

DOI: 10.7641/CTA.2014.30436

# 控制方向未知的不确定系统预设性能自适应神经网络反演控制

耿宝亮<sup>†</sup>, 胡云安

(海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001)

**摘要:** 对一类控制方向未知的不确定严格反馈非线性系统的预设性能自适应神经网络反演控制问题进行了研究. 系统中含有时变非匹配不确定项且控制方向未知. 首先, 提出了一种新的误差转化方法, 放宽了对初始误差已知的限制; 随后, 利用径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络及跟踪微分器分别实现了对未知函数和虚拟控制量导数的逼近, 并综合运用Nussbaum函数和反演控制技术设计了控制器. 所设计的控制器能保证系统内所有信号有界且输出误差满足预设的瞬态和稳态性能要求. 最后的仿真研究验证了控制器设计方法的有效性.

**关键词:** 预设性能; 神经网络; Nussbaum函数; 反演

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Prescribed performance adaptive neural backstepping control for nonlinear system with uncertainties and unknown control directions

GENG Bao-liang<sup>†</sup>, HU Yun-an

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China)

**Abstract:** We investigate prescribed performance adaptive neural backstepping control for a class of strict-feedback nonlinear systems with time-varying uncertainties and unknown control directions. Firstly, a novel error transformation is proposed to eliminate the limitation that initial error must be known. Subsequently, radial basis function (RBF) neural networks and track differentiators are proposed to approximate unknown functions and derivatives of virtual controls respectively. At the same time, Nussbaum function and backstepping technique are combined to design the controller. The controller guarantees that all state variables are bounded and the prescribed transient and steady state error bounds are satisfied. Finally, the effectiveness of proposed scheme is validated by simulation research.

**Key words:** prescribed performance; neural networks; Nussbaum function; backstepping

### 1 引言(Introduction)

近年来, 科研工作者对不确定非线性系统的稳定控制问题进行了大量的研究, 最初系统的不确定性仅限于某些不确定的参数, 研究成果包括自适应反馈线性化<sup>[1]</sup>、自适应反演<sup>[2]</sup>、控制Lyapunov函数<sup>[3]</sup>等; 神经网络的出现使得更为复杂的不确定系统的稳定控制成为可能, 神经网络由于其逼近特性而被用于对未知函数进行逼近, 将神经网络与自适应技术相结合成为最近的一个研究热点<sup>[4-5]</sup>. 上述文献虽不要求控制增益精确已知, 但是却要求控制方向已知, Nussbaum增益法<sup>[6]</sup>的出现为解决控制方向未知的不确定非线性系统的稳定控制问题提供了一条途径, 将自适应技术与Nussbaum函数相结合也取得了一系列的研究成果<sup>[7-9]</sup>.

另外一个研究热点是系统的跟踪性能问题, 包括稳态性能和瞬态性能两个方面. 现有的控制方法大多

将注意力放在系统稳态性能的研究上, 即保证系统的跟踪误差收敛到一个有界的区域或渐近收敛到原点, 而对系统的瞬态性能(包括超调量和收敛速度)缺乏系统的分析和设计工具. Bechlioulis等<sup>[10]</sup>提出了预设性能的概念, 同时兼顾了系统的稳态和瞬态性能. 所谓预设性能是指在保证跟踪误差收敛到一个预先设定的任意小的区域的同时, 保证收敛速度及超调量满足预先设定的条件. 文献[10]针对一类单输入单输出反馈线性化系统进行了预设性能控制器的设计, 文献[11]将模型进一步推广到多输入多输出反馈线性化系统, 文献[12-14]将预设性能的概念与输出反馈相结合, 提出了一种预设性能输出反馈控制器的设计方法; 但上述方法并不能简单推广到严格反馈系统, 控制方向未知也使问题变得更为复杂, 对于控制方向未知的严格反馈非线性系统的预设性能控制问题还没有发现相关报道, 并且现有预设性能方法都要求初始跟踪

收稿日期: 2013-05-05; 录用日期: 2013-09-21.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: gbl404173223@163.com; Tel.: 86 13573508818.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174031).

误差已知,使预设性能控制的应用领域受到很大限制.

针对上述问题,本文提出一种新的误差转化方法,放宽了对初始误差已知的限制,并针对一类具有非匹配不确定项且控制方向未知的严格反馈非线性系统进行研究,综合运用backstepping技术、Nussbaum增益、自适应控制技术和跟踪微分器解决了此类系统的预设性能控制问题.

## 2 问题描述与预备知识(Problem description and preliminaries)

### 2.1 问题描述(Problem description)

考虑如下具有一般形式的严格反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x_1), \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \Delta_i(t, \bar{x}_i), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x) + g_n(x)u + \Delta_n(t, x), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别为系统的状态量、输入量和输出量;定义 $\bar{x}_i = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i]^T \in \mathbb{R}^i$ ,  $f_i(\cdot)$ 和 $g_i(\cdot)$ 为未知连续光滑函数,  $\Delta_i(t, \bar{x}_i)$ 为非匹配不确定项.

控制目标如下:

1) 输出误差 $e(t) = y(t) - y_r(t)$ 满足预先设定的瞬态和稳态性能;

2) 闭环系统中的所有信号有界.

