

具有自适应噪声边界的Tube可达集鲁棒预测控制

王超[†], 张胜修, 秦伟伟, 郑建飞

(第二炮兵工程大学 自动控制工程系, 陕西 西安 710025)

摘要: 针对过程噪声设定边界与真实噪声边界失配的有界干扰离散线性不确定系统, 提出一种具有自适应噪声边界的Tube可达集鲁棒模型预测控制方法. 首先, 该算法引入基于MIT规则的自适应集员滤波在线估计系统状态和噪声边界. 其次, 基于估计值, 通过迭代自适应集员滤波的时间更新部分计算出预测时域内闭环不确定系统状态的可达集. 最后, 用可达集代替不变集并根据Tube鲁棒模型预测控制策略, 给出了实际不确定系统的控制律, 确保系统状态鲁棒渐近稳定, 并收敛于终端干扰不变集. 仿真结果验证了该控制方法的有效性.

关键词: 鲁棒模型预测控制; 集员滤波; 参数定界; 可达集; 多面体不变集

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Tube-reachable set-based robust model predictive control with adaptive disturbances boundaries

WANG Chao[†], ZHANG Sheng-xiu, QIN Wei-wei, ZHENG Jian-fei

(Department of Automatic Control Engineering, the Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: For a discrete-time linear uncertain system with bounded disturbances but mismatch between the real process noise boundary and its setting boundary, we present a tube-reachable set-based robust model predictive control (RMPC) with adaptive disturbances boundaries. Firstly, an MIT-based adaptive set-membership filter (MIT-ASMF) is introduced to estimate the states and the boundaries of the process noise in real time. Secondly, based on the estimated results, the reachable sets of the local uncertain closed-loop system are calculated by propagating the prediction step of the ASMF along the prediction horizon. Finally, by replacing the invariant set with previously determined reachable sets in the tube-based RMPC formulation, we determine the control law for the real uncertain system to guarantee the real uncertain system of robustly asymptotic stability and the convergence to the terminal disturbance invariant set. The simulation results validate the efficacy of the proposed method.

Key words: robust model predictive control; set-membership filter; parameter determination; reachable set; polytopic invariant set

1 引言(Introduction)

干扰不确定系统的鲁棒性一直以来都是模型预测控制(model predictive control, MPC)的研究热点问题. 研究人员借鉴鲁棒控制的研究成果, 对具有加性干扰对象的鲁棒模型预测控制开展了深入研究, 包括干扰有界线性时不变系统, 以及干扰有界线性时变系统. 其中, Mayne等人提出的基于Tube不变集的预测控制算法^[1]是一种独特的方法. 该方法设计一个参数化的状态Tube不变集序列, 采用相应控制策略使得不确定系统的状态始终处于Tube不变集序列内, 保证系统在整个过程中具有良好的鲁棒性, 并渐近收敛到终端干扰不变集. 随后, Langson等人研究了参数时变系统的Tube不变集控制器设计方法^[2]. 为了提高在线计算

能力和优化性能, Rakovic和Mayne等人提出了改进算法^[3], 之后Rakovic等人将该算法推广到具有匹配非线性的离散非线性系统^[4]. 文献[5]进一步将鲁棒Tube控制策略扩展到跟踪控制中.

以上文献中, 基于Tube不变集的预测控制算法都需要系统噪声的先验信息, 即过程噪声和测量噪声的不确定界限. 其中, 测量噪声来自于传感器的精度, 只要传感器正常工作条件下不确定界并不会发生改变, 因此可以通过对传感器数据的先期分析确定其测量噪声的不确定界; 然而, 对于系统过程噪声, 由于其来自于系统状态空间动力学模型结构和参数的失配, 且就目前系统辨识方法而言, 无法对其离线精确建模, 多数情况下其不确定界先验信息无法得知, 需要根据

经验手工选取. 但由于先验知识有限, 当人为选取的过程噪声不确定界无法包含实际的过程噪声真实值时, 会直接导致基于Tube不变集的预测控制算法发散; 相反, 当人为选取噪声不确定界远超实际过程噪声真实值时, 可能会导致基于Tube不变集的预测控制算法无解.

为此, 本文在状态反馈Tube不变集鲁棒模型预测控制 (robust model predictive control, RMPC) 的基础上提出了具有自适应噪声边界的Tube可达集RMPC算法. 当系统过程噪声不确定界先验信息未知时, 则引入自适应集员滤波 (adaptive set-membership filter, ASMF) 在线估计系统过程噪声边界; 并通过迭代自适应集员滤波的时间更新部分估计出预测时域内闭环不确定系统状态以椭圆集合描述的可达集; 进而根据Tube鲁棒模型预测控制策略, 基于可达集设计对应标称模型的预测控制优化计算中的状态与输入约束条件, 通过计算最优控制序列和状态轨迹, 给出了实际不确定系统的Tube可达集控制策略, 确保系统状态鲁棒渐近稳定, 并收敛于终端干扰不变集.

2 问题描述 (Problems statement)

首先给出一类干扰有界的约束线性时不变系统:

状态方程

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad (1)$$

量测方程

$$y_{k+1} = Cx_{k+1} + v_{k+1}, \quad (2)$$

其中: 状态变量 $x \in \mathbb{R}^n$, 控制输入 $u \in \mathbb{R}^m$, 输出 $y \in \mathbb{R}^p$ 以及范数有界干扰 $w \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^p$.

