

高阶参数优化迭代学习控制算法

逢 勃[†], 邵 诚

(大连理工大学 先进控制技术研究所, 辽宁 大连 116023)

摘要: 针对线性时不变离散系统的跟踪问题提出一种高阶参数优化迭代学习控制算法. 该算法通过建立考虑了多次迭代误差影响的参数优化目标函数, 求解得出优化后的时变学习增益参数. 从理论上证明了: 对于线性离散时不变系统, 该算法在被控对象不满足正定性的松弛条件下仍可保证跟踪误差单调收敛于零. 同时, 采用之前多次迭代信息的高阶算法具有更好的收敛性和鲁棒性. 最后利用一个仿真实例验证了算法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 参数优化; 单调性; 离散系统; 线性系统; 高阶

中图分类号: TP18 文献标识码: A

High-order parameter-optimization iterative learning control algorithm

PANG Bo[†], SHAO Cheng

(Institute of Advanced Control Technology, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116023, China)

Abstract: A high-order parameter-optimization iterative learning control algorithm is presented for solving the tracking problems of a class of linear time-invariant discrete system. The proposed algorithm is based on a quadratic performance objective function with the tracking errors from earlier trials. By solving this function we obtain the optimal time-varying parameters as the learning gain of the iterative update law. It is proved theoretically that when applied to the relaxed linear discrete system, the proposed algorithm guarantees the tracking error to converge to zero monotonically even the original system is nonpositive. Moreover, since more information of previous iterations is considered in the proposed algorithm, the robustness and convergence performance of the algorithm are improved accordingly. Finally, a case study is carried out to illustrate the performance of this new algorithm.

Key words: iterative learning control; parameter-optimization; monotonic convergence; discrete system; linear system; high-order

1 引言(Introduction)

迭代学习控制(iterative learning control, ILC)主要应用于有限时间间隔 $[0, T]$ 内重复运行的控制任务, 实现对给定输出轨迹 $r(t)$ 的完全跟踪. 其主要原理是利用前次迭代的系统信息建立学习律, 使系统的跟踪误差逐次减小.

近年来, 基于模型的优化控制方法得到了广泛的应用. 这种方法通过对控制系统建模, 利用数学模型设计控制器, 其控制器的结构与参数依赖于受控对象的模型结构和参数. 在此基础上, 利用最优原则设计迭代更新律, 给出在某种性能指标下的最优控制信号的优化迭代学习控制, 并且成为了迭代学习控制研究领域的热点^[1-4]. 其中, 参数优化迭代的控制算法^[5](parameter optimal iterative learning control, POILC)是优化迭代学习控制的一个重要研究内容.

POILC是基于二次型的优化算法, 具有实施简便的特点, 当控制对象为线性时不变模型并具有正定性时输出误差可单调收敛于零. 若控制对象的模型非正定, 则跟踪误差单调收敛至一个非零值. 近年来, 已有很多研究关注于POILC算法, 如文献[6]在P型POILC算法基础上提出了PID型POILC算法, 文献[7]提出由5个待优化参数组成的PD型POILC算法. 文献[8]将单个参数优化算法拓展为多参数优化算法. 文献[9]提出鲁棒性逆模型POILC算法. 文献[10]研究了基于梯度下降的鲁棒性POILC算法. 这些算法对期望输出的跟踪准确度与系统模型的正定性紧密相关, 当应用于控制对象为非正定不能精确跟踪给定输入. 目前, 适用于非正定性系统的POILC算法研究成果还不是很多, 如文献[11]将POILC算法的学习增益标量权值替换为一个随迭代次数变化而变化的权值矩阵, 并在

收稿日期: 2013-05-15; 录用日期: 2015-01-08.

[†]通信作者, E-mail: pangbo@mail.dlut.edu.cn; Tel.: +86 18614066542.

国家自然科学基金项目(61074020)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61074020).