对系统的基本假设<sup>[15]</sup>如下:

**假设 1** 存在一个紧集 $\Omega$ ,使得 $x \in \Omega$ .

**假设 2** 函数 $g_i(\bar{x}_i)$ 及其符号未知,且存在未知正常数 $\underline{g}_i$ 和 $\bar{g}_i$ ,使得 $0 < \underline{g}_i < |g_i(\bar{x}_i)| < \bar{g}_i, \forall x \in \Omega$ .

**注 1** 假设2表明光滑函数 $g_i(\bar{x}_i)$ 为严格正或严格负.

**假设 3** 存在未知正常数 $\chi_i$ 和已知非负函数 $B_i(\bar{x}_i)$ ,使得

$$|\Delta_i(t, \bar{x}_i)| \leq \chi_i B_i(\bar{x}_i), \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

**假设 4** 期望轨迹 $y_r(t)$ 及其高阶导数 $y_r^{(i)}(t)$ ( $i = 1, 2, \dots, n$ )均连续有界.

### 2.2 性能函数(Performance function)

**定义 1** 连续函数 $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为性能函数,满足:

- 1)  $\rho(t)$ 是正的且严格递减;
- 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\infty > 0$ .

为满足控制目标(2),文献[10]在假设 $e(0)$ 已知的情况下给出如下形式:

$$\begin{cases} -\delta\rho(t) < e(t) < \rho(t), & e(0) > 0, \\ -\rho(t) < e(t) < \delta\rho(t), & e(0) < 0. \end{cases}$$

显然,假设 $e(0)$ 已知具有很大的局限性,在很多系统中是不满足的,本文给出一种变参数约束方案:

$$-\underline{\alpha}(t)\rho(t) < e(t) < \bar{\alpha}(t)\rho(t), \quad (2)$$

其中光滑函数 $\underline{\alpha}(t)$ 和 $\bar{\alpha}(t)$ 满足下面的性质:

- 1)  $\underline{\alpha}(t) > 0, \bar{\alpha}(t) > 0$ 且严格递减;
- 2)  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \underline{\alpha}(t) = +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\alpha}(t) = C_1, C_1 \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \bar{\alpha}(t) = +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\alpha}(t) = C_2, C_2 \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$

**注 2** 上面的性质(2)表明,在初始误差 $e(0)$ 未知的情况下,  $-\underline{\alpha}(0)\rho(0) < e(0) < -\bar{\alpha}(0)\rho(0)$ 始终满足,因此也就放宽了对初始误差已知的限制,本文选取 $\underline{\alpha}(t)$ 和 $\bar{\alpha}(t)$ 为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\alpha}}(t) = -\lambda\underline{\alpha}(t) + \gamma, & \lambda, \gamma \in \mathbb{R}^+, \\ \dot{\bar{\alpha}}(t) = -\mu\bar{\alpha}(t) + \nu, & \mu, \nu \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\lambda, \gamma, \mu, \nu$ 为选取的正常数.

性能函数选取为

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty, \quad (4)$$

其中:  $\rho_0, \rho_\infty, l > 0$ 为预先设定的常数,  $\max\{\gamma/\lambda, \nu/\mu\} \cdot \rho_\infty$ 表示预先设定的稳态误差的上界,误差收敛速度及最大超调量可以通过系数 $\lambda, \mu, l$ 进行调节,上述过程可借助图1进行说明.

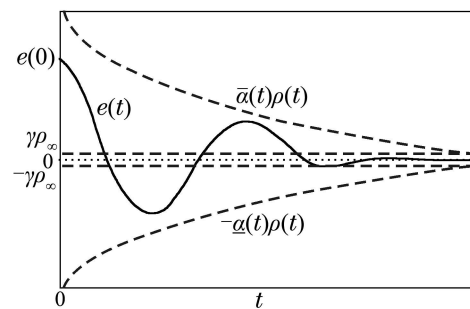


图1 预设性能

Fig. 1 Prescribed performance

### 2.3 误差转化(Error transformation)

对于系统中存在形如式(2)的不等式约束的情况,直接处理的难度很大,为将其转化为等式约束,定义误差转化函数 $S(\varepsilon)$ :

$$e(t) = \rho(t)S(\varepsilon), \quad (5)$$

其中:  $\varepsilon$ 为转化误差,  $S(\varepsilon)$ 满足下述性质:

- 1)  $S(\varepsilon)$ 光滑且严格递增;
- 2)  $-\underline{\alpha}(t) < S(\varepsilon) < \bar{\alpha}$ ;
- 3)  $\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} S(\varepsilon) = -\underline{\alpha}(t), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} S(\varepsilon) = \bar{\alpha}(t). \end{cases}$

**注 3** 结合性质(2)和 $\rho(t) > 0$ ,得到 $-\underline{\alpha}(t)\rho(t) <$

$S(\varepsilon)\rho(t) < \bar{\alpha}\rho(t)$ , 代入式(5)可得  $-\underline{\alpha}(t)\rho(t) < e(t) < \bar{\alpha}(t)\rho(t)$ , 式(2)所示的不等式约束得到满足. 本文选取误差转化函数(如图2所示)为

$$S(\varepsilon) = \frac{\bar{\alpha}(t)\exp(\varepsilon) - \underline{\alpha}(t)\exp(-\varepsilon)}{\exp(\varepsilon) + \exp(-\varepsilon)}.$$

