

# 噪声环境下精英克隆选择算法的收敛性分析

洪露<sup>1†</sup>, 龚成龙<sup>1</sup>, 王经卓<sup>1</sup>, 纪志成<sup>2</sup>

(1. 淮海工学院 电子工程学院, 江苏 连云港 222005; 2. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 利用随机过程相关理论对加性噪声环境下精英策略克隆选择算法(ECSA)的全局收敛性进行了研究. 首先采用有序对的状态表示方法构造精英克隆选择算法在噪声环境中的Markov链; 然后将算法种群中最佳亲和度函数的进化过程转化为下鞅, 利用鞅理论证明了种群最佳亲和度函数的全局收敛性; 最后通过分析加性噪声环境下精英克隆选择算法的状态转移概率的特性, 证明了精英克隆选择算法在加性噪声环境下最终能以概率1收敛到全局最优解.

**关键词:** 克隆选择算法; 精英策略; 加性噪声; 鞅理论; 转移概率

**中图分类号:** TP18      **文献标识码:** A

## Convergence analysis of elitist clonal selection algorithm in noisy environment

HONG Lu<sup>1†</sup>, GONG Cheng-long<sup>1</sup>, WANG Jing-zhuo<sup>1</sup>, JI Zhi-cheng<sup>2</sup>

(1. School of Electronic Engineering, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang Jiangsu 222005, China;

2. Institute of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

**Abstract:** The global convergence of elitist clonal selection algorithm (ECSA) in additive noisy environment is studied by using stochastic process. The Markov chain that models ECSA in noisy environment is constructed by a new state representation method named ordered pair. The evolutionary sequence best fitness functions is described as a submartingale, and the global convergence of the best fitness functions is derived based on martingale theory. The transition probability characteristics of the clonal selection algorithm in additive noisy environment are analyzed; by this property we conclude that ECSA is eventually globally convergent with probability 1 in additive noisy environment.

**Key words:** clonal selection algorithm; elitist strategy; additive noisy; martingale theory; transition probability

### 1 引言(Introduction)

克隆选择算法作为一种受生物免疫学中克隆选择机制启发而建立的用于解决各种复杂问题的一类人工免疫算法, 已经在组合优化、机器人控制、网络入侵检测和故障诊断等许多领域中已得到了广泛应用, 目前已成为继人工神经网络、模糊系统和进化计算后又一新的智能计算方向<sup>[1-2]</sup>. 近年来克隆选择算法的研究主要还是集中在算法的工程应用和改进方面, 在算法发展和成熟的另一关键方面——算法数学基础理论方面, 研究成果还较为少见. 因此, 克隆选择算法相关的基础理论研究远落后于算法的应用发展, 这种一般数学理论的缺失正限制着克隆选择算法的进一步推广、发展和应用<sup>[3]</sup>. 收敛性是克隆选择算法理论研究中的一个基本核心问题, 决定着算法的可行性, 是评价算法的一个重要指标. 一种新的算法能否有效地解决一类问题, 首先必须从算法收敛性上进行分析, 如

果算法不能收敛或不能在可以接受的计算时间内收敛, 这个算法是没有实用价值的<sup>[4-5]</sup>.

虽然近年来有关克隆选择算法的渐近行为分析受到越来越多研究者的注意, Villalobos-Arias, Vincenzo Cutello, Mohammed Abo-Zahhad等人采用不同的方法对特定条件下各种不同实现的克隆选择算法的收敛性做了一定研究, 并取得了部分的收敛性理论成果, 为克隆选择算法的理论研究做出了很大的贡献<sup>[6-9]</sup>, 但这些成果都是在非噪声环境下取得的, 没有考虑到噪声的存在. 而且, 这些不同实现的克隆选择算法都有一个共同的特点, 算法中都采用了精英保持策略, 可以将它们归于精英克隆选择算法这一大类. 在实际问题求解过程中, 由于环境的复杂性而造成许多不确定的因素, 如设备本身问题、训练样本的误差、人为因素等都可导致问题处于噪声的求解环境下, 由于噪声的存在, 个体亲和度函数值中包括了随机噪

声部分,并不是个体亲和度值真实的反映,即最佳亲和度函数值对应的个体并不一定是最优解,从而影响算法问题求解的有效性和精确性.所以,研究噪声环境下的克隆选择算法的全局收敛性有着重要的理论意义和实际应用价值.

