果予以回顾, 并在此基础上对未来研究工作的方向进行若干讨论, 以加深人们对离散时间系统零动态的理解, 更好地推进零动态性质的研究工作, 从而促进离散时间系统零动态稳定性理论自身的发展和在实际工程中的应用.

2 理论基础(Preliminaries)

离散时间控制系统包含信号的采样和保持两个过程, 即对连续时间信号的采样离散化和对采样数据信号重建为连续时间信号. 另外在数字控制中, 信号重建装置是必不可少的, 而不同的信号重建装置将影响零动态的位置. 因此针对基于不同信号重建装置形式的离散时间系统零动态稳定性的研究正逐渐引起关

注. 本节将对几类信号重建装置和离散时间系统模型进行介绍.

2.1 信号的采样与重建(Signal sampling and reconstruction)

数字计算机已经成为现代工业控制系统不可缺少的重要组成部分. 目前所有的现代控制系统实际上都是基于计算机控制的离散时间系统. 离散时间系统可以用图1来简要描述, 它通常由采样开关、信号保持器和连续时间系统组成. 在数字控制系统中, 每个采样周期对模拟信号采样一次, 而对控制对象施加控制信号时, 需要再把采样信号转换成连续信号, 即存在信号的采样与重建过程. 采样开关将连续时间信号 $y(t)$ 转换成发生在采样瞬时 $t = kT$ ($k = 1, 2, \dots$)的脉冲序列 $y(kT)$, 其中 T 为采样周期. 数据保持电路则将离散时间序列 $u(kT)$ 重建为连续信号 $u(t)$.

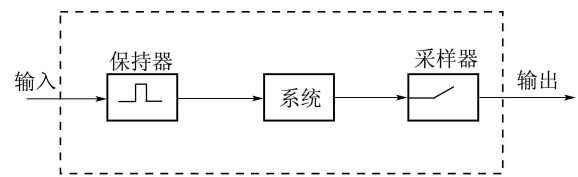


图1 离散时间系统结构

Fig. 1 Discrete-time system configuration

在离散时间控制中, 信号的重建装置是必不可少的. 常用的控制器分为单率采样信号保持器和多率采样信号保持器. 单率采样信号保持器通常假定系统各处的采样器和保持器都在同一瞬间同时采样或保持, 例如零阶保持器(zero-order hold, ZOH)^[14, 18-27]、一阶保持器(first-order hold, FOH)^[28]和分数阶保持器(fractional-order hold, FROH)^[29]; 而多率采样信号保持器则是指数字控制系统内各个采样器或保持器以不同的采样周期进行采样或保持的保持器, 例如广义采样保持函数(generalized sampled-data hold function, GSHF)^[30-31]、non-ZOH^[32]和多率输入保持器(multi-rate-input hold)^[33-34].

2.1.1 单率采样信号保持器(Single-rate sampled signal and hold)

ZOH, FOH和FROH是单率采样信号保持器, 同时ZOH和FOH也可以被看作是FROH的特殊情形. FROH^[29]称为分数阶保持器; 也可以看作对FOH的扩展, 称为广义一阶保持器. 其输出可以被描述为

$$u(t) = u(kT) + \beta \left[\frac{u(kT) - u(k-1)T}{T} \right] (t - kT),$$

$$kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

其中 β 是比例因子. 显然, 当FROH的比例因子分别为 $\beta = 0$ 和 $\beta = 1$ 时, 则可以分别退化为ZOH和FOH.

因此通过对比例因子的选择, ZOH和FOH可以被看作是FROH的特殊情形. 即ZOH^[14]和FOH^[28]的输出可分别描述为

$$u(t) = u(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

$$u(t) = u(kT) + \frac{u(kT) - u(k-1)T}{T}(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

其中ZOH是最常用和最简单的保持器, 它就是将 kT 时刻的采样值 $u(kT)$ 一直保持到下一个采样时刻 $(k+1)T$.

同理, 它们的传递函数也类似, ZOH和FOH都可以被看作是FROH的比例因子分别为 $\beta = 0$ 和 $\beta = 1$ 时的特殊情形, 其中FROH的传递函数可表示为

$$G_\beta(s) = (1 - \beta e^{-Ts}) \frac{1 - e^{-Ts}}{s} + \frac{\beta}{Ts^2} (1 - e^{-Ts})^2. \quad (4)$$

当 $\beta = 0$ 时, 则有ZOH的传递函数可表示为

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (5)$$

当 $\beta = 1$ 时, 则FOH的传递函数可表示为

$$G_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \left(1 + \frac{1}{Ts}\right) (1 - e^{-Ts}). \quad (6)$$

注 1 由于利用电子元件精确实现FROH是非常困难的, 因此利用ZOH近似地实现FROH就成为了一种方便并可实施的解决方案, 这种保持器称之为近似分数阶保持器 (approximated FROH, AFROH)^[35-36]. 其基本思想就是利用ZOH在每个采样区内产生 N 个阶梯波形来近似FROH的输出. AFROH的输出表达式和传递函数表达式可参看文献[35], FOH, FROH和AFROH的输出如图2所示.

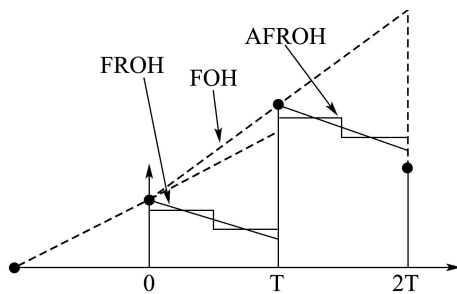


图 2 FOH, FROH和AFROH的输出

Fig. 2 Output of the FOH, FROH and AFROH with $N = 2$ and $\beta = -0.5$

2.1.2 多率采样信号保持器 (Multirate sampled signal and hold)

GSHF^[30]的基本思想是依靠保持函数对系统的输出进行周期性采样并产生控制信号. GSHF可被定义为离散时间系统控制输入 $u(kT)$ 到连续时间系统的控制输入 $u(t)$ 映射, 即

$$u(t) = h(t - kT)u(kT), \quad (7)$$

其中 $h(t)$ 为任意保持函数. 由于 $h(t)$ 通常是由指数函数和正弦函数构成的, 在实际应用中要确定这个函数非常困难. 因此一种分段线性GSHF (piecewise constant GSHF, PC GSHF)^[31]

$$h(t) = \begin{cases} \alpha_1, & t \in [0, \frac{T}{N}), \\ \alpha_2, & t \in [\frac{T}{N}, \frac{2T}{N}), \\ \vdots \\ \alpha_N, & t \in [\frac{(N-1)T}{N}, T), \end{cases} \quad (8)$$

获得了广泛关注. 它将采样周期进行规则的划分, 划分后的每个分段区间就如同应用ZOH作为采样保持器, PC GSHF又被称为non-ZOH^[32], 多率输入保持器^[33-34]. ZOH和PC GSHF的脉冲响应如图3所示.

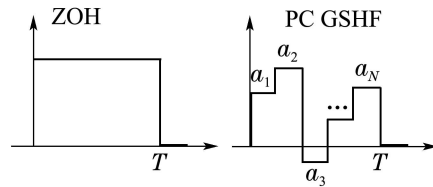


图 3 ZOH和PC GSHF脉冲响应图

Fig. 3 Pulse response of a ZOH and a PC GSHF

此外, 从PC GSHF的多重输出(图4)可以看出, 每一个采样周期 T 都被分成 N 个子区间, 每个子区间长度为 $D = \frac{T}{N}$, 控制系统在每个子区间 $[kT, D)$ 输入可表示为

$$u(kT + D) = u_j(kT), \quad \frac{(j-1)T}{N} \leq D < \frac{jT}{N}. \quad (9)$$

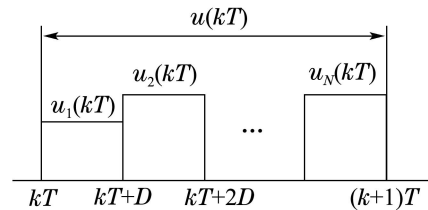


图 4 PC GSHF的多重输出

Fig. 4 Multiplicity output of a PC GSHF

从式(8)–(9)可以进一步得到

$$u_j(kT) = \alpha_j u(kT), \quad j = 1, \dots, N. \quad (10)$$

由式(9)–(10)可知: 当 $N = 1$ 或 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N$ 时, PC GSHF就是ZOH. 此外当 N 足够大时, PC GSHF可以任意接近GSHF的形式.

2.2 连续时间系统的离散时间系统模型 (Discrete-time models of continuous-time systems)

由于本文关注的是离散时间系统零动态特性, 而离散时间系统是通过采样保持装置对相应的连续时间系统进行离散化而得到的. 因此, 应用不同的信号

重建装置, 相应的连续时间系统将获得不同的离散时间模型.

本文所考虑的线性SISO系统是一个能控能观测的正有理线性时不变系统, 其状态空间模型和传递函数可描述如下:

$$S_C : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (11a)$$

$$G(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \quad (11b)$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

其中: $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为输入和输出标量, $\mathbf{x}(t)$ 为状态向量.

而本文所考察的 n 阶线性MIMO系统将局限于一个能控能观测的 m 输入 m 输出 n 阶线性时不变可逆系统, 其状态空间模型和传递函数可表示为

$$S_{CM} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (12a)$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (12b)$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m,$$

其中: $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ 和 $\mathbf{x}(t)$ 分别为输入向量、输出向量和状态向量.

2.2.1 FROH等价模型(FROH equivalent models)

因为ZOH和FOH是FROH的特例, 因此对ZOH等价模型和FOH等价模型描述可以通过描述FROH等价模型来导出.

SISO系统(11)的FROH等价离散时间系统模型为^[37]

$$S_{DFR} : \begin{cases} \bar{\mathbf{x}}((k+1)T) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{x}}(kT) + \Psi u(kT), \\ y(kT) = \Omega \bar{\mathbf{x}}(kT), \end{cases} \quad (13)$$

其中: $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}(kT) \ u((k-1)T)]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, 矩阵 \mathbf{F} , Ψ 和 Ω 分别为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Phi & \beta\Lambda \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \Gamma - \beta\Lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \Omega = [\mathbf{c} \ 0],$$

$$\Phi = e^{A\tau}, \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{b} d\tau, \quad (14)$$

其中 $\Lambda = -\int_0^T (1 - \frac{\tau}{T}) e^{A\tau} \mathbf{b} d\tau$, 而 $\mathbf{0}$ 表示所含元素都为零的 n 行向量.

MIMO系统(12)的FROH等价离散时间系统模型为^[38]

$$S_{DMFR} : \begin{cases} \bar{\mathbf{x}}((k+1)T) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{x}}(kT) + \Psi\mathbf{u}(kT), \\ \mathbf{y}(kT) = \Omega\mathbf{x}(kT), \end{cases} \quad (15)$$

其中: $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}(kT) \ \mathbf{u}((k-1)T)]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\mathbf{u}(kT) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(kT) \in \mathbb{R}^m$, 矩阵 \mathbf{F} , Ψ , Ω 分别为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Phi & \beta\Lambda \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \Gamma - \beta\Lambda \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \Omega = [\mathbf{C} \ \mathbf{0}_m],$$

$$\Phi = e^{A\tau}, \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau \quad (16)$$

其中 $\Lambda = -\int_0^T (1 - \frac{\tau}{T}) e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau$.

在系统(13)和(15), 当参数 $\beta = 0$ 时, 分别可得到ZOH等价SISO离散时间系统模型^[14]和MIMO离散时间系统模型^[39]:

$$S_{DZ} : \begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) = \Phi\mathbf{x}(kT) + \Gamma u(kT), \\ y(kT) = \mathbf{c}\mathbf{x}(kT), \end{cases} \quad (17)$$

$$S_{DMZ} : \begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) = \Phi\mathbf{x}(kT) + \Gamma\mathbf{u}(kT), \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT), \end{cases} \quad (18)$$

而当参数 $\beta = 1$ 时, 可得到FOH等价SISO离散时间系统模型^[28]:

$$S_{DF} : \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}((k+1)T) \\ u(kT) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma - \Gamma_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ u((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \\ y(kT) = [\mathbf{c} \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ u((k-1)T) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$\Gamma_1 = \int_0^T (2 - \frac{\tau}{T}) e^{A\tau} \mathbf{b} d\tau. \quad (20)$$

注2 当采用AFROH作为采样保持装置, 可获得类似于FROH的离散时间系统模型^[35].