由误差转化函数的性质可知,  $S(\varepsilon)$  可逆( $T = S^{-1}$ ), 因此转化误差  $\varepsilon$  可表示为

$$\varepsilon = T\left(\frac{e(t)}{\rho(t)}\right). \quad (6)$$

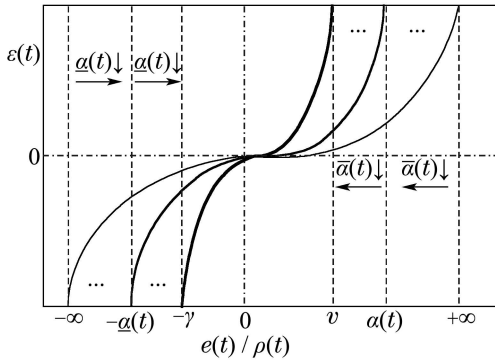


图 2 误差转化函数

Fig. 2 Error transformation function

**注 4** 如果  $\varepsilon \in l_\infty, \forall t \geq 0$ , 则不等式约束(2)满足, 进一步, 考虑到性能函数  $\rho(t)$  的衰减特性, 对应的跟踪误差将被限制在以下区域:

$$\Xi = \{e \in \mathbb{R} : -\gamma\rho_\infty/\lambda \leq e(t) \leq \nu\rho_\infty/\mu\}.$$

### 2.4 神经网络逼近(Neural approximation)

假设系统中的不确定函数可表示为  $f(\mathbf{x})$ , 其中:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . 对于自治型的不确定性, 径向基函数(RBF)神经网络的逼近引理如下:

**引理 1** 对于定义在紧子集  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  上的连续函数  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , 存在最优权值向量  $\theta_f^* \in \mathbb{R}^m$  和对应的高斯基函数  $\phi_f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 使得<sup>[16]</sup>

$$f(\mathbf{x}) = \theta_f^{*T} \phi_f(\mathbf{x}) + \omega_f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$

其中:  $m$  为神经元节点数;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  为神经网络的输入向量;  $\omega_f(\mathbf{x})$  为网络重构误差. 且存在未知常数  $W_f > 0$ , 使得

$$|\omega_f(\mathbf{x})| \leq W_f, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8)$$

### 3 鲁棒自适应控制器设计(Robust adaptive controller design)

为解决增益函数及其符号未知的问题, 引入 Nussbaum 增益法. Nussbaum 函数的基本定义如下:

**定义 2** 任意的连续函数  $N(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 称为 Nussbaum 函数, 如果满足<sup>[6]</sup>

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\zeta) d\zeta = \infty, \\ \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\zeta) d\zeta = -\infty.$$

显然,  $N(\zeta) = \zeta^2 \cos \zeta$  是一个典型的 Nussbaum 函数, 且具有如下的性质<sup>[17]</sup>:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \int_0^{2n\pi + \pi/2} N(\zeta) d\zeta = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi + 3\pi/2} \int_0^{2n\pi + 3\pi/2} N(\zeta) d\zeta = -\infty.$$

**引理 2** 设  $V(\cdot)$  和  $N(\cdot)$  为定义在  $[0, t_f]$  上的连续函数,  $V(t) \geq 0, \forall t \in [0, t_f]$ ; 如果  $N(\cdot)$  满足<sup>[17]</sup>

$$V(t) \leq c_0 + \int_0^t g(x(\tau)) N(\zeta) \dot{\zeta} e^{c_1(\tau-t)} d\tau + \int_0^t \dot{\zeta} e^{c_1(\tau-t)} d\tau,$$

式中:  $c_1, c_0 > 0$  为适当的常数,  $g(x(\tau))$  严格正或严格负, 则  $V(t)$  及  $\zeta(t)$  在  $[0, t_f]$  上有界.

**Step 1** 对于模型(1)中的第 1 个子系统, 选择虚拟状态量

$$z_1 = x_1 - y_r.$$

由式(6)可得转化误差  $\varepsilon_1$  为

$$\varepsilon_1 = T_1\left(\frac{z_1(t)}{\rho_1(t)}, \bar{\alpha}(t), \underline{\alpha}(t)\right). \quad (9)$$

式(9)两边对时间求导可得

$$\dot{\varepsilon}_1 = r_1(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x_1) - \dot{y}_r) + v_1, \quad (10)$$

其中:

$$v_1 = -\frac{\partial T_1}{\partial(z_1/\rho_1)} \frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1^2} z_1(t) + \frac{\partial T_1}{\partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} + \frac{\partial T_1}{\partial \underline{\alpha}} \dot{\underline{\alpha}}$$

为关于状态和参数的已知函数,  $r_1 = \frac{\partial T_1}{\partial(z_1/\rho_1)} \frac{1}{\rho_1} > 0$ .