本文利用随机过程相关理论针对加性噪声环境下一类精英保持策略克隆选择算法(elitist clonal selection algorithm, ECSA)的全局收敛性进行了研究(本文仅讨论加性噪声).不同于传统的非噪声环境下研究方法,首先采用一种新的状态表示方法构造精英克隆选择算法在噪声环境中的Markov链;然后再利用下鞅的收敛理论证明算法种群中最佳亲和度函数的全局收敛性;最后通过分析噪声环境下精英克隆选择算法的状态转移矩阵的特性,证明了该类算法在噪声环境下最终能以概率1收敛到全局最优解.

## 2 精英保持策略克隆选择算法(Elitist strategy clonal selection algorithm)

自从Bernet于1959年提出克隆选择学说后,免疫学产生了飞跃性的发展,克隆选择理论已经成为免疫学界普遍接受的基本理论,近几十年的科学发现和实际应用充分证实了该理论的正确性.其中De Castro于2001年提出的CLONALG算法是近年来最具代表性的一种克隆选择算法<sup>[10]</sup>,该算法已在优化控制、数据处理、入侵检测和故障诊断等许多领域中已得到了广泛应用.尽管该算法存在着对特定的问题优化效果不理想的现象,但它的出现标志着从免疫系统自身机理出发开发人工免疫算法解决优化问题的开始.算法的基本思想是将待求目标函数视为抗原,用抗体表示函数优化解的可能模式,那么抗体和抗原的亲和度就对应着可行解的函数值.只有那些识别抗原的抗体才分裂扩增,相对那些不能识别抗原的抗体而被选择,被选择的抗体受制于亲和度成熟过程.克隆选择算法本身所具备的这些特性,决定了算法对于各种优化问题的求解有着巨大的潜力,可以预见克隆选择算法将会在优化领域中得到更为广泛的应用.之后研究人员从不同的角度借鉴克隆选择机理,相继提出了不同的克隆选择算法,而大部分算法都是基于精英保持策略改进而来的<sup>[11-14]</sup>.为了说明问题方便,本文给出这一类精英保持策略克隆选择算法的基本步骤.

**Step 1**  $t = 0$ , 随机生成一个初始抗体集合  $\vec{X}(0) = \{X_1(0), X_2(0), \dots, X_N(0)\}$ , 抗体采用长度为  $L$  的二进制编码, 抗体个数为  $N$ ;

**Step 2** 计算抗体集  $\vec{X}(t)$  中所有抗体的亲和度  $f(X_i(t))$ ;

**Step 3** 在  $\vec{X}(t)$  中选择亲和度最高的抗体  $X^*(t)$ , 直接进入下一代;

**Step 4** 对  $\vec{X}(t)$  剩余的  $N - 1$  个抗体进行克隆操

作  $T_C$ 、变异  $T_M$  操作产生新的抗体集  $\vec{X}(t + 1)$ ;

**Step 5** 免疫更新操作  $T_R$ . 随即产生  $d$  个新抗体, 替代  $\vec{X}(t + 1)$  中  $d$  个亲和度最低的个体;

**Step 6**  $t = t + 1$ , 重复执行 Step 2-6, 直到满足结束条件为止.

精英克隆选择算法的基本流程如图1所示.