注3 在保持离散时间系统零动态的稳定性方面, 由于FOH不能够提供比ZOH, FROH和PC GSHF更好的性能^[28, 33, 37], 因此仅针对SISO系统, 讨论FOH条件下的零动态稳定性问题.

2.2.2 PC GSHF等价模型(PC GSHF equivalent models)

SISO系统(11)的PC GSHF等价离散时间系统模型为^[33]

$$S_{DGG} : \begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) = \Phi\mathbf{x}(kT) + \Gamma_G u(kT), \\ y(kT) = \mathbf{c}\mathbf{x}(kT), \end{cases} \quad (21)$$

其中:

$$\Gamma_G = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \alpha_j, \Gamma_j = \int_{(1-\frac{j}{N})T}^{(1-\frac{j-1}{N})T} e^{A\tau} \mathbf{b} dt, \quad (22)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

MIMO系统(12)的PC GSHF等价离散时间系统模型为^[40]

$$S_{\text{DMG}} : \begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) = \Phi \mathbf{x}(kT) + \Gamma_G \mathbf{u}(kT), \\ \mathbf{y}(kT) = C \mathbf{x}(kT), \end{cases} \quad (23)$$

其中:

$$\Gamma_G = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \alpha_j, \quad \Gamma_j = \int_{(j-1)T}^{jT} e^{At} B dt, \quad (24)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

注 4 当 $N = 1$ 或 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N$ 时, ZOH 等价模型就是 PC GSHF 等价模型的一个特例, 并且

$$\Gamma_G \equiv \Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j.$$

注 5 非线性连续时间系统同线性连续时间系统类似, 也有在不同重建信号条件下的离散时间模型. 但由于非线性的复杂性和特殊性, 一般无法像线性系统那样获得精确的离散时间系统模型, 仅可能获得近似离散时间系统模型. 目前对于非线性近似离散时间系统模型的研究也仅限于一些初步的描述, 还缺乏对其系统和全面的刻画与研究, 尤其对于非线性 MIMO 系统近似离散时间模型的研究(可参看第 4 部分).

2.3 q 算子和 δ 算子(q -operator and δ -operator)

微分算子运算是解线性常微分方程的有力工具, 对于由常系数线性差分方程所描述的系统, 亦可以建立一种类似的算子运算方法. q 算子和 δ 算子在连续时间系统及其相应的离散时间系统的联系中扮演着重要的角色, 并且 δ 算子与 q 算子之间可以相互转化^[15]:

$$\delta = \frac{q-1}{T} \iff \gamma = \frac{z-1}{T}, \quad (25)$$

其中: z 和 γ 分别为 q 域和 δ 域上涉及的复变量, T 为采样周期. q 算子也被称为正向平移算子, 即 $qf(k) = f(k+1)$. q 算子具有单位范数, 这说明 q 算子比微分算子的计算简单, 因为微分算子是无界算子. 与正向平移算子相反的算子称为后向平移算子或延迟算子, 记作 q^{-1} , 即 $q^{-1}f(k) = f(k-1)$. 大部分的学者在研究离散时间系统零动态的时候, 都是采用传统的 q 算子作为研究工具. 此外, 关于利用 δ 算子来研究零动态稳定的问题也是学者们广泛关注的课题之一^[41-42]. δ 算子是另外一种采样连续时间系统的方法, 它可以克服 q 算子在采样频率增加和采样周期很小时的扰动问题, 更加趋近于原来的连续时间模型. 在计算机控制系统中, 一般希望采样频率越高越好(即 $T \rightarrow 0$), 离散时间系统越逼近连续系统的动态特性. 但在利用 q 算子处理离散时间模型时, 最小相位连续系统的离散时间模型会变成具有不稳定零动态的非最小相位连续系统, 而且计算机字长有限, q 算子迭代可能引起较大的舍入误差并带来极限环振荡等问题. δ 算子现已被广泛地用于系统辨识、鲁棒控制和随机系统等众多领域^[42-43].

3 线性离散时间系统的零动态(Zero dynamics of linear discrete-time systems)

线性离散时间系统分为SISO系统和MIMO系统. 其中SISO系统是MIMO系统的特例, 因此对离散时间系统零动态的研究工作都是从SISO系统开始的. 在SISO系统中, 传递函数 $G(s)$ 分母的最高次数与分子的最高次数之差称之为相对阶数(relative degree)或极点盈数(pole excess), 它在SISO离散时间系统零动态特性的研究中扮演着非常重要的角色. 与SISO系统相比, 由于MIMO系统存在子系统、输入和输出间的耦合等复杂性, 对MIMO离散时间系统零动态特性的研究显得更为困难和复杂. 对MIMO离散时间系统, 学者们用系统矩阵的无限初等因子次数来表征MIMO离散时间系统零动态的特性^[44], 它与单变量系统的相对阶数有密切联系. 另一方面, 极点和零动态包含了线性控制系统的基本特性. 极点反映系统的内部耦合和自治特性, 而零动态反映内部变量与输入输出的耦合关系.

3.1 线性离散零动态的定义(Definition of linear discretization zero dynamics)

对于SISO有限维系统, 其零动态能够方便地从脉冲传递函数的分子多项式中得到. 由于MIMO系统的零动态可定义为系统零动态(system zero dynamics)、传递零动态(transmission zero dynamics)和不变零动态(invariant zero dynamics)等多种形式, 尽管其定义上有些偏差和不确切, 但是关于MIMO系统零动态的所有定义都被看作是SISO系统零动态的扩展^[45]. 进一步, 对于一个可逆的、能控能观的正方系统, 系统零动态、不变零动态以及传递零动态的定义是一致的^[46-47]. 因此对于MIMO系统, 在假设条件(能控能观、严格正有理线性时不变系统)下, 系统零动态、传递零动态和不变零动态这3类零动态统称为系统 S_{CM} 的零动态. 系统 S_{C} (式(11))和 S_{CM} (式(12))的零动态都是 $\det N(s)$ 的根, 其中 $N(s)$ 为 S_{C} (S_{CM})的系统矩阵^[48]. 对系统(11)–(12)分别进行采样保持, 即可得到相应的离散时间系统. 对足够小的 T , 离散时间系统 S_{D} (S_{DM})的零动态与连续时间系统 S_{C} (S_{CM})的零动态有相同的特性^[39, 48]. 因此, S_{D} (S_{DM})的零动态同样可以表示为 $\det N_d(z)$ 的根, 其中 $N_d(z)$ 为相应的 S_{D} (S_{DM})的系统矩阵^[48].

3.2 真性零动态和采样零动态(Intrinsic zero dynamics and sampling zero dynamics)

离散时间系统零动态由真性零动态和采样零动态两部分组成, 真性零动态与连续时间系统的零动态相对应, 是在采样过程中从连续时间系统保留下来的; 而采样零动态则是在采样过程中新产生的. 这也正是导致离散时间系统和连续时间系统零动态个数不同

的重要原因,并且采样零动态通常与原来的连续时间系统零动态之间没有任何明确的联系,因此采样零动态是研究者们研究和关注的重点.基于上述原因,对零动态,尤其是采样零动态的性质进行分析是非常有必要的.

连续时间系统零动态与真性零动态的关系可以由Hagiwara定理来描述^[28].设 $s = \gamma \in C$ 是 $G(s)$ 的一个 μ 重零动态, S 是一个只含有 Γ 的单连通边界域,其它零动态不在域内和边界上,则一定存在 $T_{0s}(> 0)$,使得对每个 T 满足 $0 < T < T_{0s}$, $H_Z(z)$ 有 μ 个零动态在域

$$\exp(ST) = \{\exp(sT) | s \in S\}. \quad (26)$$

Hagiwara定理描述了离散化后的真性零动态与相应连续时间系统零动态之间的关系,这个关系将这两种零动态以更精确的方式对应起来,推广了文献[14]的相应结果.另外从Hagiwara定理可以有如下结论:如果离散时间系统零动态组成的集合都与原来连续时间系统的零动态相对应,则这个集合一定是真性零动态的集合.在这样的集合中,如果连续时间系统的零动态是稳定的,则相应离散时间系统的零动态也是稳定的.

因零动态的研究重点主要是关注采样后新产生的零动态,故采样零动态是离散时间系统零动态研究的重点.采样零动态有重要的性质^[28]:设 $G(s)$ 的相对阶数为2,则 $H_Z(z)$ 有一个采样零动态在 $T \rightarrow 0$ 时趋近于 $z = -1$,如果

$$\sum[\text{pole of } G(s)] < \sum[\text{zero of } G(s)], \quad (27)$$

则采样零动态从稳定区域趋近于 $z = -1$,反之采样零动态从不稳定区域趋近于 $z = -1$.

从采样零动态的性质可以看出:当连续时间系统传递函数 $G(s)$ 的相对阶数为2时,离散时间系统有一个采样零动态位于单位圆上,因此这个采样零动态是渐近稳定的.如果要对该单位圆上采样零动态的稳定性进行研究,就必须对采样零动态的渐近性质进行详细探讨,分析该采样零动态以何种方式趋近于 -1 .

3.3 采样保持器和线性离散零动态(Sample-and-hold and linear discretization zero dynamics)

在离散时间系统中,信号的重建装置是必不可少的.然而由于不同的信号重建装置将影响零动态的位置,因此对基于不同信号保持器形式的离散时间系统零动态渐近性质和稳定性质的研究得到了广泛关注.

3.3.1 ZOH条件下的离散零动态(Discretization zero dynamics with ZOH)

关于离散时间系统零动态的奠基性研究是由著名的控制论学者Åström等^[14]于1984年作出的.这个结果又被称为Åström定理,它描述了SISO系统在ZOH

条件下零动态的渐近特性.假定 $G(s)$ 是一个严格正有理传递函数,并且有如下表述形式:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}, \quad (28)$$

其中: $n > m$,并且 $K \neq 0$.当采样周期 $T \rightarrow 0$ 时,在ZOH条件下,对应的离散时间传递函数 $H_Z(z)$ 有 $n - 1$ 个零动态,其中 m 个零动态趋向于1,其余的 $n - m - 1$ 个零动态趋近于多项式 $B_{n-m}(z)$ 的根. $H_Z(z)$ 表述为

$$K \frac{T^{n-m}}{(n-m)!} \frac{(z-1)^m B_{n-m}(z)}{(z-1)^n}, \quad (29)$$

其中 $B_p(z)$ ($p = n - m \geq 1$)定义为

$$B_p(z) = b_{p1}z^{p-1} + b_{p2}z^{p-2} + \cdots + b_{pp}, \quad (30)$$

$$b_{pk} = \sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} l^p \binom{p+1}{k-l}, \quad k=1, \cdots, p. \quad (31)$$

从Åström定理可知零动态包括两个部分:一部分与连续时间系统零动态相对应,趋近于1;而另一部分则是在采样过程中新增加的,由相应连续时间系统的相对阶数或极点盈数决定,并收敛到特定多项式 $B_{n-m}(30)$ 的根.Hagiwara^[49]将前一部分零动态称为真性零动态,而将后一部分零动态称为采样零动态.其中采样零动态是离散时间系统零动态研究的重点,这也是连续时间系统零动态个数与离散时间系统零动态个数的不同之处.

多项式 $B_{n-m}(z)$ 被称为回归多项式^[28],或Euler-Frobenius多项式^[50].多项式 $B_{n-m}(z)$ 的系数 b_{pk} 按照

$$b_{p1} = b_{pp}, \quad (32)$$

$$b_{pk} = kb_{(p-1)k} + (p-k+1)b_{(p-1)(k-1)}, \quad (33)$$

$$k = 2, \cdots, p-1$$

的形式递归计算求得.根据式(30)的计算结果可知:当 $n-m > 2$ 时,离散时间系统的传递函数(29)至少有一个不稳定的采样零动态存在.虽然文献[14, 28, 50]在定义和形式上对多项式 $B_{n-m}(z)$ 的描述有所不同,但可得出相同的结论.