控制输入和状态约束满足条件:

$$u_k \in U \triangleq \{u_k \in \mathbb{R}^m | A_u u_k \leq \bar{1}\}, \quad (3)$$

$$x_k \in X \triangleq \{x_k \in \mathbb{R}^n | A_x x_k \leq \bar{1}\}, \quad (4)$$

式中: $U \subset \mathbb{R}^m$ 是紧集, $X \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集, 而且每个集合均包含原点, $\bar{1}$ 表示元素为1的列向量, 且维数与式中心矩阵相对应.

有界干扰 w_k, v_k 满足

$$w_k \in W_k \triangleq \{w_k \in \mathbb{R}^n | \|w_k\|_\infty \leq \zeta_k^w, \zeta_k^w \geq 0\}, \quad (5)$$

$$v_k \in V_k \triangleq \{v_k \in \mathbb{R}^p | \|v_k\|_\infty \leq \zeta_k^v, \zeta_k^v \geq 0\}, \quad (6)$$

其中 W_k 和 V_k 是包含原点的紧集.

假设干扰有界线性系统(1)–(2)对应的无干扰标称模型定义为

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + B\bar{u}_k, \quad (7)$$

$$\bar{y}_{k+1} = C\bar{x}_{k+1}, \quad (8)$$

其中: 标称状态变量 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, 标称控制输入 $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, 标称输出 $\bar{y} \in \mathbb{R}^p$.

模型预测控制器设计目标是针对干扰有界的离散

线性系统(1), 在满足约束(3)–(4)的条件下, 在每个采样时刻进行在线优化, 设计控制输入将系统状态驱动到原点, 并最小化性能指标:

$$J(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} \{\|x_{k+i|k}\|_{Q'}^2 + \|u_{k+i|k}\|_{R'}^2\}, \quad (9)$$

其中 Q' 和 R' 为正定加权矩阵.

3 基于Tube不变集的RMPC (Tube invariant set based RMPC)

当系统过程噪声不确定界已知, 且满足

$$w_k \in W \triangleq \{w_k \in \mathbb{R}^n | \|w_k\|_\infty \leq \zeta^w, \zeta^w \geq 0\}. \quad (10)$$

对于系统(1), 干扰有界不确定系统的Tube不变集RMPC基本思路是利用状态反馈控制律构成闭环系统

$$x_{k+1} = A_K x_k + w_k (A_K = A + BK).$$

然后采用一定控制策略, 使得实际不确定系统的轨迹始终处于不含干扰的标称系统 $\bar{x}_{k+1} = A_K \bar{x}_k$ 最优轨迹为中心的干扰不变集状态序列

$$X_T = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

中 ($X_i = \bar{x}_i \oplus Z$, \bar{x}_i 表示标称系统状态, Z 表示干扰不变集, 也称为Tube不变集, 即“管道”的宽度, “ \oplus ”表示Minkowski集和). 为了使控制器具有良好的鲁棒性, 总是希望 Z 尽可能地小. 因此干扰不变集通常选择最小鲁棒正不变集^[6].

在给出Tube不变集RMPC具体的算法之前, 首先给出鲁棒正不变集与最小鲁棒不变集的定义^[6]及两个与干扰不变集有关的定理^[1].

定义1 集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为不确定系统 $x_{k+1} = A_K x_k + w_k$ 的鲁棒正不变集, 当且仅当对于所有 $x_0 \in \Omega$ 和 $\forall w \in W$, 都有 $\forall x_k \in \Omega$.

定义2 鲁棒正不变集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是系统 $x_{k+1} = A_K x_k + w_k$ 的最小鲁棒不变集, 当且仅当 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是所有闭鲁棒不变集的交集.

定理1 假设 Z 是系统 $x_{k+1} = A_K x_k + w_k$ 的干扰不变集. 实际不确定系统为干扰有界线性系统(1), 对应标称系统为式(7). 如果 k 时刻实际系统状态 $x_k \in \bar{x}_k \oplus Z$, 则采用控制输入 $u_k = \bar{u}_k + K(x_k - \bar{x}_k)$ 可以保证对于任意 $w_k \in W$ 都有 $x_{k+1} \in \bar{x}_{k+1} \oplus Z$.

定理2 若 Z 是系统 $x_{k+1} = A_K x_k + w_k$ 的干扰不变集. 实际干扰有界不确定系统为式(1), 对应标称系统为式(7), 则实际系统的状态可行集 X_F 和标称系统的状态可行集 \bar{X}_F 之间, 存在等式关系 $X_F = \bar{X}_F \oplus Z$.

系统 $x_{k+1} = A_K x_k + w_k$ 的Tube不变集 Z 可采用如下方法计算:

算法1 干扰有界线性系统的Tube不变集.

Step 1 给定近似误差允许值 $\varepsilon > 0$, 令

$$k = 0, Z_0 = \{0\}, \Xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}.$$

Step 2 计算

$$Z_s = \bigoplus_{i=0}^{s-1} A_K^i W. \quad (11)$$

Step 3 令 $s = s + 1$, 当且仅当 $\exists s \in \mathbb{N}^+$ 时使得 $Z_{s+1} - Z_s \leq \varepsilon \Xi$, 计算结束; 否则返回Step 2.

算法 2 干扰有界线性系统的Tube不变集RMPC.