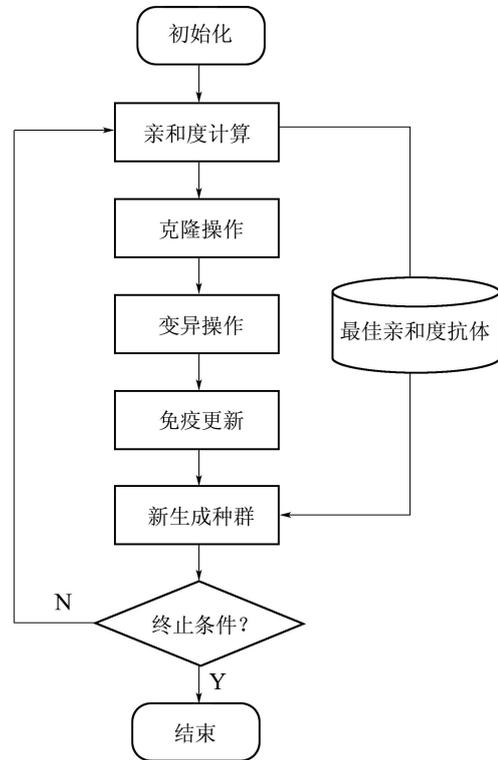


图1 ECSA流程框图

Fig. 1 The flow chart of ECSA

## 3 加性噪声环境下ECSA的收敛性分析 (Convergence analysis of ECSA under additive noise environments)

### 3.1 Markov链构成(Framework of Markov chain)

运用Markov链理论来分析ECSA这一类算法在噪声环境下的全局收敛性,首先要构造算法的在噪声环境中的Markov链,非噪声环境下传统的Markov链的状态空间  $S$  仅由所有的抗体组成,不足以刻画噪声环境中算法的搜索过程.因为当算法处于噪声环境下时,其抗体亲和度函数值中包含随机噪声,可用下式来表示:

$$F(X_i) = f(X_i) + \delta_i(P_i), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1)$$

其中:  $F(X_i)$  为噪声干扰后抗体  $X_i$  的亲和度值,  $\delta_i(P_i)$  为以概率  $P_i$  加在抗体  $X_i$  上的随机噪声值,为研究方便,假设  $\delta_i(P_i)$  满足独立同分布且为有限值.算法搜索过程中由于亲和度高而被保留下来的个体,不一定是真正全局最优解.通过对算法流程的分析,算法的进化过程不但取决于抗体本身,还取决于式(1)中定

义的随机噪声值. 我们采用一种既包括抗体, 又包括随机噪声值有序对的方法, 来构造噪声环境下ECSA的Markov链, 并记为 $\{Z_k\}$ . 该有序对定义如下所示:

$$(X_i, \delta_i(p_i)), 1 \leq i \leq N. \quad (2)$$

采用这种有序对的方法, 抗体群中 $N$ 个有序对组成了Markov链 $\{Z_k\}$ 的一个状态. 用 $\Gamma$ 表示Markov链 $\{Z_k\}$ 的状态空间, 本文将在该噪声环境的状态空间 $\Gamma$ 里讨论ECSA算法的全局收敛性.

### 3.2 最佳亲和度函数收敛性分析(Convergence analysis of best affinity functions)

尽管有不少作者研究了有关克隆选择算法的收敛性, 但大多都是在一些特殊情况下利用Markov链的状态转移的遍历性等一些性质进行收敛性研究, 这些算法的收敛性结果基本上均属于依概率收敛, 它们属于弱大数律范畴, 本文运用下鞅理论对噪声环境下ECSA算法种群最佳亲和度函数的Markov链进行几乎处处强收敛性分析.

首先给出ECSA算法在噪声环境下最佳亲和度函数几乎处处强收敛和下鞅的定义.

**定义 1**<sup>[15]</sup> 设噪声环境下亲和度全局最优抗体解集

$$M^* = \{X^*; \forall X_i \in S, F(X^*) \geq F(X_i)\};$$

$F^*(\vec{X}(t))$ 为抗体集 $\vec{X}(t)$ 中最佳亲和度函数值, 记 $X_i^*(t)$ 为 $F^*(\vec{X}(t))$ 对应的抗体, 如

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} [X_i^*(t) \subset M^*]\} = 1,$$

则称噪声环境下ECSA算法亲和度函数序列 $\{F^*(\vec{X}(t)), t \geq 0\}$ 几乎处处强收敛.

**定义 2**<sup>[16]</sup> 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为在概率空间 $\xi(t)$ 上的随机序列,  $(\Omega, \xi, P)$ 为 $\xi$ 中的递增 $\sigma$ 域流, 若满足下列条件:

- 1)  $\{X(t)\}$ 适应于 $\xi(t)$ ;
- 2)  $E[|X(t)|] < +\infty, \forall t$ ;
- 3)  $E[X(t+1)|\xi(t)] \geq X(t), \forall t$ ,

则称序列 $\{X(t)\}$ 关于 $\xi(t)$ 为下鞅.