在前人工作的基础上,人们对线性SISO离散时间系统的零动态又有了新的研究成果.

其一,Hagiwara^[20]提出采用泰勒幂级数展开来讨论离散时间系统的零动态问题.当 γ 是连续时间系统的单一零动态时,对于离散时间系统的真性零动态 $\Gamma(T)$ 可以用泰勒幂级数展开为

$$\Gamma(T) = 1 + \gamma(T) + \eta(T^2) + \xi(T^3) + O(T^4), \quad (34)$$

然后用 γ 来表示 η 和 ξ ,则可得到零动态的只含 γ 的表达式

$$\Gamma(T) = 1 + \gamma(T) + \frac{\gamma^2}{2}(T^2) + \left(\frac{\gamma^3}{6} + \frac{\gamma c b}{12\dot{G}(\gamma)}\right)(T^3) + O(T^4), \quad (35)$$

再应用式(35)可以得到 $\Gamma(T)$ 新的稳定条件. 此外, Hagiwara^[20]还指出对于多重零动态也有类似的结论. 利用泰勒幂级数展开这种方法来推导零动态的渐近性质和稳定条件在离散零动态的研究中是一种常用的数学方法, 这种方法现被许多研究者所使用.

其二, 不同于Hagiwara的研究方法, 波兰学者Blachuta^[21]对离散时间系统零动态又作了进一步的研究, 改进了Åström定理. 通过明确零动态渐近性质的精确性, 给出了连续时间系统在 $T \rightarrow 0$ 极限条件下新的研究结果, 这个结果也被称为脉冲传递函数的零动态特性定理(简称Blachuta定理). Blachuta定理主要是给出了两类零动态的解析式, 它可以用来表示采样周期非常小时真实零动态与采样周期趋近于零时渐近零动态的不同, 而且它是关于 T 的幂级数形式, 且它的阶数与连续时间系统相对阶数有关; 同时Blachuta的结果还可以用Bernoulli数、连续时间系统的传递函数的零动态和极点来表示, 这在零动态的研究中是一种新的思路和方法. 另外从Blachuta的研究结果还可以看出, 当采样周期趋近于零的时候, 采样零动态都是实数, 与连续时间系统零动态和极点无关; 但对于真性零动态, 如果连续时间系统零动态和极点都是复数, 则真性零动态也是复数.

注 6 Blachuta定理的构造形式和证明思路都很独特, 是通过引进Bernoulli数来研究和讨论零动态的特征, 并且它的结果具有很好的研究价值, 对此可以有进一步的思考和启发. 此外, 关于ZOH下脉冲传递函数的零动态特性定理^[21], 类似地可推广到FOH^[51]和FROH^[52]这两种条件下.

其三, 2010年, Ishitobi等^[53]结合Hagiwara^[20]和Blachuta^[21]的研究成果, 推导出了相对阶为1和2时关于零动态新的渐近结果. Ishitobi等首先用类似非线性系统的标准形(normal form)^[54-55]来表示线性连续时间系统, 然后通过泰勒幂级数近似展开, 再利用 Z 变换来研究相应的离散时间系统, 并通过多项式矩阵理论来导出新的关于零动态的渐近条件. Ishitobi等在Blachuta研究成果的基础上, 进一步提高了零动态渐近性质的精度, 扩大了零动态的应用范围. Liang等^[56]通过提高泰勒幂级数展开式的精度, 而进一步推广了Ishitobi等的研究成果.

注 7 用标准形来研究离散时间系统的零动态问题是一种有效的研究思路, 它可以克服传统方法中需要构造多项式分块矩阵来分析和讨论离散时间系统零动态的限制.

SISO系统可看做是MIMO系统的一个特例, 因此将离散时间系统零动态研究的注意力转移到MIMO系统是一个自然和必然的要求. 对多变量离散时间系统零动态最初的探索来自于Hayakawa等的研究工作. 在文献[39]中, Hayakawa等讨论了MIMO系统在ZOH条件下零动态的渐近特性, 证明了Åström等^[14]得出

的SISO系统的结果可以推广到最大最小无限初等因子次数之差小于2的正方系统. 如果连续时间系统 S_C 有 r 个零动态且最大最小无限初等因子次数之差小于2, 即 $\mu_1 = \dots = \mu_{m-k} = \mu$ 和 $\mu_{m-k+1} = \dots = \mu_m = \mu + 1 (1 \leq k \leq m)$, 则离散时间系统 S_{DMZ} 有 $n - m$ 个零动态, $n - m$ 个零动态中有 r 个零动态位于 $z = 1$, 其余的 $n - m - r$ 个零动态是多项式

$$B_\mu^k(z)B_{\mu+1}^{m-k}(z) = 0 \quad (36)$$

的根. 其中

$$B_i(z) = \begin{vmatrix} e^{N_i} - zI_i & \int_0^k e^{N_i\tau} b_i d\tau \\ C_i & 0 \end{vmatrix}. \quad (37)$$

上述结果又被称为Hayakawa定理, 这是对多变量系统零动态最早的研究工作. Hayakawa等在研究零动态问题上所采用的构造多项式分块矩阵的方法被后来的研究者广泛采用. 从Hayakawa定理可知, 对于无限初等因子次数均为2且所有零动态稳定的连续时间系统, 相应的离散时间系统的零动态是稳定的, 并且离散时间系统的零动态均为真性零动态; 而对于无限初等因子次数由2和3组成的连续时间系统, 则相应的离散时间系统的零动态位于单位圆上.

Hayakawa定理给出了多变量系统零动态的渐近性质, 但却没有指出零动态如何趋近于单位圆上. 针对Hayakawa定理在分析零动态特性上的缺陷, Ishitobi在文献[57]中讨论了特殊的2输入2输出三阶系统($\mu_1 = 2, \mu_2 = 3$), 并分析了离散时间系统零动态在单位圆上的轨迹. 而在文献[58]中, Ishitobi进一步将文献[57]的结果推广到 m 输入 m 输出 n 阶系统, 得到了关于 m 输入 m 输出 n 阶系统零动态的渐近条件, 这又被称为Ishitobi定理.

在Ishitobi定理的证明中, Ishitobi等首先讨论特殊的3输入3输出五阶情况($\mu_1 = \mu_2 = 2, \mu_3 = 3$), 然后推广到一般的 m 输入 m 输出 n 阶系统情况($\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m-1} = 2, \mu_m = 3$). 这种从特殊低阶情形推广到一般高阶情形的讨论方法在零动态问题的研究中经常被采用.

文献[59-60]则将Ishitobi定理推广到了更一般化的情形, 给出了 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m-k} = 2, \mu_{m-k+1} = \dots = \mu_m = 3 (0 \leq k \leq m - 1)$ 和 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 3 (k = m)$ 这两种更一般情形下关于零动态的近似公式. 应用该结果可对一类具有传感器和执行器非对称配置的质量-阻尼-弹簧二阶系统(noncollocated mass-dashpot-spring second-order system)的零动态特性进行分析.

从前述关于MIMO系统零动态渐近性质和稳定条件研究成果的回顾中可以得知: 在MIMO系统零动态的研究中, 大部分学者都是用连续时间系统的无限初

等因子来分析和讨论零动态问题^[39,58-59],但也可以用连续时间系统的相对阶来刻画其特征^[61].在文献[61]中,Ishitobi等指出只有当连续时间系统全部相对阶都是小于或等于2时,离散时间系统的零动态才可能保持稳定;此外,Ishitobi等还给出了在连续时间系统的全部相对阶为1或2,以及分别为1和2三种情形下,离散时间系统零动态的渐近性质和稳定条件.

另一方面,无限初等因子与相对阶数有密切的联系^[44].对于一个 n 阶 m 输入 m 输出的线性系统,令其传递函数矩阵 $G(s)$ 的秩为 γ ,对于 $G(s)$ 中不为0的 k 阶子式,如果 δ_k 是 k 阶子式中最小的相对阶数,则有

$$\mu_i = \delta_i - \delta_{i-1} + 1, i = 1, \dots, \gamma, \quad (38)$$

其中 μ_i 是系统矩阵的无限初等因子次数.

注8 从上面的分析可看出: $k=1$ 时的MIMO系统实际上就是SISO系统,即 δ_1 就是SISO系统的相对阶数 p ,因此MIMO系统的无限初等因子次数和SISO系统的相对阶数有密切关系.

与Hayakawa等的研究工作不同,Weller^[62]通过采用 δ 算子对另外一类多变量系统的零动态问题进行了详细研究,同样也论证了文献[14]的结果也可直接用于解耦MIMO系统^[62].

注9 关于Hayakawa等研究的MIMO系统零动态的渐近性质与Weller研究的解耦MIMO系统零动态的渐近性质之间的联系,可以展开进一步的讨论.

3.3.2 FROH条件下的离散零动态(Discretization zero dynamics with FROH)

上述各种针对离散时间系统零动态的研究成果都是建立在采用ZOH基础上的.在离散时间控制中,信号重建装置是必不可少的,而ZOH是最常用和最简单的保持器.但在ZOH条件下,不稳定零动态仍然是不可避免的,因此人们又提出了利用FROH采样来改善离散时间系统的零动态稳定性问题.

第一,Passion和Antsaklis^[29]考虑了在FROH条件下的离散时间系统零动态稳定性问题,并通过数值例子表明FROH能在ZOH不能够使零动态保持稳定的某些条件下保证零动态的稳定性.Ishitobi^[37]则给出了在FROH条件下零动态的渐近条件.当采样周期 $T \rightarrow 0$ 时,当采样保持器为FROH时,对应的FROH离散时间传递函数 $H_{FR}(z)$ 有 n 个零动态,其中 m 个零动态趋向于1,其余的 $n-m$ 个零动态趋向于多项式 $D_{n-m}(z, \beta)$ 的根. $H_{FR}(z)$ 可表述为

$$K \frac{T^{n-m}}{(n-m+1)!} \frac{(z-1)^m D_{n-m}(z, \beta)}{z(z-1)^n}, \quad (39)$$

其中

$$D_{n-m}(z, \beta) = \beta B_{p+1}(z) + (p+1)(z-\beta)B_p z. \quad (40)$$

在式(39)-(40)的基础上,Ishitobi进一步指出:在FROH条件下,相应离散时间系统零动态的稳定性依赖于参数 β ,同时还推导出保证零动态稳定的条件,并证明了FROH可以确保一大类具有相对阶数为2的连续时间系统的离散时间模型是逆稳定的.在文献[37]的基础上,Bárcena等^[63]提出了新的FROH条件下零动态稳定条件,并通过数值仿真指出:对于FROH,总存在负的 β 值,使其能获得比ZOH和FOH更稳定的零动态.这个条件比文献[37]给出的零动态稳定条件适用范围更大,应用价值更广,而多项式 $D_{n-m}(z, \beta)$ 也有类似 $B_{n-m}(z)$ 的性质:

a) 对任意的相对阶 $p = n - m$, $D_p(z, \beta)$ 的所有根都是实值单根,其中 $(p-1)$ 个根位于负实轴,另外一个位于区间 $(0, 1)$.

b) 对任意的相对阶 $p = n - m$, $D_p(z, \beta)$ 的第 k 个根位于 $B_p(z)$ 的第 k 个根和 $B_{p+1}(z)$ 的第 k 个根之间.即:如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}$ 是 $B_p(z)$ 的根, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ 是 $B_{p+1}(z)$ 的根, $\zeta_1(\beta), \zeta_2(\beta), \dots, \zeta_p(\beta)$ 是 $D_p(z, \beta)$ 的根,则对任意的 $\beta > 0$,有

$$\begin{aligned} \eta_1 < \zeta_1(\beta) < \xi_1 < \eta_2 < \zeta_2(\beta) < \xi_2 < \eta_3 < \dots < \\ \eta_{p-1} < \zeta_{p-1}(\beta) < \xi_{p-1} < \eta_p < 0 < \zeta_p(\beta) < 1. \end{aligned} \quad (41)$$

第二,由于利用电子元件精确实现FROH是非常困难的,因此Ishitobi等^[35]提出了一种基于ZOH的FROH近似实现形式—AFROH,研究的结果表明了AFROH与FROH在连续时间系统离散化过程中具有同样的作用.AFROH作为FROH在实际设计过程中易实现的版本,也有类似式(39)-(40)的渐近性质,参看文献[35].