基于标称系统设计模型预测控制器, 定义性能指标函数为

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{i=0}^{N-1} \{\|\bar{x}_{k+i|k}\|_{Q'}^2 + \|\bar{u}_{k+i|k}\|_{R'}^2\} + \|\bar{x}_{k+N|k}\|_{P'}^2, \quad (12)$$

其中: N 表示预测步长, $\|\bar{x}_{k+N}\|_{P'}^2$ 表示终端代价函数. 对于标称系统(7)的状态 \bar{x}_k 和控制输入 \bar{u}_k 采用更加严格的约束:

$$\bar{x}_{k+i|k} \in \bar{X} = X \sim Z, \quad i=0, 1, \dots, N-1, \quad (13)$$

$$\bar{u}_{k+i|k} \in \bar{U} = U \sim KZ, \quad i=0, 1, \dots, N-1, \quad (14)$$

$$\bar{x}_{k+N|k} \in \bar{X}_f, \quad (15)$$

其中: 集合 \bar{X}_f 表示终端约束集(这里选择状态反馈 K_f 对应标称线性系统的最小鲁棒控制不变集); “ \sim ” 表示Pontryagin集差.

定义在线优化过程 $P(\bar{x}, \bar{u})$:

$$J^* = \min_{\bar{u}} \{J|\bar{u} \in \bar{U}, \bar{x} \in \bar{X}\}, \quad (16)$$

$$\bar{u}^* = \arg \min_{\bar{u}} \{J|\bar{u} \in \bar{U}, \bar{x} \in \bar{X}\}. \quad (17)$$

求解 $P(\bar{x}, \bar{u})$ 即可得到最优控制输入序列

$$\bar{u}_k^* = \{\bar{u}_{0|k}^*, \bar{u}_{1|k}^*, \dots, \bar{u}_{N-1|k}^*\}$$

和状态序列

$$\bar{x}_k^* = \{\bar{x}_{0|k}^*, \bar{x}_{1|k}^*, \dots, \bar{x}_{N-1|k}^*\}.$$

对于满足 $x_0 \in \bar{x}_0 \oplus Z$ 的系统初始状态, 依据定理1, 在每个采样时刻在线优化 $P(\bar{x}, \bar{u})$, 进而得到系统(1)的Tube-RMPC控制律 $\kappa_N(\cdot)$:

$$\kappa_N(k) = \bar{u}_{0|k}^* + K(x_k - \bar{x}_{0|k}^*), \quad (18)$$

其中 $\bar{u}_{0|k}^*$ 表示优化序列 \bar{u}_k^* 中的第一个元素.

当 $x_k \in X_f$, 取 $\bar{x}_k = 0, \bar{u}_k = 0$, 设计系统控制输入 $u_k = K_f x_k$ 作用于实际系统. 由文献[6]可知, 鲁棒正不变集 X_f 为最小干扰不变集, 且具有性质 $(A + BK_f)X_f \oplus W \subseteq X_f$, 因此保证了实际系统状态收敛到原点为中心的最小鲁棒正不变集. 根据定理2, 如果本文事先确定了标称系统的初始状态可行集 \bar{S} , 则可以通过计算 \bar{S} 与干扰不变集 Z 的Minkowski集和 S 来确定实际系统的初始状态可行集(即 $S = \bar{S} \oplus Z$). 其中初始可行集 \bar{S} 与终端不变集 X_f 的算法见文献[7].

由以上最小鲁棒正不变集的算法与Tube不变集RMPC算法可以看不出, 当系统过程噪声设定边界与真实噪声边界失配时将导致系统Tube不变集计算错误, 进而导致基于Tube不变集的RMPC算法发散. 因此, 需要通过在线自适应机制获得过程噪声边界 W_k .

4 基于MIT-ASMF的在线噪声边界估计(Online disturbances boundaries estimation based on MIT-ASMF)

本文借鉴文献[8]提出的基于MIT优化规则的AESMF方法(MIT-AESMF), 针对本文的线性系统略去线性化环节, 通过MIT优化规则, 在线计算使一步预测偏差包络椭球最小化的过程噪声包络椭球, 在保证滤波器健康指标满足有效条件下, 获得过程噪声包络椭球的在线更新率.

算法 3 MIT-ASMF.

设系统的初始状态估计椭球集为 $x_0 \in E(\hat{x}_0, P_0)$; 过程和观测噪声椭球集分别为 $w_k \in W_k = E(0, Q_k)$, $v_k \in V_k = E(0, R)(E(a, P)$ 表示椭球集合, a 为椭球集合的中心, P 为描述椭球形状和方向的正定对称包络矩阵); 如得到 k 时刻式(1)–(2)所示系统状态 $x_k \in E(\hat{x}_k, P_k)$, 则 $k+1$ 时刻ASMF滤波算法的迭代过程为

Step 1 使用线性SMF滤波的预测步骤来计算预测状态及其椭球边界

$$\hat{x}_{k+1|k} = A\hat{x}_k + Bu_k, \quad (19)$$

$$\beta_k = \frac{\sqrt{\text{tr}(Q_k)}}{\sqrt{\text{tr}(CP_k C^T) + \sqrt{\text{tr}(Q_k)}}}, \quad (20)$$

$$P_{k+1|k} = A \frac{P_k}{1 - \beta_k} A^T + \frac{Q_k}{\beta_k}. \quad (21)$$

Step 2 使用线性SMF滤波的更新步骤来更新预测状态及其椭球边界

$$\rho_{k+1} = \frac{\sqrt{r_m}}{\sqrt{p_m} + \sqrt{r_m}}, \quad (22)$$

$$W_{k+1} = C \cdot \frac{P_{k+1|k}}{(1 - \rho_{k+1})} \cdot C^T + \frac{R}{\rho_{k+1}}, \quad (23)$$

$$L_{k+1} = \frac{P_{k+1|k}}{1 - \rho_{k+1}} C^T W_{k+1}^{-1}, \quad (24)$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + L_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k}), \quad (25)$$

$$\bar{P}_{k+1} = \frac{P_{k+1|k}}{(1 - \rho_{k+1})} - \frac{P_{k+1|k}}{(1 - \rho_{k+1})} \cdot \frac{P_{k+1|k}}{(1 - \rho_{k+1})} \cdot \frac{P_{k+1|k}}{(1 - \rho_{k+1})}, \quad (26)$$

$$\delta_{k+1} = 1 - (y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k})^T \cdot W_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k}), \quad (27)$$

$$P_{k+1} = \delta_{k+1} \cdot \bar{P}_{k+1}, \quad (28)$$

其中 p_m 和 r_m 分别为矩阵 $C \cdot P_{k+1|k} \cdot C^T$ 和 R 的最大奇异值.