选取 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{f1}^T \tilde{\theta}_{f1}, \quad (11)$$

其中:  $\tilde{\theta}_{f1} = \hat{\theta}_{f1} - \theta_{f1}^*$  为估计误差,  $\hat{\theta}_{f1}$  为对未知参数  $\theta_{f1}^*$  的估计值. 式(11)对时间求导并结合式(10)可以得到

$$\dot{V}_1 = \varepsilon_1(r_1(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x_1) - \dot{y}_r) + v_1) + \tilde{\theta}_{f1}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f1}. \quad (12)$$

选择虚拟控制量  $x_{2d}$  为

$$x_{2d} = N(\zeta_1)\eta_1, \quad (13)$$

其中  $\dot{\zeta}_1 = r_1 \varepsilon_1 \eta_1$ ,  $\eta_1$  为待设计的光滑函数. 将式(13)代入式(12)得

$$\dot{V}_1 = \varepsilon_1(r_1(f_1(x_1) + \Delta_1(t, x_1) - \dot{y}_r) + v_1) - \varepsilon_1 r_1 \eta_1 + g_1(x_1) N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \tilde{\theta}_{f1}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f1} + \varepsilon_1 r_1 g_1(x_1) z_2,$$

其中 $z_2 = x_2 - x_{2d}$ 为虚拟状态量.

结合式(7)–(8)以及假设3得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & \varepsilon_1(v_1 + r_1\phi_{f1}^T\hat{\theta}_{f1} - r_1\dot{y}_r) + |\varepsilon_1 r_1|W_{f1} + \\ & |\varepsilon_1 r_1|\chi_1 B_1(x_1) - \varepsilon_1 r_1 \eta_1 + |\varepsilon_1||r_1 g_1||z_2| + \\ & g_1(x_1)N(\zeta_1)\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \tilde{\theta}_{f1}^T(\dot{\theta}_{f1} - \varepsilon_1 r_1 \phi_{f1}^T), \end{aligned} \quad (14)$$

选择

$$\eta_1 = \frac{k_1}{2r_1}\varepsilon_1 + \frac{v_1}{r_1} + \phi_{f1}^T\hat{\theta}_{f1} - \dot{y}_r + n_{f1}\varepsilon_1 r_1 + n_{\phi_1}\varepsilon_1 r_1 B_1^2(x_1) + n_{g_1}\varepsilon_1 r_1, \quad (15)$$

$$\dot{\theta}_{f1} = \varepsilon_1 r_1 \phi_{f1}^T - \sigma_1 \hat{\theta}_{f1}, \quad (16)$$

其中 $k_1, n_{f1}, n_{\phi_1}, n_{g_1}, \sigma_1 > 0$ .

又有

$$\tilde{\theta}_{f1}^T \hat{\theta}_{f1} = \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{f1}^T \tilde{\theta}_{f1} + \frac{1}{2}\hat{\theta}_{f1}^T \hat{\theta}_{f1} - \frac{1}{2}\theta_{f1}^{*T} \theta_{f1}^*, \quad (17)$$

将式(15)–(17)代入式(14)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{k_1}{2}\varepsilon_1^2 - \frac{\sigma_1}{2}\tilde{\theta}_{f1}^T \tilde{\theta}_{f1} + \frac{\sigma_1}{2}\theta_{f1}^{*T} \theta_{f1}^* + \frac{W_{f1}^2}{4n_{f1}} + \\ & \frac{\chi_1^2}{4n_{\phi_1}} + \frac{|g_1|^2|z_2|^2}{4n_{g_1}} + g_1(x_1)N(\zeta_1)\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1. \end{aligned}$$

如果 $|z_2(t)| \leq W_{z_2}, W_{z_2} > 0$ 为未知常数, 结合假设2, 进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{k_1}{2}\varepsilon_1^2 - \frac{\sigma_1}{2}\tilde{\theta}_{f1}^T \tilde{\theta}_{f1} + \frac{\sigma_1}{2}\theta_{f1}^{*T} \theta_{f1}^* + \\ & \frac{W_{f1}^2}{4n_{f1}} + \frac{\chi_1^2}{4n_{\phi_1}} + \frac{\bar{g}_1^2 W_{z_2}^2}{4n_{g_1}} + \\ & g_1(x_1)N(\zeta_1)\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 \leq \\ & -p_1 V + q_1 + g_1(x_1)N(\zeta_1)\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1, \end{aligned} \quad (18)$$

其中: 常数 $p_1, q_1 > 0$ , 且定义为

$$\begin{aligned} p_1 &= \min\{k_1, \sigma_1\}, \\ q_1 &= \frac{\sigma_1}{2}\theta_{f1}^{*T} \theta_{f1}^* + \frac{W_{f1}^2}{4n_{f1}} + \frac{\chi_1^2}{4n_{\phi_1}} + \frac{\bar{g}_1^2 W_{z_2}^2}{4n_{g_1}}. \end{aligned}$$

式(18)两侧同时乘以 $e^{p_1 t}$ , 得到

$$\begin{aligned} d(V_1 e^{p_1 t}) \leq & \\ q_1 e^{p_1 t} + g_1(x_1)N(\zeta_1)\dot{\zeta}_1 e^{p_1 t} + \dot{\zeta}_1 e^{p_1 t}, \end{aligned} \quad (19)$$

在 $[0, t)$ 上对式(19)积分, 得到

$$\begin{aligned} V_1 \leq & \frac{q_1}{p_1} + V_1(0) + \int_0^t g_1(x_1)N(\zeta_1)\dot{\zeta}_1 e^{p_1(\tau-t)} d\tau + \\ & \int_0^t \dot{\zeta}_1 e^{p_1(\tau-t)} d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

由引理2可得,  $\zeta_1, V_1$ 有界, 进一步得到 $\varepsilon_1$ 和 $\tilde{\theta}_{f1}$ 有界. 因此, 问题转化为 $z_2(t)$ 的有界问题.