第三,在FROH条件下的线性SISO离散零动态的研究也可以推广到线性MIMO离散时间系统.在 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m-k} = 2, \mu_{m-k+1} = \dots = \mu_m = 3$ ($k = 1, \dots, m$)条件下,文献[38]给出了在FROH条件下关于零动态的渐近条件:

$$(z-1)^{n-m-k} \times \{(3+\beta)z^2 + (3+\beta)z - 2\beta\}^k \times \{(2+\beta)z - \beta\}^{m-k} = 0. \quad (42)$$

对于式(42),可通过相应的判据获得在FROH条件下MIMO离散时间系统零动态的稳定条件,并且从稳定条件可以看出:FROH条件下MIMO离散时间系统零动态的稳定条件由参数 β 唯一决定.相似地,在AFROH条件下,也可以建立类似式(42)的MIMO离散时间系统零动态的渐近表达式,并导出相应的稳定条件^[38].

注10 在文献[64]中,Liang等还对 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m-k} = \mu, \mu_{m-k+1} = \dots = \mu_m = \mu + 1$ ($k = 1, \dots, m, \mu \geq 3$)的情形,分析了关于FROH的MIMO离散时间系统零动

态的稳定性, 得出对于充分小的采样周期, 至少有一个零动态会位于单位圆外.

注 11 从前面的分析可以看出: FROH 条件下的零动态比 ZOH 条件下的零动态具有更稳定的性质, 其最主要的原因在于 FROH 可以通过参数 β 来调节零动态的稳定性.

在使用 FROH 代替 ZOH 进行零动态稳定性研究的过程中, 研究者还对另外一类采样保持器 FOH 进行了研究, FOH 还可以看作是 FROH 的特例 ($\beta = 1$). 在 Åström 定理的研究基础之上, Hagiwara 等^[28]最先讨论了在 FOH 下零动态的渐近性质, 对应的 FOH 离散时间传递函数 $H_F(z)$ 有 n 个零动态, 其中 m 个零动态趋向于 1, 其余的 $n - m$ 个零动态趋向于多项式 $C_{n-m}(z)$ 的根. $H_F(z)$ 可表述为

$$K \frac{T^{n-m}}{(n-m+1)!} \frac{(z-1)^m C_{n-m}(z)}{z(z-1)^n}, \quad (43)$$

其中

$$C_{n-m}(z) = B_{n-m+1}(z) + (n-m+1) \times (z-1)B_{n-m}(z). \quad (44)$$

从式(44)可以看出: $B_{n-m}(z)$ 和 $C_{n-m}(z)$ 这两个多项式有密切的联系, Hagiwara 等在文献[28]中详细分析了这两类多项式的联系, 通过数值例子指出当 $n - m > 1$ 时, 从式(44)可以看出在 FOH 条件下, 离散时间系统一定会有不稳定的零动态. 对 $B_{n-m}(z)$ 和 $C_{n-m}(z)$, Hagiwara 等通过数值例子 (p 的取值直到 50) 给出了 3 个猜想:

a) 对任意的相对阶 $p = n - m$, $B_p(z)$ 的所有根都是负实值单根, 并且

$$\eta_1 < \xi_1 < \eta_2 < \xi_2 < \cdots < \eta_{p-1} < \xi_{p-1} < \eta_p < 0, \quad (45)$$

其中: $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p-1}$ 是 $B_{n-m}(z)$ 的根, 而 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p$ 是 $B_{n-m+1}(z)$ 的根.

b) 对任意的相对阶 $p = n - m$, $C_p(z)$ 的所有根都是实值单根, 并且

$$\eta_1 < \zeta_1 < \xi_1 < \eta_2 < \zeta_2 < \xi_2 < \cdots < \eta_{p-1} < \zeta_{p-1} < \xi_{p-1} < \eta_p < 0 < \zeta_p < 1, \quad (46)$$

其中 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_p$ 是 $C_{n-m}(z)$ 的根.

c) 当 $p \rightarrow 0$ 时, $C_p(z)$ 的最大根趋近于 $z = \frac{1}{e}$, 此时 e 是自然对数的基底.

Hagiwara 等在文献[28]中指出, 从猜想 b) 可看出 $C_{n-m}(z)$ 的根(除了最大根)比 $B_{n-m}(z)$ 的根更远离原点, 因此在 ZOH 条件下的离散零动态比在 FOH 下的离散零动态具有更好的稳定性质. 另外, 对合适的 ζ_i ($i = 1, \cdots, p$), a) 蕴含 b). Weller 等^[50]对猜想 a) 和 c) 给予了理论证明.

注 12 在 FOH 条件下也可以用 Hagiwara 定理来描述真性零动态和相应连续时间系统零动态的关系, 参看文献[28].

通过 Hagiwara 等^[28]的研究表明: 在零动态的稳定方面, FOH 不能提供比 ZOH 更好的性能. 由于 FOH 在零动态稳定性方面的贫乏性能, 导致 FOH 并不是研究者关注的重点和热点.

3.3.3 GSHF 条件下的离散零动态(Discretization zero dynamics with GSHF)

尽管与 ZOH 相比, FROH 在零动态的稳定性方面有更多的优越性, 然而对于实际工程应用中普遍存在的相对阶数大于 2 的系统在快速采样情形下, 不稳定离散化零动态问题仍不可避免^[65]. 为此, 人们又进一步提出了基于多率采样的信号重建装置—GSHF. Kabamba^[30]率先提出用 GSHF, 通过选择合适的参数, GSHF 可达到任意配置采样系统零动态的目的, 可以完全避免不稳定离散化零动态问题. 但由于 GSHF 通常是由一些指数和正弦函数组成, 实际中很难选取合适的设计参数, Chan^[32]提出用 PC GSHF 来研究离散时间系统的零动态问题, 这也克服了 GSHF 在选择设计参数等问题的实际困难, 同时 Chan 还指出当控制输入划分的次数 N 大于或等于系统的阶数 n 时可保证相应的离散时间系统零动态稳定. Liang 等^[33]从实际的观点出发, 进一步指出 N 只要大于或等于系统的相对阶数 p 就能保证零动态稳定, 实现了在一个采样周期内减少控制输入的个数 N 来保证零动态的稳定性, 这更加有利于数字控制器的设计, 并降低了数字控制器的设计难度.

此外, Liang 等还导出了在 PC GSHF 下零动态的渐近性质. 当采样周期 $T \rightarrow 0$ 时, 对应的 GSHF 离散时间传递函数 $H_G(z)$ 有 $n - 1$ 个零动态, 其中 m 个零动态以 $e^{z_i T}$ 趋向于 1, 其余的 $n - m - 1$ 个零动态趋向于多项式 $E_{n-m}(z)$ 的根. $H_G(z)$ 可表述为

$$K \frac{T^{n-m}}{(n-m)!} \frac{(z-1)^m E_{n-m}(z, \alpha)}{(z-1)^n}, \quad (47)$$

其中:

$$E_p(z, \alpha) = e_p z^{p-1} + e_{p-1} z^{p-2} + \cdots + e_1, \quad (48)$$

$p = n - m$ 为相对阶数.

系数 e_p 为参数 α_N 的线性组合, 即 $e_p = W_{PN} \alpha_N$. 其中: W_{PN} 是 $p \times N$ 的关系矩阵, 它是由 $\Lambda_{1j} = 1 - (j-1)/N$ 和 $\Lambda_{2j} = 1 - j/N$ 组成. 当 $N \geq p$ 时, W_{PN} 的维数为 p , 而当 $N < p$ 时, W_{PN} 的维数小于 p . 由于证明的复杂性, 文献[33, 64]仅对 $p \leq 6$ 的情形给予了理论证明, 同时指出当 $p > 6$ 时, 可用相似的方法处理.

Yuz 等^[66]也得到了在 PC GSHF 下的渐近表达式, Liang 等的研究成果与 Yuz 等的结果之间有类似的关系.

系, 可以进行进一步的探讨. 另一方面, Yuz等还通过数值例子对在PC GSHF条件下离散时间系统零动态的稳定性和鲁棒性等问题进行了分析.

在ZOH和FROH条件下, 当MIMO系统的任意一个无限初等因子 $\mu_i \geq 3 (i = 1, \dots, m)$ 时, 相应的MIMO离散时间系统的零动态至少有一个会位于单位圆外^[58-60, 67]. 因此在SISO系统中即使相对阶大于2仍可有效避免不稳定采样零动态的PC GSHF就引起了学者们的高度关注. 在 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m-k} = 2, \mu_{m-k+1} = \dots = \mu_m = 3 (k = 1, \dots, m)$ 的条件下, Liang等^[40]得到了在PC GSHF条件下关于零动态的渐近条件:

$$(z - 1)^{n-m-k} \times \{c_N^2(\alpha)z - c_N^2(\alpha) + 2c_N^1(\alpha)\}^k = 0, \quad (49)$$

其中

$$c_N^k(\alpha) = \sum_{j=1}^N \left\{ \left(\frac{j}{N} \right)^k - \left(\frac{j-1}{N} \right)^k \right\} \alpha_j. \quad (50)$$

对于式(49), 可通过讨论 N 的取值, 相应地获得PC GSHF条件下MIMO离散时间系统零动态的稳定条件^[40]. 从稳定条件可知PC GSHF条件下的MIMO离散零动态稳定性由参数 α_j 决定.

注 13 对于无限初等因子为

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m-k} = \mu, \\ \mu_{m-k+1} = \dots = \mu_m = \mu + 1 (k = 1, \dots, m, \mu \geq 3) \end{aligned}$$

的情形, 在PC GSHF条件下MIMO离散时间系统零动态的稳定性的研究是一个值得进一步研究的工作.

注 14 在零动态渐近性质和稳定性的研究中, 研究者都遵循从ZOH到FOH, 再到FROH, 最后到PC GSHF的方法, 这种思路在零动态研究过程中是一种重要的研究思路.

3.4 时间延迟系统的离散零动态(Zero dynamics of discrete-time systems with time delay)

实际上的系统往往都含有时间延迟的情况, Åström等在文献[14]就对包含时间延迟的系统作了开创性研究, 提出了时间延迟系统的表达形式

$$G(s, \tau) = G(s)e^{-\tau s}, \quad (51)$$

其中 τ 为时间延迟. Åström等还通过数值例子分析了在时间延迟情况下的离散时间系统零动态的分布情形. Hara等在文献[27]中得到在ZOH下时间延迟离散时间系统零动态的渐近特性. Ishitobi等^[68]进一步推广了在ZOH条件下时间延迟离散时间系统零动态的性质. Liang等^[69]对在FROH和AFROH条件下时间延迟离散时间系统零动态的渐近特性进行了研究, 并给出了相应的稳定条件. 此外, 在PC GSHF条件下, 文献[70]对时间延迟情况进行了初步探讨, 得到了相关研究成果.

3.5 零动态的稳定性(Stability of zero dynamics)

不稳定零动态的存在限制了控制系统可能达到的控制性能, 比如: 敏感度、鲁棒性以及反馈控制系统中的跟踪特性等; 同时也很难构建一些控制系统, 如逆系统、鲁棒控制器、模型匹配系统和模型参考自适应控制器等^[71-72]. 此外在前馈补偿控制中, 要求被控系统具有一个与自身相逆的系统作为补偿控制器, 即要求对象必须具有稳定的零动态. 在控制技术层面, 许多控制系统的设计与分析途径很多都基于零极点对消技术, 然而当系统中存在不稳定零动态时, 零极点对消技术将无法直接应用, 自适应控制中的很多算法均属于这种情形, 因此不稳定零动态系统的控制问题是控制系统设计与分析中的一个主要挑战.

如果一个连续时间系统零动态位于左半平面, 那么就是稳定的, 反之不稳定. 而一个离散时间系统零动态位于单位圆内, 那么它也是稳定的, 反之不稳定^[14, 39, 71].