依据上述定义, 几乎处处强收敛性明显强于依概率强收敛性. 由于ECSA算法采用了精英保持策略, 可以看到, 算法针对目标抗原生成的一系列抗体种群 $\{\vec{X}(t), t \geq 0\}$ , 它带有概率分布趋向于具有最佳亲和度的抗体. 如果新种群的最佳亲和度函数关于当前种群的条件期望不低于当前种群的最佳亲和度函数, 本文就可把最佳亲和度函数 $F^*(\vec{X}(t))$ 转变为一个下鞅来考察其收敛性, 因为下鞅的极限几乎处处存在且是有界的.

很明显, ECSA算法保证了下一代种群的最佳亲和度不会小于当前代种群最佳亲和度, 即有

$$F^*(\vec{X}(t+1)) \geq F^*(\vec{X}(t)).$$

本文有如下定理:

**定理 1** 设ECSA算法得到的种群序列 $\{\vec{X}(t), t \geq 0\}$ ,

$$\xi(t) = \xi(\vec{X}(0), \vec{X}(1), \dots, \vec{X}(t))$$

为 $\vec{X}(0), \vec{X}(1), \dots, \vec{X}(t)$ 可测的最小 $\sigma$ 代数, 则 $\{F^*(\vec{X}(t))\}$ 关于 $\xi(t)$ 为下鞅, 即有

$$E[F^*(\vec{X}(t+1))|\xi(t)] \geq F^*(\vec{X}(t)), t \geq 0.$$

**定理 2** 在定理1条件下, 记 $T$ 为ECSA算法的算子,

$$r_t^* = \min_{\vec{X}, \vec{Y}} P_T^t\{\vec{X}, \vec{Y}\}$$

为ECSA算法从状态 $\vec{X}$ 进化到状态 $\vec{Y}$ 的最小概率, 当 $\sum_{t=1}^{\infty} r_t^* = \infty$ 时, 有

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} [X_i^*(t) \subset M^*]\} = 1.$$

证 令

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_t = & \{\vec{X}(t) \cap M^* = \emptyset\} = \\ & \{F^*(\vec{X}(t)) \neq F(X^*)\}, \end{aligned}$$

假设 $\vec{Y}_m$ 满足 $\{\vec{Y}_m \cap M^* \neq \emptyset\}$ .

记 $\vartheta = \min\{|F(X_i) - F(Y_j)|, i \neq j\}$ , 则有

$$F^*(\vec{Y}_m) - F^*(\vec{X}) \geq \vartheta.$$

于是, 由全数学期望性质有

$$\begin{aligned} & E(F^*(\vec{X}(t+1))) - E(F^*(\vec{X}(t))) = \\ & E(E(F^*(\vec{X}(t+1))|\vec{X}(t))) - E(F^*(\vec{X}(t))) = \\ & \sum_{\vec{X}} \{P\{\vec{X}(t) = \vec{X}\} \times \\ & (E(F^*(\vec{X}(t+1))|\vec{X}(t) = \vec{X}) - F^*(\vec{X}))\} = \\ & \sum_{\vec{X}} \{P\{\vec{X}(t) = \vec{X}\} \sum_{\vec{Y}} P_T^t\{\vec{X}, \vec{Y}\} \times \\ & (F^*(\vec{Y}) - F^*(\vec{X}))\} \geq \\ & \sum_{\vec{X} \cap M^* = \emptyset} \{P\{\vec{X}(t) = \vec{X}\} P_T^t\{\vec{X}, \vec{Y}_m\} \times \\ & (F^*(\vec{Y}_m) - F^*(\vec{X}))\} \geq \vartheta P(\mathcal{Y}_t) r_t^*. \end{aligned}$$

对上面不等式求和, 有

$$F(X^*) \geq E(F^*(\vec{X}(t+1))) - E(F^*(\vec{X}(1))) \geq$$

$$\vartheta \sum_{k=1}^t P(\mathcal{Y}_k) r_k^*.$$

令 $t \rightarrow \infty$ , 有 $\sum_{t=1}^{\infty} P(\mathcal{Y}_t) r_t^* < \infty$ . 由于 $\sum_{t=1}^{\infty} r_t^* = \infty$ , 于是必有当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $P(\mathcal{Y}_t) \rightarrow 0$ , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (X_i^*(t)) = F(X^*).$$

即有 $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} [X_i^*(t) \subset M^*]\} = 1$ . 证毕.