Step 3 基于MIT规则的 $k+1$ 时刻过程噪声椭圆自适应更新.

$$\text{If } |(1 - \delta_{k+1}) \cdot \text{tr}(P_{k+1})| \prec \mu,$$

$$\hat{q}_{k+1}^i = \hat{q}_k^i - \Delta T \eta_k \text{tr}[(1 - \delta_{k+1}) \frac{\partial \delta_{k+1}}{\partial q_k^i} \cdot \bar{P}_{k+1} + (1 - \delta_{k+1}) \delta_{k+1} \frac{\partial \bar{P}_{k+1}}{\partial q_k^i}]. \quad (29a)$$

Else

$$\hat{q}_{k+1}^i = \hat{q}_k^i, \quad (29b)$$

$$Q_{k+1} = \text{diag}\{\hat{q}_{k+1}^1, \hat{q}_{k+1}^2, \dots, \hat{q}_{k+1}^n\}. \quad (30)$$

通过上述过程, 便可估计出 $k+1$ 时刻系统状态及其所在集合

$$x_{k+1} \in E(\hat{x}_{k+1}, P_{k+1}), \quad (31)$$

并更新过程噪声包络椭圆.

注 1 在不引起歧义前提下为方便书写与阅读, 以上递推过程中 $k+1$ 中1均表示采样时间间隔 ΔT .

5 基于Tube可达集的RMPC(Tube reachable set based RMPC)

当 $k+1$ 时刻过程噪声边界更新后, 若采用Tube干扰不变集控制策略, 需要在每个预测时域内在线计算相应的Tube干扰不变集, 同时在线求解优化过程 $P(\bar{x}, \bar{u})$, 其计算负担较大, 不利于算法的在线实施. 为降低在线计算量, 本文利用可达集代替不变集, 提出Tube可达集控制策略, 通过迭代自适应集员滤波的时间更新部分估计预测时域内闭环不确定系统状态以椭圆集合描述的可达集. 首先给出可达集定义^[9].

定义 3 约束离散系统(1)满足输入约束(3)和状态约束(4). 对于任意给定状态 $x(k) \in \Omega$, 在容许控制 $u(k) \in U$ 与有界扰动 $w(k) \in W$ 作用下, 在下一时刻系统状态的集合 $\mathfrak{R}(\Omega)$ 称为集合 Ω 的可达集, 即

$$\mathfrak{R}(\Omega) \triangleq \{x(k+1) \in X | \exists u(k) \in U, \exists x(k) \in \Omega, \exists w(k) \in W: x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k)\}. \quad (32)$$

与Tube干扰不变集控制策略相同, Tube可达集控制策略同样是设计反馈控制律, 保证实际系统的状态轨迹处于以标称系统状态轨迹为中心的Tube可达集序列中. 由于只能得到系统的状态估计值, 故参考状态反馈控制律形式, 设计控制律为

$$\bar{u}_{0|k}^* + K(\hat{x}_k - \bar{x}_{0|k}^*). \quad (33)$$

令 $e^e = x - \hat{x}$ 为状态估计误差, 可知 e_k^e 满足

$$e_k^e \in E(0, P_k) = E(0, P_k^e). \quad (34)$$

令 $e^c = \hat{x} - \bar{x}$ 为状态估计值与标称系统状态误差, 当

采用控制律(33)时, 可知 e^c 满足

$$e_{k+1}^c = A_K e_k^c + L_{k+1}(C e_k^e + v). \quad (35)$$

令 $w_c = L_{k+1}(C e_k^e + v)$, 将式(35)写为

$$e_{k+1}^c = A_K e_k^c + w_c^c, \quad (36)$$

其中 $w_k^c \in W_k^c = L_{k+1} C P_k \oplus L_{k+1} R$.

定义 $e = x - \bar{x}$ 为实际系统状态与标称系统状态误差, 由 e^e 与 e^c 的定义可知实际不确定系统的状态与标称系统状态之间满足关系:

$$x = \bar{x} + e = \bar{x} + (e^c + e^e). \quad (37)$$

当已知 $e_k^e \in E(0, P_k^e)$ 时, 可知 $e_k \in E(0, \Sigma_k) = E(0, P_k^e) \oplus E(0, P_k^c)$.

当采用控制律(33)时, 可知 e 满足

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= A e_k + B K(x_k - \bar{x}_k - e_k^e) + w_k = \\ &= A e_k + B K e_k + w_k - B K e_k^e = \\ &= (A + B K) e_k + w_k' = \\ &= A_K e_k + w_k', \end{aligned} \quad (38)$$

其中 $w_k' = w_k - B K e_k^e \in W_k' = E(0, \hat{Q}_k)$ 为虚拟噪声项. 可按照最小迹准则来选取包含由状态估计误差和过程噪声相加得到的虚拟噪声项 w_k' 的外定界椭圆集合^[10].

$$\begin{cases} W_k' = E(0, \hat{Q}_k) \supseteq E(0, Q_k) \oplus E(0, -B K P_k), \\ \hat{Q}_k = \frac{-B K P_k}{1 - \beta_1} + \frac{Q_k}{\beta_1}, \beta_1 \in (0, 1). \end{cases} \quad (39)$$

根据可达集定义, 可知通过迭代自适应集员滤波的时间更新部分可估计出预测时域内系统状态误差方程(38)以椭圆集合描述的可达集.