**Step 2** 对于模型(1)中的第2个子系统, 虚拟状态量

$$z_2 = x_2 - x_{2d}, \quad (21)$$

转化误差

$$\varepsilon_2 = T_2 \frac{z_2(t)}{\rho_2(t)}. \quad (22)$$

式(22)两边对时间求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_2 &= r_2(f_2(\bar{x}_2) + g_2(\bar{x}_2)x_3 + \\ & \Delta_2(t, \bar{x}_2) - \dot{x}_{2d}) + v_2, \end{aligned} \quad (23)$$

其中:  $r_2 = \frac{\partial T_2}{\partial(e_2/\rho_2)} \frac{1}{\rho_2} > 0, v_2 = -\frac{\partial T_2}{\partial(e_2/\rho_2)} \frac{\dot{\rho}_2}{\rho_2^2} \cdot z_2(t)$ 为关于状态的已知函数.

由于 $\dot{x}_{2d}$ 非常难以计算, 本文采用二阶非线性跟踪微分器对其进行光滑逼近. 对于跟踪微分器的性能, 作如下假设<sup>[18]</sup>:

**假设 5** 合理设计跟踪微分器, 可以使得跟踪微分器的输出 $\hat{x}_{2d}$ 和其输入信号 $x_{2d}$ 的微分 $\dot{x}_{2d}$ 之间的误差一致有界, 即存在未知常数 $\varepsilon_{x_{2d}} > 0$ , 使得 $|x_{2d} - \hat{x}_{2d}| \leq W_{x_{2d}}$ .

**注 5** 假设5同样适用于其他子系统的设计过程, 即存在常数 $W_{x_{i,d}} > 0$ , 使得 $|x_{i,d} - \hat{x}_{i,d}| \leq W_{x_{i,d}}, i=3, 4, \dots, n$ .

选取Lyapunov函数为

$$V_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2}, \quad (24)$$

其中:  $\tilde{\theta}_{f2} = \hat{\theta}_{f2} - \theta_{f2}^*$ 为估计误差,  $\hat{\theta}_{f2}$ 为对未知参数 $\theta_{f2}^*$ 的估计值. 式(24)对时间求导并结合式(23)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \varepsilon_2[r_2(f_2(\bar{x}_2) + g_2(\bar{x}_2)x_3 + \\ & \Delta_2(t, \bar{x}_2) - \dot{x}_{2d}) + v_2] + \tilde{\theta}_{f2}^T \dot{\theta}_{f2}. \end{aligned} \quad (25)$$

选择虚拟控制量 $x_{3d}$ 为

$$x_{3d} = N(\zeta_2)\eta_2, \quad (26)$$

其中:  $\dot{\zeta}_2 = r_2 \varepsilon_2 \eta_2, \eta_2$ 为待设计的光滑函数.

将式(26)代入式(25)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \varepsilon_2(r_2(f_2(\bar{x}_2) + \Delta_2(t, \bar{x}_2) - \dot{x}_{2d}) + v_2) - \\ & \varepsilon_2 r_2 \eta_2 + g_2(\bar{x}_2)N(\zeta_2)\dot{\zeta}_2 + \dot{\zeta}_2 + \tilde{\theta}_{f2}^T \dot{\theta}_{f2} + \\ & \varepsilon_2 r_2 g_2(\bar{x}_2)z_3 - \varepsilon_2 r_2(\dot{x}_{2d} - \hat{x}_{2d}), \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $z_3 = x_3 - x_{3d}$ 为虚拟状态量. 结合式(7)–(8)以及假设3和假设5得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \varepsilon_2(v_2 + r_2\phi_{f2}^T\hat{\theta}_{f2} - r_2\dot{x}_{2d}) + |\varepsilon_2 r_2|W_{f2} + \\ & |\varepsilon_2 r_2|\chi_2 B_2(\bar{x}_2) + g_2(\bar{x}_2)N(\zeta_2)\dot{\zeta}_2 + \dot{\zeta}_2 + \\ & \tilde{\theta}_{f2}^T(\dot{\theta}_{f2} - \varepsilon_2 r_2 \phi_{f2}^T) + |\varepsilon_2||r_2 g_2||z_3| - \\ & \varepsilon_2 r_2 \eta_2 + |\varepsilon_2 r_2|W_{x_{2d}}. \end{aligned} \quad (28)$$

选择

$$\eta_2 = \frac{k_2}{2r_2}\varepsilon_2 + \frac{v_2}{r_2} + \phi_{f_2}^T \hat{\theta}_{f_2} - \hat{x}_{2d} + n_{f_2}\varepsilon_2 r_2 + n_{\phi_2}\varepsilon_2 r_2 B_2^2(\bar{x}_2) + n_{g_2}\varepsilon_2 r_2 + n_{x_{2d}}\varepsilon_2 r_2, \quad (29)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{f_2} = \varepsilon_2 r_2 \phi_{f_2}^T - \sigma_2 \hat{\theta}_{f_2}, \quad (30)$$