当一个连续时间系统经采样开关和保持器离散化后, 由于连续时间系统极点 p_s 和离散时间系统极点 p_z 之间存在一个简单的对应关系, 即 $p_s \rightarrow e^{p_s T}$, T 为采样周期. 因此稳定极点 p_s 总是被映射到单位圆内, 保证了系统的稳定性; 然而对于零动态, 连续时间系统零动态与其对应的离散时间系统零动态之间却不存在这样简单的对应关系, 即稳定的零动态并不总是被映射到单位圆内, 零动态的稳定性不一定能得到保存. 比如, 对于一个相对阶数大于2的连续时间线性系统, 即使其零动态是稳定的, 在快速采样和ZOH条件下, 相应离散时间系统仍将呈现非最小相位特性^[14].

因此, 人们期望像极点一样有明确的公式来描述连续时间零动态和离散时间零动态之间的映射关系, 或者至少是一种近似的描述. 由于离散时间系统零动态是采样周期 T 的函数, 推导出这种描述关系是相当困难的, 只有在某些特殊情况下, 如 $T \rightarrow 0$ 或 $T \rightarrow \infty$, 才有可能对零动态特性作出近似描述. 从控制工程的观点出发, 足够小的 T 是人们所期望和关心的, 因此在 $T \rightarrow 0$ 的极限条件下, 有关离散时间系统零动态特性的问题吸引了学者们广泛的关注. Åström定理实质上是给出了 $T \rightarrow 0$ 极限条件下零动态的一般表达式. 在此基础上, Fu等^[26]对离散零动态稳定的条件进行了研究, 得出保证系统全部零动态稳定的充分条件. Ishitobi^[25]则进一步给出了保证离散时间系统零动态稳定的充分必要条件. 需要强调的是, 零动态的渐近性质虽然分析了两类零动态(真性零动态和采样零动态)的基本性质, 但相对阶数(极点盈数)与这两类零动态, 尤其是采样零动态稳定性的联系却不清楚. 比如在文献[14]中, Åström等得到了零动态的渐近性质, 但却没有分析零动态的稳定性. Hagiwara等在文献[28]中给出了在ZOH和FOH下零动态的稳定条件: 当

$p = 1$ 时, 只要 $G(s)$ 的所有零动态稳定, 则 $H_Z(z)$ 和 $H_F(z)$ 的所有零动态稳定; 当 $p = 2$ 时, 只有 $G(s)$ 的所有零动态稳定并且满足式(27), 则 $H_Z(z)$ 的所有零动态稳定, 而对于 $H_F(z)$, 只要 $p \geq 2$, 则总存在不稳定的零动态; 当 $p \geq 3$ 时, 则 $H_Z(z)$ 总存在不稳定的零动态. 此外, 文献[37]还给出了当连续时间系统的相对阶数直到5以内, FROH条件下相应离散时间系统零动态的稳定条件: 当 $p = 1$ 时, 只要 $G(s)$ 的所有零动态稳定且

$$-1 \leq \beta, \quad (52)$$

则 $H_{FR}(z)$ 的所有零动态稳定; 当 $p = 2$ 时, 如果 $G(s)$ 的所有零动态稳定并且

$$-1 < \beta \leq 0, \quad (53)$$

则 $H_{FR}(z)$ 的所有零动态稳定; 当 $p = 3, 4, 5$ 时, 则 $H_{FR}(z)$ 至少存在一个不稳定的零动态.

注 15 Ishitobi在文献[37]中指出: 虽然数值例子可以揭示在 $p \geq 6$ 时, $H_{FR}(z)$ 也至少存在一个不稳定的零动态, 但由于为高次方程, 且含有参数 β , 很难给予理论证明. 此外, AFROH作为FROH在实际中易实现的版本, Ishitobi等^[35]也给出了在AFROH条件下零动态的稳定条件.

对于在PC GSHF采样条件下的离散时间系统零动态, Liang等^[33, 64]给出了在PC GSHF条件下, 当 $p = 2$, $N = 2$ 和 $p = 3$, $N = 3$ 时这两种情形零动态的稳定条件. 在PC GSHF条件下, 由于可通过选择式(48)中的设计参数来任意配置离散时间系统零动态, 因此在保持零动态的稳定性方面PC GSHF比ZOH和FROH具有更好的优越性, 现已被广泛地用于控制系统设计的研究中^[73-75]. 另一方面, 当 p 和 N 的取值为其他情形时, 也可以类似地得到其相应的稳定条件, 但计算过程则相对比较复杂^[76].

注 16 对时间延迟系统, FROH和PC GSHF同样能在ZOH不能使零动态稳定的某些条件下保证零动态的稳定性^[69-70].

而对于MIMO系统, Hayakawa定理虽然给出了多变量系统零动态的渐近性质, 但却没有涉及采样零动态的稳定性问题. 针对Hayakawa定理在分析采样零动态稳定特性上的缺陷, Ishitobi在文献[58]中给出了MIMO系统在ZOH条件下离散零动态的稳定条件. 对于无限初等因子次数为 $\mu_1 = \dots = \mu_{m-1} = 2$ 和 $\mu_m = 3$ 的 S_C , 如果 S_C 的 $n - m - 1$ 个零动态稳定, 且

$$(l_{12}^T C A^2 B r_{12})(l_{12}^T C A B r_{12}) < 0, \quad (54)$$

其中: l_{12} 和 r_{12} 分别是 $m \times m$ 维非奇异矩阵 $L_1 = [L_{11} \quad l_{12}]$ 和 $R_1 = [R_{11} \quad r_{12}]$ 的最后一列列向量, L_1 和 R_1 满足关系

$$L_1^T C B R_1 = \begin{pmatrix} I_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

则对足够小的 T , S_{DMZ} 的零动态是稳定的.

对于在FROH和GSHF条件下的线性MIMO离散时间系统, 也有其相应的离散零动态稳定条件. 通过式(42)和式(49)可以分别得到在FROH和GSHF条件下的线性MIMO离散时间系统零动态的稳定条件. 在FROH条件下, 零动态的稳定条件主要由参数 β 来决定; 而在GSHF条件下, 零动态的稳定条件则由参数 $\alpha_j (j = 1, \dots, m)$ 来决定. 从前面的讨论可以看出: MIMO离散时间系统零动态的稳定条件一般是通过对其渐近性质的分析来讨论得到的. 且FROH和GSHF条件下的零动态稳定条件都和其相应的参数有关.

3.6 线性离散零动态在控制系统中的应用 (Linear discretization zero dynamics in the application of the control systems)

最后需要注意的是, 由于零动态在数字控制系统设计与分析中的重要地位, 因此有关零动态的研究成果有着广泛的应用价值. 研究者通过对线性SISO系统和MIMO系统的详细研究, 推广了相应的结果, 同时对线性离散零动态的研究促进了许多控制问题的解决^[46].

在ZOH条件下, Ishitobi等成功地用于一类大型宇宙空间构造物线性模型姿态控制问题的分析^[67], 这类问题现已成为学者们研究的热点之一^[77-78]. 由于在零动态的稳定性方面, FROH有着比ZOH更好的性能, 通过对参数 β 的选择, 可以将零动态应用于火箭姿态控制方面, 这方面的应用也表明在采用ZOH时会产生不稳定零动态, 而使用FROH可以使零动态全部稳定^[37]. 同时, 西班牙控制论学者De la sen等通过对FROH条件下离散时间系统的详细研究, 提出了新的零动态稳定条件, 改进了文献[37]的结果, 并通过实验指出: 对于FROH, 总存在负的 β 值, 使其能获得比ZOH和FOH更稳定的零动态^[63]. 在文献[63]工作的基础上, Bàrcena等进一步讨论了使用FROH对二阶硬盘读写头控制模型进行信号重建, 通过基于零极点配置的数字控制方法验证了FROH能够达到理想的控制目标^[79]. 同时Rubio等在铣削刀具模型上也尝试使用FROH, 通过选择采用FROH中合适的参数可以增强闭环铣削刀具模型的稳定性, 提高自适应控制效能^[80-84]. 对于GSHF, 现也被广泛地用于控制系统设计的研究中^[85-86], 比如消除纹波和配置自适应算法等.

采样控制理论的另一个核心问题是采样控制器的设计, 关于线性采样数据控制系统已经展开了大量研究^[87], 而非线性采样控制系统往往也采用线性化原理来处理. 由于线性系统可以得到它的显式精确离散时间模型, 且线性系统的精确离散时间模型也是线性的, 因此线性采样系统控制器设计可能具备良好的控制

性能. 另一方面, 非最小相位系统中存在右半平面零动态, 使系统的阶跃响应出现负调, 这就对工业控制造成很大影响. 而在离散后的控制系统中, 不稳定的零动态存在较为普遍, 这使得系统往往呈现非最小相位特性, 因此通过避免不稳定零动态来进行采样控制器设计就显得非常重要.

4 非线性离散时间系统的零动态(Zero dynamics of nonlinear discrete-time systems)

由于一切控制系统都是一定程度上的非线性系统, 线性系统只是为了数学处理上的简化而导出的一种理想化的模型, 因此物理系统在本质上都是非线性的. 对于非线性系统, 人们期望非线性系统也能保持与线性系统相类似的结果^[88]. 因此将线性系统离散时间零动态研究的注意力转移到非线性系统离散零动态问题的研究就是一个自然和必然的要求.

4.1 非线性离散零动态的定义(Definition of nonlinear discretization zero dynamics)

在SISO线性系统中, 相对阶 p 为传递函数中的极点数和零动态数之差. 特别地, 相对阶 p 严格小于系统阶数 n 的线性系统在它的传递函数中有零动态. 相反地, 如果 $p = n$, 传递函数就没有零动态. 因此对 p 严格小于 n 的一个非线性系统, 尽管没有传递函数和极点的定义, 但可观性仍是一个有明确定义的概念, 因此对于输入-输出线性化反馈导致的不可观动态使得线性系统中零动态的概念可推广到非线性系统中^[54-55].

因非线性的复杂性和独特性, 一般用标准形来探讨非线性系统问题. 考虑一类 n 阶SISO仿射非线性系统($p \leq n$):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x), \end{cases} \quad (56)$$

如果满足:

- i) $L_g L_f^k h(x) = 0, k < p - 1;$
- ii) $L_g L_f^{p-1} h(x) \neq 0,$

则称 p 为系统(56)的相对阶^[54-55], 其中 L_g 和 L_f 为李导数. 对于式(56), 通过局部坐标变换化为标准形^[54-55]:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p-1} & \mathbf{I}_{p-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{p-1}^T \end{pmatrix} \zeta + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p-1} \\ 1 \end{pmatrix} (b(\zeta, \eta) + a(\zeta, \eta)u), \\ \dot{\eta} = c(\zeta, \eta), \\ y = z_1, \end{cases} \quad (57)$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} z_{p+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad (58)$$

$$z = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_{p+1}(\zeta, \eta) \\ \vdots \\ c_n(\zeta, \eta) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

其中 p 为相对阶.

标准形这种形式可以把系统分解为外部 ζ 和内部 η 两部分, 通过状态反馈控制使外部 ζ 线性化, 而该控制使内部 η 为不可观测的. 内部动态特性由 $\dot{\eta} = c(\zeta, \eta)$ 描述, 由输出恒等于0可知 $\zeta \equiv 0$. 因此可以将线性系统零动态的概念推广到非线性系统. 当输入和初始条件已经选择为约束输出恒为零时, 此时对应的描述系统内部行为的动态特性称之为系统的零动态, 并且系统的零动态方程^[54-55]为

$$\dot{\eta} = c(0, \eta). \quad (60)$$

此外, 非线性系统的零动态由相对阶来刻画其特征.

注 17 对MIMO非线性系统, 也有类似标准形、相对阶和零动态的概念^[54-55].

考虑一类 n 阶 m 输入 m 输出仿射MIMO非线性系统($p_i \leq n$):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \\ y_1 = h_1(x), \\ \vdots \\ y_m = h_m(x), \end{cases} \quad (61)$$

如果满足:

- i) $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$, 对所有 $1 \leq j \leq m, k < p_i - 1, 1 \leq i \leq m;$
- ii) $m \times m$ 阶矩阵

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{p_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{p_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{p_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{p_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{p_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{p_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \quad (62)$$

非奇异, 则称 p_1, \dots, p_m 为系统(61)的相对阶^[54-55].