算法 4 基于ASMF的可达集序列估计.

Step 1 初始化

$$e_{k|k} \in E(0, \Sigma_k), \hat{Q}_k. \quad (40)$$

Step 2 计算状态可达集. 令 $l = k$,

$$e_{l+1|k} = A_K e_{l|k}, \quad (41)$$

$$\Sigma_{l+1|k} = A_K \frac{\Sigma_{l|k}}{1 - \beta_2} A_K^T + \frac{\hat{Q}_k}{\beta_2}, \beta_2 \in (0, 1). \quad (42)$$

Step 3 递推计算状态可达集序列.

令 $l = k + 1$, 当 $l = k + N - 2$ 时计算结束; 否则返回Step 2.

通过递推计算, 在预测时域 N 内, 可得实际系统状态与标称系统状态误差及其椭圆包络矩阵:

$$\mathfrak{R}_{k:k+N-1}^e = \{E(e_{k|k}, \Sigma_{k|k}), \dots, E(e_{k+N-1|k}, \Sigma_{k+N-1|k})\}. \quad (43)$$

注 2 本节递推过程中 $k+1$ 中1表示 $\Delta T/N$. 在下一采

样时刻, 首先根据式(36)求出 e_{k+1}^c 的包络矩阵, 并将ASMF量测更新后的系统状态估计误差包络椭圆和过程噪声包络椭圆更新值共同作为可达集计算的初始值, 重复以上迭代过程. 如此反复, 即可求得各预测时域内的状态误差可达集.

由实际系统状态与标称系统状态关系 $x = \bar{x} + e$ 及其误差可达集. 可知预测时域内实际不确定系统的轨迹始终处于不含干扰的标称系统最优轨迹为中心的状态Tube可达集序列(44)中.

$$\mathfrak{R}_{k:k+N-1}^x = \{E(\bar{x}_{k|k}, \Sigma_{k|k}), \dots, E(\bar{x}_{k+N-1|k}, \Sigma_{k+N-1|k})\}. \quad (44)$$

算法 5 干扰有界线性系统的Tube可达集RMPC

基于标称系统设计模型预测控制器, 在满足约束(46)–(48)的条件下, 在每个采样时刻进行在线优化, 最小化性能指标(45), 求出最优控制输入序列

$$\bar{u}_k^* = \{\bar{u}_{0|k}^*, \bar{u}_{1|k}^*, \dots, \bar{u}_{N-1|k}^*\}$$

和最优状态序列

$$\bar{x}_k^* = \{\bar{x}_{0|k}^*, \bar{x}_{1|k}^*, \dots, \bar{x}_{N-1|k}^*\},$$

那么采用控制输入

$$u_k = \bar{u}_{0|k}^* + K(\hat{x}_k - \bar{x}_{0|k}^*),$$

可将干扰有界的离散线性系统(1)状态驱动到终端不变集 X_f 中, 同时满足原状态约束(3)与输入约束条件(4).

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{i=0}^{N-1} \{\|\bar{x}_{k+i|k}\|_{Q'}^2 + \|\bar{u}_{k+i|k}\|_{R'}^2\} + \|\bar{x}_{k+N|k}\|_{P'}^2, \quad (45)$$

$$\text{s.t. } \bar{x}_{k+i|k} \in \bar{X} = X \sim \mathfrak{R}_i^x, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (46)$$

$$\bar{u}_{k+i|k} \in \bar{U} = U \sim K\mathfrak{R}_i^x, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (47)$$

$$\bar{x}_{k+N} \in X_f \sim \mathfrak{R}_N^x. \quad (48)$$

由于算法中涉及集合的Pontryagin集差运算, 为此给出如下假设:

假设 1 这里假设状态约束 X 和输入约束 U , 与干扰对应的可达集 \mathfrak{R}_i^x , 满足 $X \sim \mathfrak{R}_i^x \neq \emptyset$, $U \sim K\mathfrak{R}_i^x \neq \emptyset$ (\emptyset 表示空集).

6 具有自适应噪声边界的Tube可达集双模RMPC(Tube reachable set based dual-mode RMPC with adaptive disturbances boundaries)

当采用状态反馈Tube干扰不变集控制策略时, 其终端不变集 X_f 可取为最小鲁棒正不变集 $\bar{X}_f \oplus Z$. 当

$x_k \in X_f$ 时, 取 $\bar{x}_k = 0$, $\bar{u}_k = 0$, 设计系统控制输入 $u_k = K_f x_k$ 作用于实际系统. 可保证实际系统状态始终处于以原点为中心的最小鲁棒正不变集 X_f 中. 而其初始状态可行集则取为 $S = \bar{S} \oplus Z$. 当过程噪声边界未知时无法求得闭环系统的最小鲁棒正不变集 Z , 因此无法准确求出系统初始状态可行集与终端不变集. 为了有效估计初始状态可行集与终端不变集, 同时降低在线计算量, 本文综合控制不变集、可达集、在线优化、在线参数估计、双模模型预测控制、增益调度等思想, 给出一种具有自适应噪声边界的Tube可达集双模鲁棒预测控制算法.