其中:  $k_2, n_{f_2}, n_{\phi_2}, n_{g_2}, n_{x_{2d}}, \sigma_2 > 0$ . 将式(29)代入式(28)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{k_2}{2}\varepsilon_2^2 - \frac{\sigma_2}{2}\tilde{\theta}_{f_2}^T \tilde{\theta}_{f_2} + \frac{\sigma_2}{2}\theta_{f_2}^{*T} \theta_{f_2}^* + \frac{W_{f_1}^2}{4n_{f_1}} + \\ & \frac{\chi_2^2}{4n_{\phi_1}} + \frac{W_{x_{2d}}^2}{4n_{x_{2d}}} + \frac{|g_1|^2 |z_2|^2}{4n_{g_1}} + \\ & g_1(x_1)N(\zeta_1)\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1, \end{aligned}$$

接下来的步骤与Step1中对应的过程类似, 这里不再赘述, 最终得到

$$\begin{aligned} V_2 \leq & \frac{q_2}{p_2} + V_2(0) + \int_0^t g_2(\bar{x}_2)N(\zeta_2)\dot{\zeta}_2 e^{p_2(\tau-t)} d\tau + \\ & \int_0^t \dot{\zeta}_2 e^{p_2(\tau-t)} d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

结合引理2可得,  $\zeta_2, V_2$  有界, 进一步得到  $\varepsilon_2$  和  $\tilde{\theta}_{f_2}$  有界.

采用递归的思想, 得到

**Step n** 对于模型(1)中的第  $n$  个子系统, 选择虚拟状态量

$$z_n = x_n - x_{n,d}, \quad (32)$$

误差转化方程为

$$\varepsilon_n = T_n \frac{z_n(t)}{\rho_n(t)}, \quad (33)$$

选取Lyapunov函数为

$$V_n = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{f,n}^T \tilde{\theta}_{f,n}, \quad (34)$$

其中:  $\tilde{\theta}_{f,n} = \hat{\theta}_{f,n} - \theta_{f,n}^*$  为估计误差,  $\hat{\theta}_{f,n}$  为对未知参数  $\theta_{f,n}^*$  的估计值.

控制量  $u$  选择为

$$u = N(\zeta_n)\eta_n, \quad (35)$$

其中:  $\dot{\zeta}_n = r_n \varepsilon_n \eta_n$ ,  $\eta_n$  为待设计的光滑函数.

选择

$$\begin{aligned} \eta_n = & \frac{k_n}{2r_n}\varepsilon_n + \frac{v_n}{r_n} + \phi_{f,n}^T \hat{\theta}_{f,n} - \hat{x}_{n,d} + n_{f,n}\varepsilon_n r_n + \\ & n_{\phi,n}\varepsilon_n r_n B_n^2(\mathbf{x}) + n_{g,n}\varepsilon_n r_n r_{g,n} + n_{x_{n,d}}\varepsilon_n r_n, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{f,n} = \varepsilon_n r_n \phi_{f,n}^T - \sigma_n \hat{\theta}_{f,n}. \quad (37)$$

最终得到  $\zeta_n, V_n$  有界, 进一步得到  $\varepsilon_n$  和  $\tilde{\theta}_{f,n}$  有界.

**定理 1** 对于式(1)所描述的控制方向未知的不确定严格反馈非线性系统, 以假设1-5为前提, 采用误差转化方程(33), 设计控制器(35)-(36)和自适应律(37), 可得到如下结论:

1) 输出信号  $y(t)$  跟踪期望信号  $y_r(t)$  的同时, 闭环

系统中的所有信号有界;

2) 输出误差  $e(t) = y(t) - y_r(t)$  满足预先设定的瞬态和稳态性能.

#### 4 仿真研究(Simulation studies)

平面上的双连杆机械手具有强非线性, 其动力学方程可以写成如下形式:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \Delta(q, \dot{q}, t) = u,$$

其中: 二维向量  $q = (q_1, q_2)^T$  表示关节角, 二维力矩向量  $u = (u_1, u_2)^T$  为机械手关节处的执行器输入,

$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}$  为机械手惯性矩阵,  $C(q) =$

$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$  为向心力和科氏力矩阵,  $G(q) =$

$[G_1 \ G_2]^T$  为重力矩,  $\Delta(q, \dot{q}, t)$  为非匹配不确定项.

$$\begin{aligned} M_{11} = & I_{z_1} + I_{z_2} + m_1 r_1^2 + m_2(l_1^2 + r_2^2) + \\ & 2m_2 l_1 r_2 c_2, \end{aligned}$$

$$M_{12} = I_{z_2} + m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 c_2,$$

$$M_{22} = I_{z_2} + m_2 r_2^2,$$

$$C_{11} = -m_2 l_1 r_2 s_2 \dot{q}_2 + k_{m1}, \quad C_{21} = m_2 l_1 r_2 s_2 \dot{q}_1,$$

$$C_{12} = -m_2 l_1 r_2 s_2 \dot{q}_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad C_{22} = k_{m2},$$

$$G_1 = m_1 g r_1 c_1 + m_2 g (l_1 c_1 + r_2 c_{12}),$$

$$G_2 = m_2 g r_2 c_{12},$$

$$c_1 = \cos(q_1), \quad c_2 = \cos(q_2 - \frac{\pi}{2}),$$

$$c_{12} = \cos(q_1 + q_2 - \frac{\pi}{2}),$$

$$s_2 = \sin(q_2 - \frac{\pi}{2}), \quad \Delta(q, \dot{q}, t) = [q_1 \sin t \ 0]^T.$$

由于上述模型是多输入多输出系统, 令  $q_2 = \dot{q}_2 = 0$ , 将其转化为单输入单输出系统, 参考信号设置为  $q_{r1}(t) = \pi/2 + \pi/6 \cos(t)$ .