对于系统(61), 可通过局部坐标变换化为标准形^[54-55]:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{p_i-1} \\ 0 & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \xi^i + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \times (b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta)u_j), \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta), \\ y_i = \xi_1^i, i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (63)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix}, \xi^i = \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \vdots \\ \xi_{p_i}^i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, m, \quad (64)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{p+1} \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} q_{p+1}(\xi, \eta) \\ \vdots \\ q_n(\xi, \eta) \end{pmatrix}. \quad (65)$$

相似地, 该系统的零动态方程为

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)). \quad (66)$$

当 $y(t) = 0$ 时, 式(66)的动态特性对应于描述系统“内部”行为的动态特性.

注 18 在线性系统中, 也可用标准形来表示系统. 此时也可定义线性系统的零动态方程: $\dot{\eta} = A_0\eta$, 其中 A_0 的特征值是传递函数的零动态. 因此可通过标准形来探讨线性系统的零动态问题^[53, 61].

注 19 因为非线性的内部特性为一个动态系统, 因此用零动态来表示其内部行为可更形象表示其动态性. 而在线性系统中, 零动态是线性动态, 其特征值与该系统的传递函数的零动态相一致^[15, 54-55].

其次, 类似于线性离散时间系统, 非线性离散时间系统也可以通过信号重建装置来采样得到. 但非线性系统存在的一个本质性困难是无法像线性系统那样获得精确离散时间模型, 仅可能获得近似采样模型. 文献[88]对非线性SISO离散时间系统定义了相对阶和标准形, 对于一类非线性SISO离散时间系统

$$\begin{cases} \delta x_k = F(x_k) + G(x_k)u_k, \\ y_k = H(x_k). \end{cases} \quad (67)$$

如果满足:

- i) $\frac{\partial y_{k+l}}{\partial u_k}|_{(x_k, u_k)} = 0, l = 0, \dots, p-1;$
- ii) $\frac{\partial y_{k+p}}{\partial u_k}|_{(x_k, u_k)} \neq 0,$

则称 p 为系统(67)的相对阶^[89].

类似式(57), 也有非线性SISO离散时间系统的标准形为^[89]

$$\begin{cases} \partial \zeta_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{pmatrix} \zeta_k + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \\ (B(z_k) + A(z_k)u_k), \\ \delta \eta_k = C(z_k), \end{cases} \quad (68)$$

$$\begin{cases} z_k = \begin{pmatrix} \zeta_k \\ \eta_k \end{pmatrix}, \\ \zeta = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \dots \ z_{p,k}]^T, \\ \eta_k = [z_{p+1,k} \ z_{p+2,k} \ \dots \ z_{n,k}]^T, \end{cases} \quad (69)$$

其中 p 为相对阶.

在式(68)中, 同样可定义离散时间系统的零动态

方程^[89]为

$$\delta \eta_k = C(0, \eta_k). \quad (70)$$

注 20 由于非线性的独特性和精度不确定性, 以及MIMO系统存在子系统、输入和输出间的耦合等复杂性, 非线性MIMO离散时间系统的研究目前仅限于一类特定的解耦多变量系统, 还缺乏对其系统和全面的刻画与研究.

4.2 采样保持器和非线性离散零动态(Sample-and-hold and nonlinear discretization zero dynamics)

同线性离散时间系统零动态的分析类似, 非线性离散时间系统零动态也是本文关注的重点. 相似地, 零动态也可分为真性零动态和采样零动态, 即真性零动态与连续时间系统零动态相对应, 而采样零动态则是在采样过程中新衍生出来的^[15, 90].

对于非线性离散时间系统, 人们期望非线性系统的零动态能保持与线性系统的零动态有类似的结论. 然而, 非线性离散时间系统理论的发展远不如非线性连续时间系统成熟^[91], 同时缺乏具有较高精确度的非线性采样系统模型被认为是非线性控制设计的主要问题之一^[92]. 另一方面, 在式(68)中, 由于近似离散时间模型精度不高, 因此无法导出其相应的离散零动态. 因此, 高精度的非线性离散时间系统模型是学者们研究零动态重要的基础工作. Yuz和Goodwin^[15]提出了一种比Euler近似模型(68)更精确的近似模型(accurate approximate model, 此处简称YG模型):

$$\begin{cases} \delta \zeta^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{\delta}{2} & \dots & \frac{\delta^{p-2}}{(p-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{\delta^{p-3}}{(p-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \zeta^s + \begin{pmatrix} \frac{\delta^{p-1}}{p!} \\ \frac{\delta^{p-2}}{(p-1)!} \\ \vdots \\ \frac{\delta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \times \\ (b + au), \\ \delta \eta^s = c(\zeta^s, \eta^s). \end{cases} \quad (71)$$

该模型的相对阶为1, 同时Yuz和Goodwin也证明了该模型包括新增加的采样零动态, 并且这新增加的采样零动态与线性系统的采样零动态有类似特性.

Ishitobi等^[93-94]进一步指出对于某些相对阶为2的非线性系统, 基于YG模型所设计的离散时间模型跟踪控制器却无法使原始的时间连续受控系统稳定. 其原因是相对阶为2时, YG模型的采样零动态位于单位圆上, 而比YG模型更精确的近似采样数据模型的采样零动态是不稳定的. 因此研究零动态稳定性及近似采样数据模型对非线性离散时间系统的研究有极其重要的作用.

此外,对于非线性离散时间系统零动态的发展,文献[88,95]对离散零动态进行了初步的刻画和研究,文献[15]给出了离散零动态的精确特征,Ishitobi等将其关于非线性SISO系统离散零动态的相关结论推广至ZOH^[93-94,96]和FROH^[97-98]的情形,并分析了相对阶为 p 的零动态渐近性质和相对阶为2时的稳定特性以及保证零动态稳定的条件.此外,Nishi等^[90]将非线性SISO系统的相关结果推广到多变量非线性解耦系统,给出了相对阶为 p 时的渐近条件和相应的稳定条件.在文献[90,93-94,96-98]的研究中,Ishitobi等同样采用的是从特殊到一般,从ZOH到FROH,从SISO到MIMO的研究方法.在文献[93-94]中,对于零动态的研究只考虑到三阶泰勒展开,文献[96]则推广到 n 阶泰勒展开;此外,文献[97-98]将ZOH推广到FROH的情形;而文献[90]则将研究对象从SISO推广到MIMO.同时从Ishitobi和Nishi的研究结果显示ZOH和FROH条件下的非线性离散时间系统零动态可以分别由线性离散时间系统的特征多项式(30)和(40)来决定,从而是否将线性离散零动态的其他若干结论扩展至非线性离散零动态,这就成为下一步研究的目标.

4.3 非线性离散零动态和采样控制器 (Nonlinear discretization zero dynamics and sampled-data controller)

采样控制器的分析与设计是采样控制系统的核心问题之一,也是近年来被广泛关注的热点课题之一.而采样控制器的分析与设计和近似采样数据模型的精确性密切相关.另一方面,需要引起高度关注的是,采样零动态稳定性在近似采样数据模型的精确性方面扮演着重要角色.对于非线性系统,采样控制器设计方法可分为连续时间设计(continuous-time design, CTD)、离散时间设计(discrete-time design, DTD)和采样数据设计(sampled data design, SDD)^[99-101].其中,DTD方法在复杂程度上与CTD方法大致相当,小于SDD方法设计,而在性能上又优于CTD方法,成为数字控制器设计的主要方法^[100].但非线性系统的DTD方法存在的一个本质性困难是无法像线性系统那样获得精确离散时间模型,仅可能获得近似采样数据模型^[101].因此在实际中大部分情况是采用基于近似采样数据模型的DTD(近似DTD)方法^[102-103].而近似DTD方法中最主要的问题是设计出的数字控制器能否使原始连续时间受控系统稳定,该问题很大程度上取决于近似采样数据模型的精确性^[102-103].因此围绕这一问题,一些学者从基于近似离散时间模型设计采样控制器的一般框架以及近似离散时间设计稳定性的相容性条件等方面探索近似DTD设计的稳定性问题^[100-103];另一方面,采样零动态的稳定性在近似采样数据模型的精确性方面则扮演着重要的角

色^[93-94,96].从而采用近似DTD方法设计的数字控制器能否镇定原始的连续时间受控系统,取决于其精确度高的近似采样数据模型的采样零动态稳定性.通过上面的分析可以得知采样零动态稳定性与近似DTD方法设计有密切的联系,因此从近似采样数据模型的零动态稳定特性来研究近似DTD设计的稳定性问题可能是一种新的思路和方法.

4.4 非线性离散时间系统零动态的挑战和困难 (Challenges and difficulties of zero dynamics of nonlinear discrete-time systems)

由于零动态在非线性离散时间系统中的重要性,因此对零动态的研究是广大学者关注的重点之一.但由于非线性系统的复杂性和独特性,导致非线性离散时间系统零动态的研究显得更为困难.首先,由于MIMO系统的复杂性,导致关于非线性MIMO离散时间系统模型很难导出,目前仅限于一类特定的关于ZOH条件的解耦多变量系统,还缺乏对ZOH耦合系统、FROH和GSHF条件多变量离散时间系统模型的刻画和研究.其次,由于离散化带来的精度不确定性,使得离散时间系统模型的精度不高,从而导致差的系统性能,比如零动态的缺乏.此外,对于提高精度的离散时间系统模型,由于暂时缺乏有效的方法和技术,目前还很难导出其相应的离散零动态.最后,通过零动态来探索近似DTD设计的稳定性是一个有效的思路和方法,不过还缺乏其具体的理论基础.因此,提高采样数据模型的精度,增强非线性系统零动态的稳定性,探寻零动态稳定性与近似DTD设计稳定性的联系等就成为了研究者感兴趣的问题.

5 结论与展望(Conclusions and prospects)

本文论述了线性离散时间系统零动态和非线性离散时间系统零动态的含义和意义,并主要归纳了在不同的采样保持器下线性离散时间系统模型和非线性离散时间系统模型.另外,本文还从线性离散时间系统和非线性离散时间系统两个方面较为全面地综述了零动态的发展现状,并对零动态渐近性质和保持零动态稳定的重要研究成果进行了总结.从这些结论中可以看出:在研究过程中,研究者始终遵循的是从特殊到一般的研究方法;研究对象从SISO线性系统到MIMO线性系统、再到非线性系统;研究过程从特殊的低阶情形到一般的高阶情形;而采样保持器的选择则从ZOH到FROH、再到PC GSHF.

虽然目前关于零动态的研究已经取得了一些突破和成果,但是总体上该领域仍然处于发展阶段,还有许多工作需要进一步探索和认识,总结以下几个可进一步发展的研究方向:

1) 通过对线性离散时间系统零动态的研究,研究者得到了在ZOH, FOH, FROH, AFROH和PC GSHF

等采样条件下若干具有重大意义的成果, 推动了线性离散时间系统零动态的发展. 研究表明: PC GSHF等多率保持器在零动态稳定性上具有比ZOH和FROH更好的性质, 原因是在PC GSHF等多率保持器下, 可以通过参数选择来调整零动态稳定条件, 使得零动态保持稳定. 对于非线性系统, 在ZOH和FROH条件下已经有初步刻画, 而在PC GSHF等多率保持器下则依旧是一个未解决的科学问题. 前期富有成效的科学研究为进一步开展在多率采样保持器下关于非线性系统零动态稳定性的研究奠定了基础, 这类工作将成为一个新的研究课题.

2) 采样控制器的设计是离散控制理论的核心问题之一. 对线性离散时间系统, 已经有相关的研究成果; 而对非线性系统, 由于非线性特性, 大多采用近似DTD方法. 而近似DTD方法中最主要的问题是设计出的数字控制器能否镇定原始的连续时间受控系统, 这在很大程度上取决于近似采样数据模型的采样零动态稳定性, 因此从基于采样零动态稳定性的角度来研究近似DTD设计的稳定性是一个新的思路和方法. 目前关于这方面的研究已经成为离散控制理论界的热点之一.