算法 6 干扰有界线性系统的自适应噪声边界Tube可达集双模RMPC. 算法分为离线设计和在线优化两部分组成:

1) 离线部分:

Step 1 根据经验手工选取系统过程噪声最大与最小可能包络椭圆集

$$w_k \in W_{\max} = E(0, Q_{\max}),$$

$$w_k \in W_{\min} = E(0, Q_{\min});$$

并在 W_{\min} 和 W_{\max} 之间选择 $m-2$ 个可能包络椭圆集.

Step 2 对于系统(1)–(2)采用在Step 1中选取的 m 个过程噪声, 依据文献[11]的椭圆集构造方法, 分别离线计算满足约束(3)–(4)的最大和最小椭圆不变集 Ξ_i^{\max} 与 Ξ_i^{\min} ($i = 1, \dots, m$)及对应的状态反馈控制增益 K_i^{\max} 和 K_i^{\min} ($i = 1, \dots, m$).

Step 3 分别计算状态反馈增益 K_i^{\max} 和 K_i^{\min} 对应的多面体不变集 Π_i^{\max} 和 Π_i^{\min} .

Step 4 取初始状态允许集

$$S = \bigcup_{i=1}^m \Pi_i^{\max},$$

取扩展终端约束集 $X_f = \bigcup_{i=1}^m \Pi_i^{\min}$ (控制不变集的并集仍为控制不变集^[6]).

2) 在线部分:

Step 1 给定系统初始状态 $x_0 \in E(\hat{x}_0, P_0^e) \subset S$, $\hat{x}_0 \in E(\bar{x}_0, P_0^e) \subset S$ 与初始噪声边界估计值

$$w_0 \in W_0 = E(0, Q_0), \quad v \in V = E(0, R);$$

Step 2 利用算法3计算出 $k+1$ 时刻系统状态及其所在集合并更新过程噪声包络椭圆;

Step 3 利用算法4计算预测时域内实际不确定系统状态轨迹的Tube可达集序列;

Step 4 根据当前时刻状态判断: 如果 $x_k \notin X_f$, 查找包含该状态的最大下标多面体不变集 Π_i^{\max} , 并选择算法5中控制输入的状态反馈增益 $K = K_i^{\max}$, 并将其作用于系统; 如果系统状态满足 $x_k \in X_f$, 则采

用控制输入

$$u_k = K_j^{\min} x_k, j = \max\{i : x_k \in \Pi_i^{\min}\}. \quad (49)$$

Step 5 测量下一时刻系统状态, 返回Step 2.

7 仿真验证(Simulation example)

为了检验控制算法6的有效性, 以下面离散双积分线性模型为例设计控制器. 不确定动态模型描述为

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + w_k, \quad (50)$$

$$y_{k+1} = [1 \ 1]x_{k+1} + v_{k+1}. \quad (51)$$

系统状态约束和输入约束满足:

$$A_x = [0.1I \ -0.1I]^T,$$

$$A_u = [1 \ -1]^T.$$

持续作用的过程噪声与观测噪声为

$$w_k = \sin(10k)[0.4 \ 0.3]^T,$$

$$v_k = \cos(20k)[0.4 \ 0.2]^T,$$

其椭球包络矩阵分别取为

$$Q_0 = \text{diag}\{0.2, 0.2\},$$

$$R = \text{diag}\{0.5, 0.3\}.$$

性能指标函数中的加权矩阵为

$$Q' = I_2, R' = 0.01, P' = 50I_2.$$

仿真中取 $m = 5$ 即选取5个系统过程噪声可能包络椭球, 并根据算法6离线部分计算系统初始状态允许集和扩展终端约束集(如图1所示, 不同颜色对应不同噪声包络椭球计算结果).

取边界状态 $x_0 = [9.36 \ 0.48]^T$ 为初始状态. 由算法6在线部分设计控制器作用于干扰有界的实际系统, 得到状态轨迹变化曲线如图1-2所示(黑色实线表示实际系统轨迹, 黄色虚线表示标称系统轨迹), 图2曲线是图1曲线的局部放大图. 状态变量时间响应曲线如图3所示. 控制输入时间变化曲线如图4所示.

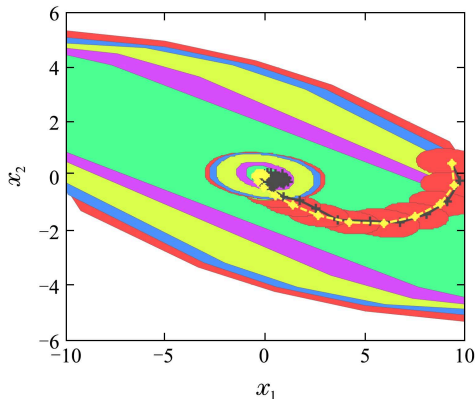


图1 标准系统与实际系统的状态轨迹曲线

Fig. 1 The trajectories of nominal and real systems

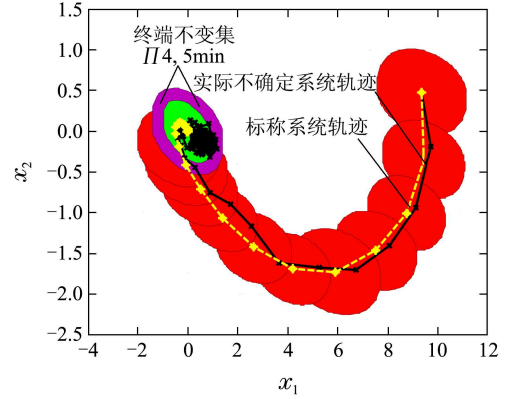


图2 标准系统与实际系统的状态轨迹曲线

Fig. 2 The trajectories of nominal and real systems

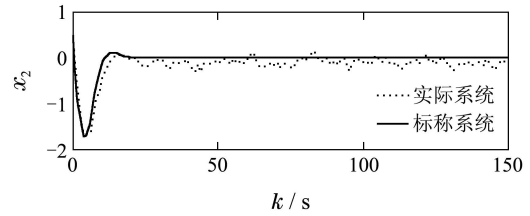
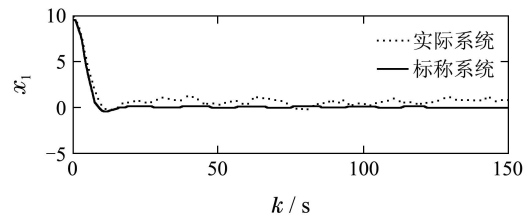