一个稠密集内搜索出此权值矩阵的最优解, 将其代入到POILC算法中, 能够使非正定的被控对象跟踪误差单调收敛于零. 但是其搜索算法较为复杂且是非因果的, 因此在实际应用中难以实现. 文献[12]将被控对象输入输出模型分解成位置模型和已知模型两部分, 并采取已知模型的逆乘以当次迭代误差作为新的控制更新量, 仍然利用POILC算法的目标函数求出学习增益构造迭代算法, 研究结果表明该算法同样能够使非正定的被控对象跟踪误差单调收敛于零. 但是该算法仍需要对已知模型的逆求解, 当系统的维数非常高时, 计算量将变得非常巨大.

迭代学习控制算法多是利用前一次迭代时的控制输入及前一次的输出误差(开环形式学习律)或当前误差(闭环形式学习律)生成本次迭代的控制输入, 这种形式的控制律可称为一阶形式的迭代学习律. 采取当次迭代之前多次迭代信息构造迭代学习控制律称为高阶迭代学习控制算法. 近年来, 高阶迭代学习控制算法越来越得到控制界的关注. 文献[13]针对具有不确定性或干扰的重复非线性时变系统, 设计一种新的辅助反馈高阶迭代学习控制器. 文献[14]研究了一类二阶严格反馈时变非线性系统的自适应迭代学习控制在控制方向未知的不确定性系统中的应用. 文献[15]针对一类非线性带扰动系统提出了高阶PID采样迭代学习控制算法, 讨论了高阶算法的收敛性问题以及该算法的优势与缺陷. 文献[16]研究了高阶P型迭代学习控制律在带有不确定性的非线性系统的应用. 文献[17]针对带有时滞和扰动的非线性系统提出高阶PID型迭代学习控制律. 文献[18]讨论了一阶和二阶P型迭代学习控制律在部分模型未知的线性时变系统应用时的收敛特性. 文献[19]还针对确定性线性系统, 设计了一阶和高阶的比例型迭代学习控制解决方案, 并比较了高阶和低阶ILC算法的收敛性和鲁棒性. 尽管有很多研究关注与迭代学习控制的高阶算法, 但目前基于最优控制原则的高阶算法研究还不是很丰富.

传统的POILC算法只适用于正定的系统模型, 此条件是较为苛刻的. 因此, 改进POILC算法的设计, 放松对系统模型的条件要求, 并使得跟踪误差单调收敛于零, 具有重要的理论和实际意义. 为此, 本文提出一种高阶参数优化迭代学习控制算法. 该算法结构简单, 利用之前多次迭代的信息构建参数优化目标函数, 得到最优的迭代控制输入信号. 此算法应用于非正定系统时, 仍然能够保证单调收敛, 并达到精确跟踪期望输出轨迹的效果. 同时, 高阶迭代学习控制算法与普通学习算法相比, 利用了以前多次迭代过程的输入输出信息来构造新的控制输入, 可提高沿学习迭代方向的收敛性能和鲁棒性.

本文由如下几个部分组成的: 在第2节, 简单介绍

了传统参数优化迭代学习算法; 第3节提出一阶参数优化迭代学习算法并对其收敛特性进行了分析; 第4节在第3节的基础上提出高阶参数优化迭代学习算法, 同样对其性质进行分析; 最后, 第5节利用一个仿真实例说明本文提出算法的有效性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下一个SISO线性时不变松弛系统:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + bu_k(t), \\ y_k(t) = cx_k(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $cb \neq 0$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{R}$; A , b 和 c 分别为相应维数的向量和矩阵; k 表示迭代次数; $t \in [0, N]$ 表示系统采样时刻. 系统(1)的跟踪目标信号为 $y_d(t)$. 令 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 为 t 时刻的系统跟踪误差, 并假定 $y_d(t)$ 是容许的, 即存在 $u_d(t)$ 使得

$$\begin{cases} x_d(t+1) = Ax_d(t) + bu_d(t), \\ y_d(t) = cx_d(t), \end{cases} \quad (2)$$

迭代学习控制的目的是设计适当的迭代学习律, 使迭代次数 k 趋近于无穷时, 系统输出 $y_k(t)$ 精确地跟踪给定输出 $y_d(t)$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| = 0$.