具体参数设置为

质量/kg:  $m_1 = 3.2, m_2 = 2$ .

长度/m:  $l_1 = 0.5, l_2 = 0.4, r_1 = l_1/2, r_2 = l_2/2$ .

转动惯量/(kg · m<sup>2</sup>):  $I_{z_1} = 0.96, I_{z_2} = 0.81$ .

摩擦力系数/(N · m):  $k_{m1} = 1, k_{m2} = 1$ .

性能函数参数:  $l = 0.2, \rho_0 = 1, \rho_\infty = 5 \times 10^{-3}$ .

初值:  $[q_1(0) \ \dot{q}_1(0)]^T = [80\pi/180 \ 0]^T$ .

控制器参数:  $k_1 = 1.0, k_2 = 5.0, n_f = 1.0,$

$n_\phi = 3.0, n_g = 0.6, n_{x_{2d}} = 5.0$ .

引入二阶非线性跟踪微分器对  $x_{2d}$  的导数进行光滑逼近, 其数学表达式如下<sup>[19]</sup>:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -R \text{sat}(x_1 - u(t) + \frac{x_2 |x_2|}{2R}, \delta),$$

其中

$$\text{sat}(B, \delta) = \begin{cases} \text{sgn } B, & |B| > \delta, \\ B/\delta, & |B| \leq \delta, \delta > 0. \end{cases}$$

设计跟踪微分器的参数为  $R = 3.0, \delta = 0.1$ .

用一个RBF神经网络对系统中的不确定函数进行逼近, 选取25个节点, 权值向量的初值设为零向量, 仿真结果如图3-6所示.

图3为跟踪误差随时间的变化情况(左图为整个时间区间的仿真情况, 右图为最后10s的仿真情况), 图中的点划线表示预先设定的上界和下界, 其包围的区域便为跟踪误差的限制区域, 可以看出, 跟踪误差始终没有超出这个预设的区域, 系统响应速度快, 超调量小, 稳态误差最终控制在  $5 \times 10^{-3}$  以内, 因此满足文中所提到的预设性能的要求. 图4为RBF神经网络的权值变化情况, 可以看出25维的权值向量是收敛的, 图5为RBF神经网络对未知函数的逼近情况, 可以看出不论是逼近速度还是逼近精度都达到了很好的效果, 图6为控制量  $u$  的变化情况, 控制曲线连续平滑, 而且幅值较小, 易于工程实现. 另外, 在整个仿真过程中, 系统的所有信号有界(限于篇幅, 没有一一列出), 充分验证了定理1的正确性.

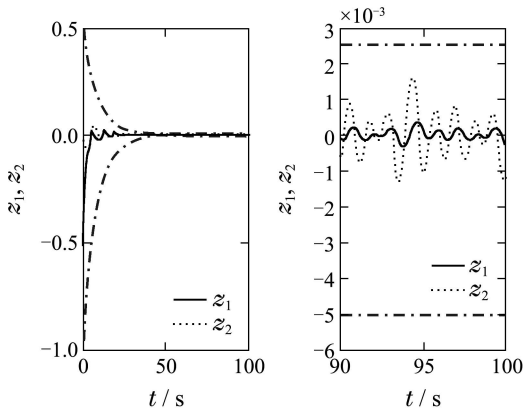


图3 跟踪误差  $z_1, z_2$  随时间变化情况  
Fig. 3 Tracking errors  $z_1$  and  $z_2$

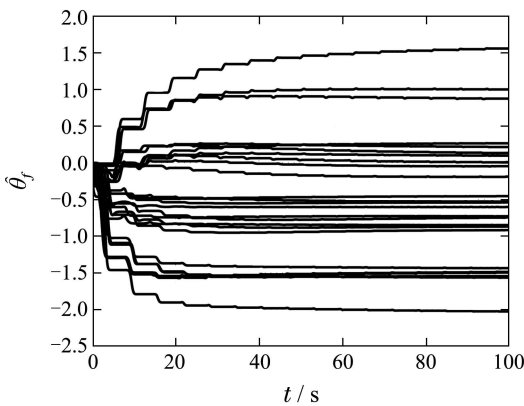


图4 RBF神经网络权值  $\hat{\theta}_f$  随时间的变化情况  
Fig. 4 Weight vector  $\hat{\theta}_f$  of the RBF neural networks

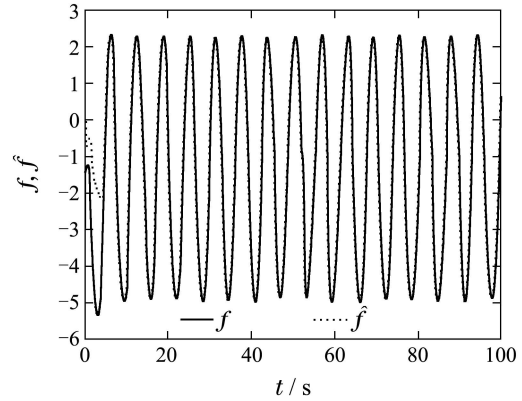


图5 未知函数  $f$  及其估计值  $\hat{f}$  的变化情况  
Fig. 5 Estimation of unknown function  $f$