说明在噪声环境下ECSA算法当 $t \rightarrow \infty$ 时,种群中具有最佳亲和度函数的抗体可以收敛到亲和度全局最优抗体解集 $M^*$ .

### 3.3 ECSA全局收敛性分析(Global convergence analysis of ECSA)

由于最佳亲和度函数值里包括了随机噪声值部分,即使ECSA算法种群的具有最佳亲和度的抗体收敛到了 $M^*$ ,但是该抗体并不一定是全局最优解,本文需要进一步对ECSA算法在噪声环境下Markov链状态空间 $\Gamma$ 中分析算法种群的状态转移概率矩阵特性,从而对ECSA算法的收敛性进行分析.本文给出如下定理:

**定理3**  $Z_k$ 为噪声环境下ECSA算法的Markov链,其状态空间为 $\Gamma$ ;  $\Psi$ 和 $\Psi'$ 为状态空间 $\Gamma$ 的两个状态,  $Y_i^*(\Psi)$ 和 $Y_i^*(\Psi')$ 分别为状态 $\Psi$ 和 $\Psi'$ 中亲和度函数值最佳的抗体.即有Markov链 $\{Z_k\}$ 的一步状态转移概率为

$$P\{Z_{k+1} = \Psi' / Z_k = \Psi\} = \begin{cases} (N-1) \prod_{i=1}^N P_i \times (N-1) \prod_{i=1}^{2^L} P\{Y_i, \Psi\}, \\ Y_i^*(\Psi') \geq Y_i^*(\Psi), \\ 0, Y_i^*(\Psi') < Y_i^*(\Psi), \end{cases}$$

其中 $P\{Y_i, Y\}$ 为抗体 $Y_i$ 从状态 $\Psi$ 中生成的概率,这取决于算法具体算子的设计,是可以精确计算的.

不失一般性,将 $N$ 个随机噪声值 $\delta_i(P_i)$ ,按大小进行排列,记 $\delta_1(P_1) > \delta_2(P_2) > \dots > \delta_N(P_N)$ ;定义 $S^* = \{X_i; \forall X_j \in S, f(X_i) \geq f(X_j)\}$ 为抗体全局最优解集.以下定理能保证噪声环境下的ECSA算法最终能以概率1收敛到至少一个全局最优解.

**定理4** 当 $k \rightarrow \infty$ 时,噪声环境下ECSA算法的Markov链 $\{Z_k\}$ 中仅包含一个正常返类,且该类中的每一个状态至少包括一个有序对 $(X_i, \delta_1(P_1))$ ,其中 $X_i \in S^*$ .

由前面的假设,状态空间 $\Gamma$ 是有限的,ECSA算法采取精英保持策略,同时由定理3给出的噪声环境下Markov链 $\{Z_k\}$ 状态转移概率的特性,众所周知, $k \rightarrow \infty$ 时,Markov链 $\{Z_k\}$ 最终以概率1趋于一个正常返类,即该类中的状态都是常返状态,且状态的平均返回时间 $\mu < \infty$ .因此,该类中的每一个状态至少包括一个全局最优解和随机噪声的有序对,使其亲和度函数 $F(X_i)$ 最大.该定理说明了噪声环境下ECSA算法最终能以概率1到达一个全局最优解集,并且至少有一个全局最优解的亲和度函数是最大的,即该有序对为 $(X_i, \delta_1(P_1))$ ,  $X_i \in S^*$ ,否则算法在搜索终止前不会将此解做为全局最优解的.所以,噪声环境下ECSA

算法以概率1最终收敛到至少1个全局最优解.

## 4 结论(Conclusions)

噪声环境下克隆选择算法的收敛性研究是个难问题.本文利用随机过程相关知识对加性噪声环境下一大类精英保持策略克隆选择算法的全局收敛性进行了研究.通过采用抗体和随机噪声有序对的方式构造了噪声环境下算法的Markov链,再运用下鞅理论和该Markov链的状态转移概率的特性证明了这一类算法以概率1最终收敛到至少1个全局最优解.该研究具有一定理论的意义和应用价值.值得注意的是,本文研究的结论是一定假设的前提下得到的,还不具备普遍性,虽然这些假设在实际应用中是可行的.未来的工作将研究不同的噪声环境下,如乘性噪声环境下克隆选择算法的收敛性,以及对算法的收敛速度进行研究,以便更好地了解噪声环境下克隆选择算法的优化机理.