本节首先简单地介绍传统的参数优化迭代学习控制算法^[5], 将状态空间模型(1)转换为基于时间序列的输入输出向量模型为

$$\vec{y}_k = G\vec{u}_k + \vec{d}_k. \quad (3)$$

式(3)中的 G 和 \vec{d}_k 为如下形式的矩阵和向量:

$$G = \begin{bmatrix} cb & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ cAb & cb & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA^{N-1}b & \cdots & \cdots & cAb & cb \end{bmatrix},$$

$$d_k = \begin{bmatrix} cAx_k(0) \\ cA^2x_k(0) \\ cA^3x_k(0) \\ \vdots \\ cA^Nx_k(0) \end{bmatrix},$$

而 \vec{u}_k 和 \vec{y}_k 为输入输出的时间序列向量:

$$\vec{u}_k = (u_k(0), u_k(1), \cdots, u_k(N-1))^T,$$

$$\vec{y}_k = (y_k(1), y_k(2), \cdots, y_k(N))^T,$$

并定义 \vec{y}_d , \vec{e}_k 为系统(1)给定输入向量和第 k 次迭代的误差向量:

$$\vec{y}_d = (y_d(1), y_d(2), \cdots, y_d(N))^T,$$

$$\vec{e}_k = (e_k(1), e_k(2), \cdots, e_k(N))^T.$$

本文中对系统(1)有如下假设:

假设 1 系统的初始状态 $x_k(0) = x_0$. 由于本文

主要使用实际输出和期望输出的偏差作为反馈量进行计算, 而常数 $x_k(0)$ 在计算中并不涉及, 因此 $x_k(0)$ 为零与否完全不影响本文的结论.

参数优化迭代学习算法的控制更新律为以下的 Arimoto 型前馈算法^[20]:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \beta_{k+1}e_k(t+1). \quad (4)$$

根据文献 [21], 对于系统 (1), 算法 (4) 的参数 β_{k+1} 满足 $|1 - \beta_{k+1}cb| < 1$ 时, 跟踪误差能够渐近收敛到零. 显然若算法 (4) 具有使跟踪误差单调递减的特性, 那么闭环系统就有更好的鲁棒性. 为此, 文献 [5] 提出了一种对参数 β_{k+1} 进行优化的算法:

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \beta_{k+1}\vec{e}_k, \quad (5)$$

其中学习增益 β_{k+1} 为以下目标函数的解:

$$\begin{cases} \beta_{k+1}^* = \arg \min J, \\ J(\beta_{k+1}) = \|\vec{e}_{k+1}\|^2 + w\beta_{k+1}^2, w > 0. \end{cases} \quad (6)$$

若范数取 Euclid-2 范数, 直接对式 (6) 中泛函求偏导令 $\frac{\partial J}{\partial \beta} = 0$, 得到式 (6) 的最优解 β_{k+1}^* 为

$$\beta_{k+1}^* = \frac{\langle \vec{e}_k, G\vec{e}_k \rangle}{w + \|\vec{G}e_k\|^2}, \quad (7)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积. 算法 (5) 具有如下的性质^[5]:

定理 1 算法 (5) 跟踪误差 \vec{e}_k 的范数单调递减, 并 $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k+1} = 0$.

定理 2 若系统 (1) 的输入输出模型矩阵 G 满足 $G + G^T > 0$, 即 $G + G^T$ 正定. 则算法 (5) 满足:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{e}_k\| = 0.$$

根据上述参数优化迭代学习控制算法的定理可以看出, 该算法只在线性系统的输出函数 G 为正定时才能确保精确跟踪给定输入. 本文将在下面章节给出改进的参数优化迭代学习控制算法, 使其同样适用于非正定线性系统.

3 一阶参数优化迭代学习控制算法 (First-order parameter optimal iterative learning control algorithm)

根据传统参数优化迭代学习算法 (5) 的性质, 当系统模型非正定时, 算法将无法确保跟踪误差收敛至零, 从而影响算法对非正定目标轨迹的跟踪精确度. 为此, 本文针对线性系统 (1), 提出如下的迭代学习律:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \beta_{k+1}(t)e_k(t+1), \quad (8)$$

注意本文提出的参数优化算法表达式 (8) 中, 使用了在时间域上时变的学习增益参数 $\beta_{k+1}(t)$, 来取代传统参数优化迭代学习控制算法 (5) 中的时不变参数 β_{k+1} . 这样设计可以使学习增益参数的选取更加自由灵活, 并

相应地取得更好的跟踪效果.