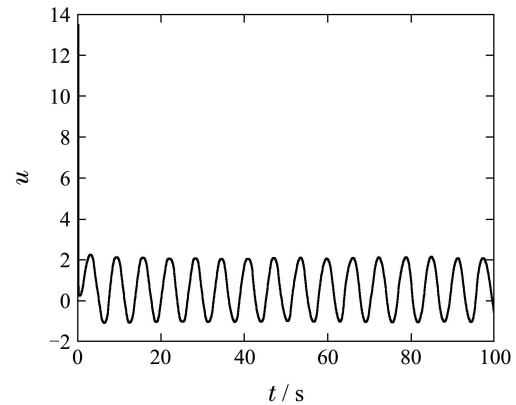


图6 控制量  $u$  随时间的变化情况  
Fig. 6 The required control input

### 5 结论(Conclusions)

本文针对一类含非匹配不确定项及控制方向未知的严格反馈系统进行研究, 提出了一种新的误差转化方法, 将预设性能这种新型控制方式的应用对象进一步拓宽, 并将其与backstepping技术、Nussbaum增益、自适应控制技术和跟踪微分器相结合, 完成了控制器的设计, 解决了此类系统的预设性能控制问题.

### 参考文献(References):

- [1] KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MARINO R. An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control [J]. *Automatica*, 1991, 27(2): 247 – 255.
- [2] KOJIC A, ANNASWAMY A M. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems with a triangular structure [J]. *Automatica*, 2002, 38(1): 115 – 123.
- [3] LIN Y, SONTAG E D. Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs [J]. *Control Theory and Advanced Technology*, 1995, 10(4): 1981 – 2004.
- [4] CHEN F C, KHALIL H K. Adaptive control of nonlinear systems using neural networks [J]. *International Journal of Control*, 1992, 55(6): 1299 – 1317.
- [5] ROVITHAKIS G A. Stable adaptive neuro-control design via Lyapunov function derivative estimation [J]. *Automatica*, 2001, 37(8): 1213 – 1221.

- [6] NUSSBAUM R D. Some remarks on the conjecture in parameter adaptive control [J]. *Systems and Control Letters*, 1983, 3(5): 242 – 246.
- [7] YE X. Asymptotic regulation of time-varying uncertain nonlinear systems with unknown control directions [J]. *Automatica*, 1999, 35(5): 929 – 935.
- [8] GE S S, WANG J. Robust adaptive neural control for a class of perturbed strict feedback nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2002, 13(6): 1409 – 1419.
- [9] GE S S, HONG F, LEE T H. Adaptive neural control of nonlinear time-delay systems with unknown virtual control coefficients [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2004, 34(1): 499 – 516.
- [10] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. Prescribed performance adaptive control of SISO feedback linearizable systems with disturbances [C] // *The 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Ajaccio, France: IEEE, 2008: 1035 – 1040.
- [11] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2090 – 2099.
- [12] KOSTARIGKA A K, ROVITHAKIS G A. Prescribed performance output feedback control: an approximate passivation approach [C] // *The 18th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Marrakech, Morocco: IEEE, 2010: 11 – 16.
- [13] KOSTARIGKA A K, ROVITHAKIS G A. Prescribed performance output feedback/observer-free robust adaptive control of uncertain systems using neural networks [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2011, 41(6): 1483 – 1494.
- [14] KOSTARIGKA A K, ROVITHAKIS G A. Adaptive dynamic output feedback neural network control of uncertain MIMO nonlinear systems with prescribed performance [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(1): 138 – 149.
- [15] 胡云安, 晋玉强, 李海燕. 非线性系统鲁棒自适应反演控制 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2010.  
(HU Yun'an, JIN Yuqiang, LI Haiyan. *Robustness of Adaptive Backstepping Control for Nonlinear Systems* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010.)
- [16] PARK J, SANDBERG I W. Universal approximation using radial basis function networks [J]. *Neural Computation*, 1991, 3(2): 246 – 257.
- [17] XU J X, YAN R. Iterative learning control design without a priori knowledge of the control direction [J]. *Automatica*, 2004, 40(11): 1802 – 1809.
- [18] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪—微分器 [J]. *系统科学与数学*, 1994, 14(2): 177 – 183.  
(HAN Jingqing, WANG Wei. Nonlinear tracking differentiator [J]. *System Science and Mathematics*, 1994, 14(2): 177 – 183.)
- [19] 李静, 胡云安, 耿宝亮. 控制方向未知的二阶时变非线性系统自适应迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(6): 730 – 740.  
(LI Jing, HU Yun'an, GENG Baoliang. Adaptive iterative learning-control for second-order time-varying nonlinear system with unknown control directions [J]. *Control Theory and Applications*, 2012, 29(6): 730 – 740.)

#### 作者简介:

**耿宝亮** (1984–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为智能控制、自适应控制等, E-mail: gbl404173223@163.com;

**胡云安** (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性控制、智能控制与智能系统等, E-mail: hya507@sina.com.