3) 构造多项式分块矩阵是传统的线性系统零动态的研究方法, 这类方法需要构造多个多项式分块矩阵^[38-39, 58-59]. 然而当连续时间系统相对阶数过高时, 则无法构造多项式分块矩阵. 因此, Ishitobi等^[53, 61]通过用标准形来构造线性系统, 再使用泰勒展式和Z变换等工具讨论SISO系统和MIMO系统零动态的稳定条件. 采用标准形这种方法可以克服相对阶过高时无法构造多项式分块矩阵的限制, 因此对于相对阶数高的SISO系统和MIMO系统, 标准形法就成为研究离散时间系统零动态的一种强有力的处理方法. 现在标准形法也是研究非线性离散时间系统零动态的一个主要方法^[93-94, 96-98].

4) 自著名的瑞典学者Åström等^[14]做了关于离散时间系统零动态的奠基性研究工作以来, 有关离散时间系统零动态的稳定性问题吸引研究者们进行了广泛而持久的研究. 在零动态的研究中, 有关极限分析法^[14, 33, 37]、泰勒展式^[20, 53]以及多项式矩阵理论^[38-39, 58-59]等传统的数学方法是研究者们广泛使用的工具. 而用根轨迹法等传统图解分析方法来分析零动态问题是另一种研究思路^[23, 63, 104-105], 并且该方法可以弥补采用数学方法的不足. 采用数学方法分析零动态是一种定量分析, 但由于离散零动态的复杂性, 因此只能对特定的极限情况加以分析, 而使用图解分析方法分析零动态问题是一种定性分析, 可弥补使用数学方法的不足. 通过图解分析方法来分析零动态的性质可以丰富零动态知识体系, 以便更好地用于各种实践中.

5) 目前研究的系统都是针对确定系统的, 而随机系统也引起了研究者的广泛关注. 对于随机线性系统和通过采样后产生的随机采样零动态^[106-107], 以及随机非线性系统和采样零动态^[108-109]的相关研究已有初步探索. 由于随机系统具有非常强的不确定性和随机性, 因此对于它的研究也变得异常复杂, 关于随机系统零动态及零动态的研究工作正处于起步阶段.

6) 当前对于离散零动态问题的研究还存在一些未解决的问题, 阻碍了离散零动态的进一步推广, 因此, 关于离散零动态的性质分析也是研究者们关注的重点之一. 另外, 离散零动态的灵敏度和鲁棒性的分析^[110-112]、相对误差、局部截断误差以及频域的分析^[113-114]、以及样条插值在离散化中的分析与计算^[115-117]等问题是现在广泛关注的热点, 对它们的研究有助于更好地深刻理解离散零动态在控制系统中的重要作用, 进一步推动离散零动态的发展.

致谢(Acknowledgment)

作者们非常感谢M. Ishitobi教授的指导与帮助.

参考文献(References):

- [1] ISIDORI A. The zero dynamics of a nonlinear system: from the origin to the latest progresses of a long successful story [J]. *European Journal of Control*, 2013, 19(5): 369 – 378.
- [2] GOODWIN G C. Digital control: past, present and future [M] // *The Evolution of Control Science*. Genova: Consiglio Nazionale Delle Ricerche, 2008.
- [3] GOODWIN G C, YUZ J I, AGUERO J C, et al. Sampling and sampled-data models [C] // *American Control Conference*. Baltimore, USA: IEEE, 2010: 1 – 20.
- [4] 蔡秀珊, 汪晓东, 吕干云. 具有零动态仿射非线性系统控制Lyapunov函数的构造 [J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(3): 392 – 395. (CAI Xiushan, WANG Xiaodong, LÜ Ganyun. Constructive control Lyapunov functions for affine nonlinear systems with zero dynamics [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 392 – 395.)
- [5] 常霞, 刘允刚. 一类具有零动态不确定非线性系统的停息时间可调的有限时间镇定 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(4): 358 – 364. (CHANG Xia, LIU Yungang. The finite-time stabilization for a class of zero-dynamics uncertain nonlinear systems with adjustable-settling-time [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(4): 358 – 364.)
- [6] BYRNES C I, GILLIAM D S, HU C, et al. Zero dynamics boundary control for regulation of the Kuramoto-Sivashinsky equation [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 52(5): 875 – 891.
- [7] 郭鹏, 胡慧, 刘国荣, 等. 具有零动态的SISO仿射非线性系统的神经网络自适应跟踪控制 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(8): 1113 – 1117. (GUO Peng, HU Hui, LIU Guorong, et al. Adaptive neural-network tracking control for SISO affine nonlinear systems with zero-dynamics [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(8): 1113 – 1117.)
- [8] YANG C D. Nonlinear zero dynamics of orbital motion [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 37(4): 1158 – 1171.
- [9] HELMKE U. Global convergence of nonlinear cascade flows with Morse-Bott zero dynamics [J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(6): 389 – 394.

- [10] DACIC D B, NEŠIĆ D, KOKOTOVIC P V. Path-following for nonlinear systems with unstable zero dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(3): 481 – 487.
- [11] 孙宗耀, 孙伟, 刘振国. 有未知控制系数和零动态的高阶非线性系统的自适应控制设计 [J]. *自动化学报*, 2012, 38(6): 1025 – 1032. (SUN Zongyao, SUN Wei, LIU Zhenguo. Adaptive control design of high-order nonlinear systems with unknown control coefficients and zero dynamics [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(6): 1025 – 1032.)
- [12] KHODABAKHSHIAN A, MORSHED J M, PARASTEGARI M. Coordinated design of STATCOM and excitation system controllers for multi-machine power systems using zero dynamics method [J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2013, 49(6): 269 – 279.
- [13] BOULKROUNE A, TADJINE M, MSAAD M, et al. Adaptive fuzzy controller for non-affine systems with zero dynamics [J]. *International Journal of Systems Science*, 2009, 40(4): 367 – 382.
- [14] ÅSTRÖM K J, HAGANDER P, STERNBY J. Zeros of sampled systems [J]. *Automatica*, 1984, 20(1): 31 – 38.
- [15] YUZ J I, GOODWIN G C. On sampled-data models for nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(10): 1477 – 1489.
- [16] GOODWIN G C. A brief overview of nonlinear control [C] // *The 3rd International Conference on Control Theory and Application*. Pretoria, South Africa: IEEE, 2001.
- [17] GOODWIN G C, GRAEBE S F, SALGADA M E. *Control System Design* [M]. London: Prentice-Hall, 2001.
- [18] ISHITOBI M. Conditions for stable zeros of sampled systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(10): 1558 – 1561.
- [19] HAGANDER P. Comments on “Conditions for stable zeros of sampled systems” [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(5): 380 – 381.
- [20] HAGIWARA Y. Analytic study on the intrinsic zeros of sampled-data systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(2): 261 – 263.
- [21] BLACHUTA M J. On zeros of pulse transfer function [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(6): 1229 – 1234.
- [22] SOGO T, ADACHI N. A limiting property of the inverse of sampled-data systems on a finite-time interval [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(5): 761 – 765.
- [23] DE LA SEN M, BÁRCENA R, GARRIDO A J. On intrinsic limiting zeros as the sampling period tends to zero [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2001, 48(7): 898 – 900.
- [24] BAI E W, DING Z. Limiting zero distribution of sampled systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(5): 843 – 851.
- [25] ISHITOBI M. Criteria for stability of zeros of sampled system [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(6): 396 – 402.
- [26] FU Y, DUMONT G A. Choice of sampling to ensure minimum-phase behavior [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(5): 560 – 563.
- [27] HARA S. Properties of zeros in digital control systems with computational time delay [J]. *International Journal of Control*, 1989, 49(2): 493 – 511.
- [28] HAGIWARA T, YUASA T, ARAKI M. Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds [J]. *International Journal of Control*, 1993, 58(6): 1325 – 1346.
- [29] PASSINO K M, ANTSAKLIS P J. Inverse stable sampled low-pass systems [J]. *International Journal of Control*, 1988, 47(6): 1905 – 1913.
- [30] KABAMBA P T. Control of linear systems using generalized sampled-data hold function [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(7): 772 – 783.
- [31] MIDDLETON R, FREUDENBURG J. Non-pathological sampling for generalized sampled-data hold functions [J]. *Automatica*, 1995, 31(6): 315 – 319.
- [32] CHAN J T. On the stabilization of discrete system zeros [J]. *International Journal of Control*, 1998, 69(6): 789 – 796.
- [33] LIANG S, ISHITOBI M. The properties of zeros of discretized system using multirate input and hold [J]. *IEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 2004, 151(2): 180 – 184.
- [34] FEUER A, GOODWIN G. *Sampling in Digital Signal Processing and Control* [M]. Boston: Birkhauser, 1996.
- [35] ISHITOBI M, ZHU Q. Zeros of sampled systems with fractional order hold implemented by zero order hold [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems*. Beijing, China: IEEE, 1997: 698 – 702.
- [36] LIANG S, ISHITOBI M. On the zeros of a multivariable discrete-time control system with approximate fractional order hold [C] // *Proceedings of 2001 International Conference on Control, Automation and Systems*. Cheju, Korea: [s.n.], 2001: 386 – 389.
- [37] ISHITOBI M. Stability of zeros of sampled system with fractional order hold [J]. *IEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 1996, 143(2): 296 – 300.
- [38] LIANG S, ISHITOBI M, ZHU Q. Improvement of stability of zeros in discrete-time multivariable systems using fractional-order hold [J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(17): 1699 – 1711.
- [39] HAYAKAWA Y, HOSOE S, ITO M. On the limiting zeros of sampled multivariable systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1983, 2(5): 292 – 300.
- [40] LIANG S, XIAN X D, ISHITOBI M, et al. Stability of zeros of discrete-time multivariable with GSHF [J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2010, 6(7): 2917 – 2926.
- [41] TESHAYE A, TOMIZUKA M. Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator—an asymptotic analysis [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(4): 743 – 747.
- [42] YUZ J I. *Sampled-data models for linear and nonlinear systems* [D]. Newcastle, Australia: The University of Newcastle, 2005.
- [43] MIDDLETON R, GOODWIN G C. *Digital Control and Estimation: A Unified Approach* [M]. London: Prentice-Hall, 1990.
- [44] GANTMACHER F R. *The Theory of Matrices* [M]. Chelsea: Taylor & Francis, 1959.
- [45] LATAWIEC K, BAŃKA S, TOKARZEWSKI J. Control zeros and nonminimum phase LTI MIMO systems [J]. *Annual Review in Control*, 2000, 24(1): 105 – 112.
- [46] SCHRADER C B, SAIN M K. Research on system zeros: a survey [J]. *International Journal of Control*, 1989, 50(6): 1407 – 1433.
- [47] ANTSAKLIS P J, MICHEI A N. *Linear Systems* [M]. New York: McGraw-Hill, 1997.
- [48] ROSENBRICK H H. *State-Space and Multivariable Theory* [M]. New York: Wiley-Interscience, 1970.
- [49] HAGIWARA T, ARAKI M. Properties of limiting zeros of sampled systems [J]. *Transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan*, 1990, 110(4): 235 – 244. (in Japanese)
- [50] WELLER S R, MORAN W, NINNESS B, et al. Sampling zeros and the Euler-Forbenius polynomials [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 340 – 343.
- [51] BLACHUTA M J. On zeros of pulse transfer function of systems with first-order hold [C] // *The 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, USA: IEEE, 1998: 307 – 312.