令 $\vec{\beta}_{k+1} = [\beta_{k+1}(0) \ \beta_{k+1}(1) \ \cdots \ \beta_{k+1}(N-1)]^T$, $\vec{\beta}_{k+1}$ 由式 (9) 解出

$$\begin{cases} \vec{\beta}_{k+1}^* = \arg \min(J), \\ J(\vec{\beta}_{k+1}) = \|\vec{e}_{k+1}\|^2 + w\vec{\beta}_{k+1}^T\vec{\beta}_{k+1}, w > 0. \end{cases} \quad (9)$$

接下来对 $\vec{\beta}_{k+1}$ 的具体值进行计算, 将式 (1) 的 $k+1$ 次迭代模型与 k 次迭代模型相减并代入式 (8) 有

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1}(t+1) &= A\Delta x_{k+1}(t) + b\Delta u_{k+1}(t) = \\ &= A\Delta x_{k+1}(t) + be_k(t+1)\beta_{k+1}(t), \end{aligned} \quad (10)$$

以及

$$\begin{aligned} -\Delta e_{k+1}(t) &= c\Delta x_{k+1}(t) = \\ &= cA\Delta x_{k+1}(t-1) + cbe_k(t)\beta_{k+1}(t-1), \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1}(t) &= x_{k+1}(t) - x_k(t), \\ \Delta u_{k+1}(t) &= u_{k+1}(t) - u_k(t), \\ \Delta e_{k+1}(t) &= e_{k+1}(t) - e_k(t). \end{aligned}$$

令 $be_k(t+1) = B_k(t)$, 利用式 (10)–(11) 有

$$-\Delta \vec{e}_{k+1} = \tilde{G}_k \vec{\beta}_{k+1}, \quad (12)$$

其中

$$\tilde{G}_k = \begin{bmatrix} cB_k(0) & 0 & \cdots & 0 \\ cAB_k(0) & cB_k(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA^{N-1}B_k(0) & cA^{N-2}B_k(1) & \cdots & cB_k(N-1) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

将式 (12) 代入式 (9), 令 $\frac{\partial J(\vec{\beta}_{k+1})}{\partial \vec{\beta}_{k+1}} = 0$, 得到最优解

$\vec{\beta}_{k+1}^*$ 满足

$$(wI + \tilde{G}_k^T \tilde{G}_k) \vec{\beta}_{k+1}^* = \tilde{G}_k^T \vec{e}_k. \quad (14)$$

由于对任意 $x \in \mathbb{R}^N$, 都有

$$x^T(wI + \tilde{G}_k^T \tilde{G}_k)x = wx^T x + \|\tilde{G}_k^T x\|^2 \geq 0$$

成立, 且当且仅当 $x = 0$ 时上式的等号成立. 因此矩阵为 正定矩阵, 则根据式 (14) 有

$$\vec{\beta}_{k+1}^* = (wI + \tilde{G}_k^T \tilde{G}_k)^{-1} \tilde{G}_k^T \vec{e}_k. \quad (15)$$

采用如式 (15) 的最优解为 $\vec{\beta}_{k+1}^*$, 参数优化迭代学习控制算法 (8) 满足如下的定理:

定理 3 算法 (8) 用于对象 (1) 的跟踪误差具有单调递减的性质, 即 $\|\vec{e}_{k+1}\| \leq \|\vec{e}_k\|$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{\beta}_{k+1}^* = 0$.

证 将式 (9) 的非最优解 $\vec{\beta}_{k+1} = 0$ 代入目标函数:

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_{k+1}\|^2 &\leq J(\vec{\beta}_{k+1}^*) = \\ \|\vec{e}_{k+1}\|^2 + w\|\vec{\beta}_{k+1}^*\|^2 &\leq J(0) = \|\vec{e}_k\|^2, \end{aligned}$$

知 \vec{e}_k 单调递减. 再由上式可递推得

$$w \|\vec{\beta}_{k+1}^*\|^2 \leq \|\vec{e}_k\|^2 - \|\vec{e}_{k+1}\|^2,$$

进而 $w \sum_{k=0}^{\infty} \|\vec{\beta}_{k+1}^*\|^2 \leq \|\vec{e}_0\|^2$, 即序列 $\{\|\vec{\beta}_{k+1}^*\|^2\}$ 收敛,

且有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{\beta}_{k+1}^*\| = 0$.