图3 系统状态时间响应曲线

Fig. 3 The time response of system state

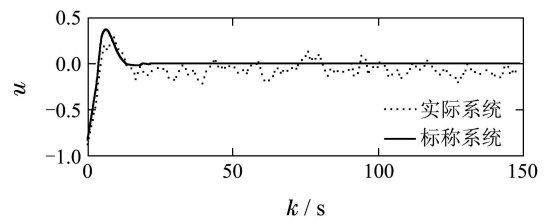


图4 控制输入时间曲线图

Fig. 4 Time trajectories of control input

图1-2中红色椭球为各采样时刻根据ASMF量测更新后的系统状态估计误差包络椭球和过程噪声包络椭球更新值求得的可达集计算初始值, 同时也是该时刻系统真实状态与标称系统状态的误差包络椭球, 可以看出包络椭球的大小随过程噪声变化而变化. 以其为初值通过递推得到的可达集序列如图5-6所示.

图1-6表明, 即使存在过程噪声设定边界与真实噪声边界失配, 由于具有在线噪声边界自适应机制, ASMF可以在线调整过程噪声包络椭球, 进而根据在线获取的真实过程噪声边界, 通过迭代ASMF时间更新部分递推系统可达集并采用Tube可达集RMPC控制策略, 使实际系统状态轨迹可以始终处于以标称系统状态为中心的可达集内, 并且最终收敛于终端鲁棒

干扰不变集 X_f . 同时满足控制输入约束条件, 如图4所示. 另外标称系统稳定后, 标准控制输入为0, 而实际系统中仍存在控制输入以保证实际系统状态处于终端干扰不变集内部.

情况下, 仅采用状态反馈Tube不变集RMPC方法无法将系统状态驱动到终端不变集中, 而且当失配增大到一定程度时, 还可能导致状态轨线发散.

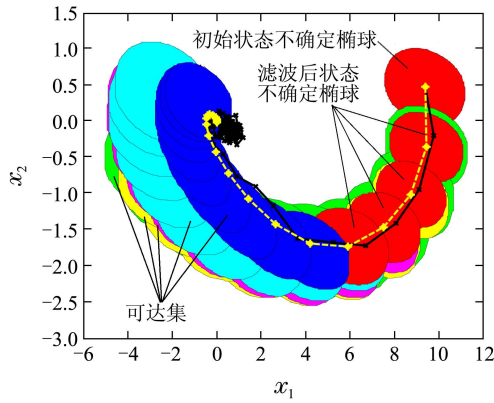


图 5 Tube可达集 $k = 1 : 5$

Fig. 5 The reachable tube of trajectories in $k = 1 : 5$

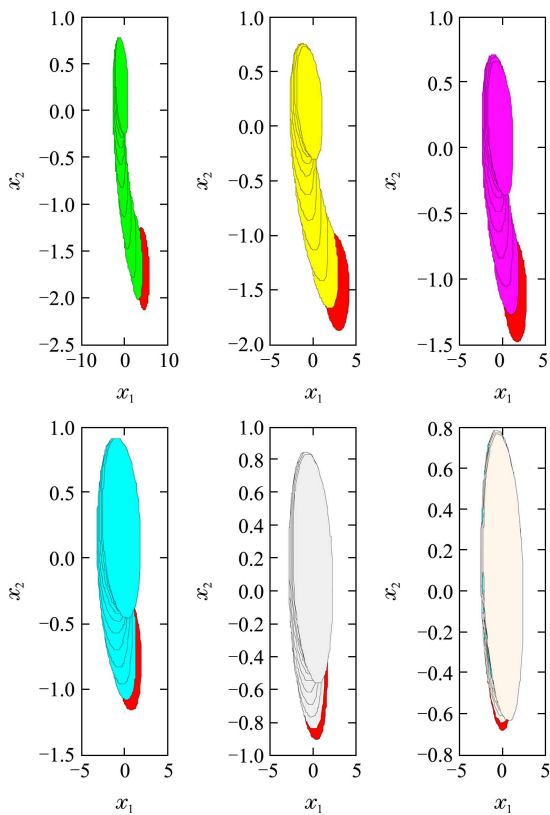


图 6 Tube可达集 $k = 6 : 11$

Fig. 6 The reachable tube of trajectories in $k = 6 : 11$

为进一步对比说明控制器的控制效果和控制鲁棒性, 在本文仿真条件下, 对采用状态反馈Tube不变集RMPC时的控制效果进行了仿真, 得到状态轨迹变化曲线如图7所示; 状态变量时间响应曲线如图8所示; 控制输入时间变化曲线如图9所示. 从图7-9可以看出, 与使用具有自适应噪声边界的Tube可达集RMPC相比, 当存在过程噪声设定边界与真实噪声边界失配