- [52] BLACHUTA M J. On fast sampling zeros of systems with fraction-order hold [C] // *American Control Conference*. Arlington, USA: IEEE, 2001: 3229 – 3230.
- [53] ISHITOBI M, KOGA T, NISHI M, et al. Asymptotic properties of zeros of sampled-data systems [C] // *The 49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta, USA: IEEE, 2010: 4952 – 4957.
- [54] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems: An Introduction* [M]. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [55] KHALIL H. *Nonlinear Systems* [M]. 3rd ed. London: Prentice-Hall, 2002.
- [56] LIANG S, ISHITOBI M, KOGA T, et al. On Zeros of sampled-data system with relative degree two [C] // *Proceedings of the 2011 International Conference on Advanced Mechatronic Systems*. Zhengzhou, China: IEEE, 2011: 67 – 71.
- [57] ISHITOBI M. Limiting zeros of a class of sampled multivariable system [C] // *IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems*. Beijing, China: IEEE, 1997: 693 – 697.
- [58] ISHITOBI M. A stability condition of zeros of sampled multivariable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 295 – 299.
- [59] 梁山, 石飞光章, 石为人, 等. 离散时间MIMO系统极限零点的稳定性 [J]. *自动化学报*, 2007, 33(4): 439 – 442.
(LIANG Shan, ISHITOBI M, SHI Weiren, et al. On stability of the limiting zeros of discrete-time MIMO systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(4): 439 – 442.)
- [60] LIANG S, ISHITOBI M, ZHU Q. On the limiting zeros of discrete-time multivariable systems [C] // *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*. Okayama, Japan: IEEE, 2009: 26 – 29.
- [61] ISHITOBI M, KOGA T, KUNIMATSU S. Asymptotic properties of zeros of multivariable sampled-data system [C] // *2011 Australian Control Conference*. Melbourne, Australian: ACC, 2011: 513 – 518.
- [62] WELLER S R. Limiting zeros of decoupling MIMO systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(6): 292 – 300.
- [63] BÁRCENA R, DE LA SEN M, SAGASTABEITIA I. Improving the stability properties of the zeros of sampled systems with fractional order hold [C] // *IEEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 2000, 147(4): 456 – 464.
- [64] LIANG S. *Studies on stability of zeros of discrete-time control system* [D]. Kumamoto, Japan: Kumamoto University, 2004.
- [65] CHAN J T. Stabilization of discrete system zeros: an improved design [J]. *International Journal of Control*, 2002, 75(10): 759 – 765.
- [66] YUZ J I, GOODWIN G C, GANNIER H. Generalised hold functions for fast sampling rates [C] // *The 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Bahamas: IEEE, 2004, 46(5): 761 – 765.
- [67] ISHITOBI M, LIANG S. On zeros of discrete-time models for collocated mass-damper-spring systems [J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2004, 126(1): 205 – 210.
- [68] ISHITOBI M. Stable zeros of a discrete system obtained by sampling a continuous-time plant with a time delay [J]. *International Journal of Control*, 1994, 59(4): 1053 – 1062.
- [69] LIANG S, ISHITOBI M. The stability properties of the zeros of sampled models for time delay systems in fractional order hold case [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms*, 2004, 11(3): 299 – 312.
- [70] LIANG S, WANG R, ZHU Q. A design for sampled models with stable zeros for time delay systems using PC GSHF [C] // *Proceedings of the 4th International Conference on Impulsive and Hybrid Dynamical Systems*. Nanning, China: [s.n.], 2007: 934 – 937.
- [71] ÅSTRÖM K, WITTENMARK B. *Computer Controlled Systems* [M]. 3rd ed. New York: Courier Dover Publications, 2011.
- [72] ÅSTRÖM K J, WITTENMARK B. *Adaptive Control* [M]. 2nd ed. New York: Courier Dover Publications, 2008.
- [73] LIANG S, XIAN X D, ISHITOBI M. Stability of zeros of the multirate sampling system [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, series A: Mathematical Analysis*, 2006, 3(13): 310 – 314.
- [74] KREISSELMEIER G, GEIGER R. Disturbance compensation in continuous time by sampled data control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(11): 1566 – 1571.
- [75] WERNER H. Generalized sampled-data hold functions for robust multivariable tracking and disturbance rejection [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2001, 22(2): 75 – 93.
- [76] LIANG S, XIAN X D, ISHITOBI M. Stability of zeros of discrete-time systems with GSHF [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, series B: Applications and Algorithms*, 2006, 1(13): 584 – 588.
- [77] SÁNCHEZ M, PUGNALONI L A. Effective mass overshoot in single degree of freedom mechanical systems with a particle damper [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(24): 5812 – 5819.
- [78] MORVAN O, EMMANUEL F. On the properness condition for modal analysis of non-symmetric second-order systems [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, 25(2): 601 – 620.
- [79] BÁRCENA R, DE LA SEN M, SAGASTABEITIA I, et al. Discrete control for a computer hard disk and by using a fractional order hold device [J]. *IEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 2001, 148(4): 117 – 124.
- [80] RUBIO L, DE LA SEN M, BILBAO-GUILLERMA A. Intelligent adaptive control of force in milling process [C] // *IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*. Athens, Greece: IEEE, 2007: 27 – 29.
- [81] RUBIO L, DE LA SEN M. Discrete-time model reference control schemes of milling forces using fractional order holds [C] // *The 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Taipei, Taiwan: IEEE, 2007, 7(12): 798 – 803.
- [82] RUBIO L, DE LA SEN M, IBEAS A. Discrete-time model reference control of milling forces under fractional order holds, part I: known plant [C] // *The 11th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*. Prague, Czech: IEEE, 2006: 1001 – 1004.
- [83] RUBIO L, DE LA SEN M, IBEAS A. Discrete-time model reference control of milling forces under fractional order holds, part II: extensions to adaptive control [C] // *The 11th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*. Prague, Czech: IEEE, 2006: 1005 – 1008.
- [84] RUBIO L, DE LA SEN M. Adaptive control of milling forces under fractional order holds [M] // *Innovative Algorithms and Techniques in Automation, Industrial Electronics and Telecommunications*. London, UK: Springer, 2007: 257 – 261.
- [85] AGHDAM A G, DAVISON E J, ARREOLA R. Structural modification of systems using discretization and generalized sampled-data hold functions [J]. *Automatica*, 2006, 42(11): 1935 – 1941.
- [86] LAVAEI J, AGHDAM A G. Simultaneous LQ control of a set of LTI systems using constrained generalized sampled-data hold functions [J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 274 – 280.
- [87] CHEN T, FRANCIS B A. *Optimal Sampled-Data Control Systems* [M]. London, UK: Springer, 1995.
- [88] MONACO S, NORMAND-CYROT D. Zero dynamics of sampled-nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1988, 11(3): 229 – 234.
- [89] CALIFANO C, MONACO S, NORMAND-CYROT D. Some comments about linearization under sampling [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1654 – 1658.

- [90] NISHI M, ISHITOBI M, LIANG S, et al. Sampled-data models for Decouplable nonlinear multivariable systems [C] // *SICE Annual Conference*. Taipei, Taiwan: Society of Instrument and Control Engineers, 2010: 936 – 941.
- [91] MONACO S, NORMAND-CYROT. A unified representation for nonlinear discrete-time and sampled dynamics [J]. *Journal of Mathematical, System, Estimation and Control*, 1997, 7(4): 477 – 503.
- [92] NEŠIĆ D, TEEL A R. Sampled-data control of nonlinear systems: an overview of recent results [M] // *Perspectives in Robust Control*. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [93] ISHITOBI M, NISHI M. Zero dynamics of sampled-data models for nonlinear systems [C] // *The American Control Conference*. Seattle, USA: IEEE, 2008: 1184 – 1189.
- [94] ISHITOBI M, NISHI M, KUNIMATSU S. Stability of zero dynamics of sampled-data nonlinear systems [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: IFAC, 2008: 5969 – 5973.
- [95] KAZANTZIS N, KRACARIS C. System-theoretic properties of sampled-data representations of nonlinear systems obtained via Taylor-Lie series [J]. *International Journal of Control*, 1997, 67(6): 997 – 1020.
- [96] NISHI M, ISHITOBI M. Sampled-data models and zero dynamics for nonlinear systems [C] // *ICROS-SICE International Joint Conference*. Fukuoka, Japan: the Society of Instrument and Control Engineers, 2009: 2448 – 2453.
- [97] ISHITOBI M, NISHI M. Sampled-data models for nonlinear systems with a fractional-order hold [C] // *The 18th IEEE International conference on Control Applications part of 2009 IEEE Multi-conference on Systems and Control*. Saint Petersburg, Russia: IEEE, 2009: 153 – 158.
- [98] NISHI M, ISHITOBI M. Sampled-data models for affine nonlinear systems using a fractional-order hold and their zero dynamics [J]. *Artificial Life and Robotics*, 2010, 15(4): 500 – 503.
- [99] FRANKLIN G F, WORKMAN M L, POWELL D. *Digital Control of Dynamic Systems* [M]. Boston, USA: Addison-Wesley Longman Publisher, 1997.
- [100] LAILA D S, NEŠIĆ D, ASTOLFI A. Sampled-data control of nonlinear systems [M] // *Advanced Topics in Control Systems Theory*. London: Springer Verlag, 2006: 91 – 137.
- [101] NEŠIĆ D, TEEL A R, KOKOTOVIC P V. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations [J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 38(4): 259 – 270.
- [102] NEŠIĆ D, TEEL A R. Changing supply rates in input-to-state stable system: the discrete-time case [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(6): 221 – 240.
- [103] NEŠIĆ D, TEEL A R. A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1103 – 1122.
- [104] BÁRCENA R, DE LA SEN M. On the sufficiently small sampling period for the convenient turning of fractional order hold circuits [J]. *IEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 2003, 150(2): 183 – 188.
- [105] UGALDE U, BÁRCENA R, BASTERRETXEA K. Generalized sampled-data hold functions with asymptotic zero-order hold behavior and polynomial reconstruction [J]. *Automatica*, 2012, 48(6): 1171 – 1176.
- [106] WAHLBERG B. Limit results for sampled systems [J]. *International Journal of Control*, 1988, 48(2): 1267 – 1283.
- [107] YUZ J I, GOODWIN G C. Generalised filters and stochastic sampling zeros [C] // *The 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 6991 – 6996.
- [108] GOODWIN G C, YUZ J I, SALGADO M E. Insight into the zero dynamics of sampled-data models for linear and nonlinear stochastic systems [C] // *The 9th European Control Conference*. Kos, Greece: ECC, 2007: 25 – 32.
- [109] YUZ J I, GOODWIN G C. Sampled-data models for stochastic nonlinear systems [C] // *The 14th IFAC Symposium on System Identification*. Newcastle, Australia: IFAC, 2006: 434 – 439.
- [110] GOODWIN G, AGUERO J, WELSH J, et al. Robust identification of process models from plant data [J]. *Journal of Process Control*, 2008, 18(9): 810 – 820.
- [111] GOODWIN G C, YUZ J I, GARNIER H. Robustness issues in continuous-time system identification from sampled data [C] // *Proceedings of the 16th IFAC world Congress*. Prague, Czech: IFAC, 2005: 39 – 44.
- [112] YUCRS E A, YUZ J I. Frequency domain accuracy of approximate sampled-data models [C] // *Proceedings of the 18th IFAC world Congress*. Milano, Italy: IFAC, 2011: 8711 – 8717.
- [113] GOODWIN G C, YUZ J I, AGUERO J. Relative error issues in sampled data models [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: IFAC, 2008: 5047 – 5052.
- [114] KAZANTZIS N. A new approach to the zero-dynamics assignment problem for nonlinear discrete-time systems using functional equations [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 51(3): 311 – 324.
- [115] AGUERO J C, YUZ J I, GOODWIN G C, et al. On the equivalence of time and frequency domain maximum likelihood estimation [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 260 – 270.
- [116] ARRIAGADA I A, YUZ J I. On the relationship between Splines, sampling zeros and numerical integration in sampled-data models for linear systems [C] // *American Control Conference*. Seattle, USA: IEEE, 2008: 3665 – 3670.
- [117] LAILA D S, NEŠIĆ D. Changing supply rates for input-output to state stable discrete-time nonlinear systems with applications [J]. *Automatica*, 2003, 39(5): 821 – 835.

作者简介:

曾 诚 (1980–), 男, 博士研究生, 讲师, 研究领域为非线性控制系统和自适应控制, E-mail: zengcheng1290@163.com;

梁 山 (1967–), 男, 教授, 研究领域为自适应控制和非线性控制系统, E-mail: lightsun@cqu.edu.cn;

李洪兵 (1981–), 男, 博士研究生, 研究领域为自组织传感器网络, E-mail: sxxylhb@163.com;

苏盈盈 (1982–), 女, 博士研究生, 研究领域为复杂系统建模与优化, E-mail: yy_su2000@yahoo.com.cn.