## 参考文献(References):

- [1] DASGUPTA D, YUSH S, NINO F. Recent advances in artificial immune systems: models and applications [J]. *Applied Soft Computing*, 2011, 11(2): 1574 – 1587.
- [2] 史旭华, 钱锋. 动态环境的人工免疫网络多Agent优化策略 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(7): 921 – 930. (SHI Xuhua, QIAN Feng. Artificial immune network multi-agent optimization strategy for dynamic environment [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28 (7): 921 – 930.)
- [3] TIMMIS J, ANDREWS P, OWENS N, et al. An interdisciplinary perspective on artificial immune systems [J]. *Evolutionary Intelligence*, 2008, 1(1): 5 – 26.
- [4] TIMMIS J, HONE A, STIBOR T, et al. Theoretical advances in artificial immune systems [J]. *Theoretical Computer Science*, 2008, 403(1): 11 – 32.
- [5] 喻寿益, 邝溯琼. 保留精英遗传算法收敛性和收敛速度的鞅方法分析 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(7): 843 – 848. (YU Shouyi, KUANG Suqiong. Convergence and convergence rate analysis of elitist genetic algorithm based on martingale approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(7): 843 – 848.)
- [6] VILLALOBOS-ARIAS M, COELLO A C, HERNÁNDEZ-LERMAET O. Convergence analysis of a multi-objective artificial immune system algorithm [C] // *Proceedings of the 3rd International Conference on Artificial Immune Systems*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2004: 226 – 235.
- [7] LIU X Y, ZHANG A L, GAO Y L. A novel hybrid immune algorithm and its convergence based on the steepest descent algorithm [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218(4): 1291 – 1296.
- [8] ABO-ZAHHAD M, AHMED S M, SABOR N, et al. A new method for fastening the convergence of immune algorithms using an adaptive mutation approach [J]. *Journal of Signal and Information Processing*, 2012, 3(1): 86 – 92.
- [9] VINCENZO C, MARIO R. On the convergence of immune algorithms [C] // *Proceedings of the 1st IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence*. Honolulu, America: IEEE, 2007: 409 – 415.

- [10] CASTRO L D, FERNANDO J, ZUBEN V. Learning and optimization using clonal selection principle [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Special Issue on Artificial Immune Systems*, 2001, 6(3): 239 – 251.
- [11] GONG M G, JIAO L C. Multi-objective immune algorithm with non-dominated neighbor-based selection [J]. *Evolutionary Computation*, 2008, 16 (2): 225 – 255.
- [12] MOHAMMADI M, RAAHEMI B, AKBARI A. Improving linear discriminate analysis with artificial immune system-based evolutionary algorithms [J]. *Information Sciences*, 2012, 189(15): 219 – 232.
- [13] AYDIN I, KARAKOSE M, ERHAN A. A multi-objective artificial immune algorithm for parameter optimization in support vector machine [J]. *Applied Soft Computing*, 2011, 11(1): 120 – 129.
- [14] CASTRO P A, VON ZUBEN F J. Learning ensembles of neural networks by means of a bayesian artificial immune system [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22 (2): 304 – 316.
- [15] 张文修, 梁怡. 遗传算法的数学基础 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2003
- (ZHANG Wenxiu, LIANG Yi. *Mathematical Foundations for Genetic Algorithms* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2003)
- [16] 张波, 商豪. 应用随机过程 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2009 (ZHANG Bo, SHANG Hao. *Applied Stochastic Processes* [M]. Beijing: Renmin University of China Press, 2009)

#### 作者简介:

洪露 (1975–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为人工免疫算法理论及应用, E-mail: honglu912@163.com;

龚成龙 (1964–), 男, 硕士, 教授, 目前研究方向为检测装置与自动化, E-mail: gcl@hhit.edu.cn;

王经卓 (1971–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为检测装置与自动化, E-mail: wjz@hhit.edu.cn;

纪志成 (1959–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为复杂非线性系统控制, E-mail: zcji@jiangnan.edu.cn.