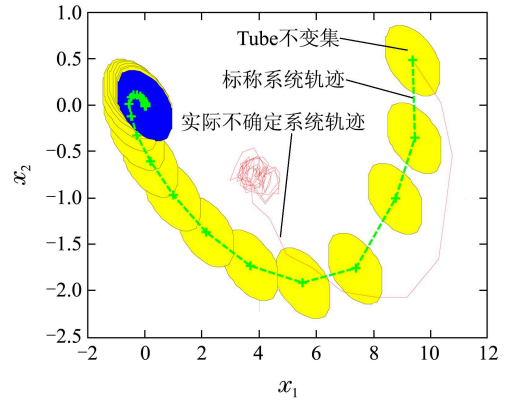


图 7 基于Tube不变集RMPC的状态轨迹曲线

Fig. 7 Trajectories for Tube-invariant set based RMPC

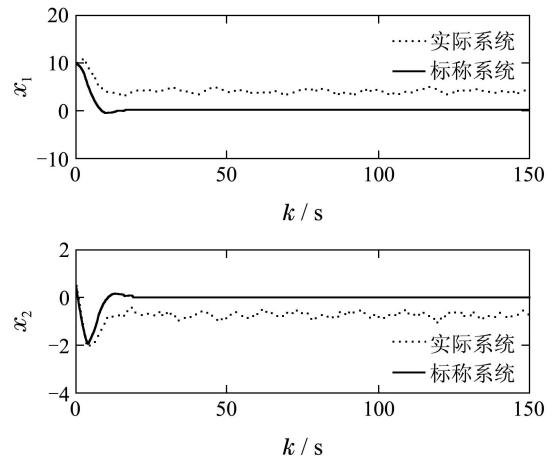


图 8 基于Tube不变集RMPC的系统状态时间响应

Fig. 8 The time response of system state for Tube-invariant set based RMPC

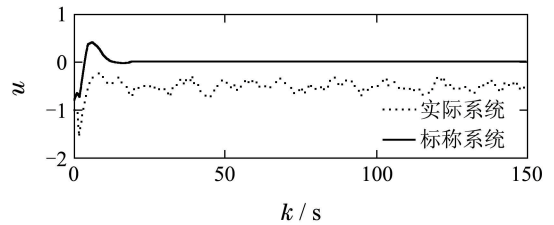


图 9 基于Tube不变集RMPC的控制输入曲线

Fig. 9 Control inputs for Tube-invariant set based RMPC

8 结论(Conclusions)

针对存在过程噪声设定边界与真实噪声边界失配时的有界干扰离散线性不确定系统, 采用ASMF在线估计系统噪声边界及实际不确定系统轨迹以标称系统最优轨迹为中心的状态Tube可达集序列, 给出了具有自适应噪声边界的Tube可达集鲁棒模型预测控制算法. 此方法提供了一种在被控对象过程噪声边界不

能精确得到的场合使用Tube-RMPC的控制策略,增大了Tube-RMPC控制策略的应用范围,为此类不确定对象的控制提供了新的思路.

参考文献(References):

- [1] MAYNE D Q, SERON M M, RAKOVIĆ S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances [J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 219 – 224.
- [2] LANGSON W, CHRYSOCHOOS I, RAKOVIĆ S V, et al. Robust model predictive control using tube [J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 125 – 133.
- [3] RAKOVIĆ S V, MAYNE D Q. A simple tube controller for efficient robust model predictive control of constrained linear discrete time systems subjective to bounded disturbances [C] // *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*. Prague: IFAC, 2005.
- [4] RAKOVIĆ S V, TEEL A R, MAYNE D Q, et al. Simple robust control invariant tubes for some classes of nonlinear discrete time systems [C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*. San Diego: IEEE, 2006: 6397 – 6402.
- [5] LIMON D, ALVARADO I, ALAMO T, et al. Robust tube-based on MPC for tracking of constrained linear system with additive disturbances [J]. *Journal of Process Control*, 2010, 20(3): 248 – 260.
- [6] RAKOVIĆ S V, KERRIGAN E C, KOURAMAS K I, et al. Invariant approximation of the minimal robust positively invariant set [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(3): 406 – 410.
- [7] 秦伟伟, 马建军, 郑志强, 等. 一类离散不确定系统的Tube不变集离线鲁棒模型预测控制 [J]. *信息与控制*, 2011, 40(3): 307 – 312. (QIN Weiwei, MA Jianjun, ZHENG Zhiqiang, et al. Off-line RMPC based on tube invariant set for a discrete-time uncertain system [J]. *Journal of Information and Control*, 2011, 40(3): 307 – 312.)
- [8] 宋大雷, 吴冲, 齐俊桐, 等. 基于MIT规则的自适应扩展集员估计方法 [J]. *自动化学报*, 2012, 38(11): 1847 – 1860. (SONG Dalei, WU chong, QI Juntong, et al. A MIT-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(11): 1847 – 1860.)
- [9] BRAVO J M, ALAMO T, CAMACHO E F. Robust MPC of constrained discrete-time nonlinear systems based on approximated reachable sets [J]. *Automatica*, 2006, 42(10): 1745 – 1751.
- [10] RAISSI T, RAMDANI N, CANDAU Y. Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations [J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1771 – 1777.
- [11] WAN Z Y, KOTHARE M V. An effective off-line formulation of robust constrained model predictive control using LMI [J]. *Automatica*, 2003, 39(5): 827 – 846.

作者简介:

王超 (1981–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为模型预测控制、精确制导与控制, E-mail: dieche1218@sina.com;

张胜修 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为组合导航与飞行器制导控制, E-mail: zsx1963@yahoo.com.cn;

秦伟伟 (1982–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为模型预测控制、精确制导与控制, E-mail: qww1982@163.com;

郑建飞 (1981–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为飞行器控制、仿真与决策, E-mail: zjf1981@163.com.