定理4 算法(8)用于对象(1)满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{e}_k = 0$.

证 由定理3可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{\beta}_{k+1}^* = 0$, 再由式(14)得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{G}_k^T \vec{e}_k = 0.$$

令 $\tilde{G}_k^T \vec{e}_k = \vec{r}_k = (r_1^k, \dots, r_N^k)^T$, 根据式(13)有

$$r_N^k = B_k^T(N-1)C^T e_k(N) = b^T c^T e_k^2(N).$$

根据定理3及式(14)有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{r}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} [r_1^k \ \dots \ r_N^k]^T = 0,$$

即 $\lim_{k \rightarrow \infty} r_N^k = \lim_{k \rightarrow \infty} b^T c^T e_k^2(N) = 0$. 根据上式及假设 $b^T c^T = cb \neq 0$ 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(N) = 0$. 再考虑 r_{N-1}^k . 由式(13)有

$$\begin{aligned} r_{N-1}^k &= b_k^T(N-2)A^T c^T e_k(N) + \\ &b_k^T(N-2)c^T e_k(N-1) = \\ &b_k^T A^T c^T e_k(N-1)e_k(N) + b_k^T c^T e_k^2(N-1), \end{aligned}$$

同理有 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(N-1) = 0$. 以此类推可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(N) = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(1) = 0,$$

因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{e}_k = 0$.

根据式(15)可以看出, 减小标量权值 w 将增大学习增益 β_{k+1}^* , 从而增大迭代输入变化的幅度, 并相应地加快算法的收敛速度. 因此权值 w 不宜取太大的值, 在实际运算过程中, 选取 w 为某个大于零的小数量值较为合适.

通过对定理4的证明还可以看出, 算法(8)只要在系统(1)中的参数满足 $cb \neq 0$ 的条件下, 就能够确保跟踪误差单调收敛至零. 而此条件相比与传统参数优化迭代学习控制算法中系统模型必须为正定的条件^[5], 显然更为常见并且易于实现. 因此本文提出的算法能够更广泛地应用于线性离散系统的跟踪问题, 消除传统参数优化迭代学习控制^[5]只适用于正定性系统的苛刻条件.

注1 算法(8)基于 k 次迭代误差构造 $k+1$ 次控制输入, 可看作一阶算法. 本文将在下节提出参数优化迭代学习控制的高阶算法.

4 高阶算法(High-order Algorithm)

如果将 k 次迭代之前的系统信息加入到迭代学习控制算法的设计中来得到 $k+1$ 次的迭代输入, 就称为高阶迭代学习控制算法. 由于高阶算法采用超过一次迭代以上的控制输入和跟踪误差进行了加权处理, 因

此从直观上来看高阶算法的收敛性能将得到改善^[18-19]. 但是, 这种设想成立与否在理论证明上存在着很大的困难. 例如, 文献[6-7]中给出了高阶参数优化迭代学习控制算法, 虽然在算法的设计上更为复杂, 但是仍然只适用于输入输出模型为正定的系统, 其收敛性能并没有得到相应的改善.

为此, 参照上文提出的一阶迭代学习控制算法, 本节提出高阶参数优化迭代学习控制算法. 由于高阶算法对超过一次迭代以上的控制输入和跟踪误差进行了加权处理, 因此与低阶算法相比, 高阶算法具备更好的鲁棒性, 能够削弱系统噪声对跟踪性能的影响.

考虑如下的高阶参数优化迭代学习控制算法:

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \sum_{i=1}^r \beta_{i,k+1}(t) e_{k-i+1}(t+1), \\ r &\leq k. \end{aligned} \quad (16)$$

令

$$\vec{\beta}_{i,k+1} = [\beta_{i,k+1}(0) \ \beta_{i,k+1}(1) \ \dots \ \beta_{i,k+1}(N-1)]^T.$$

参数 $\vec{\beta}_{i,k+1}$ 由如下的优化目标函数解出:

$$\begin{aligned} J &= \|e_{k+1}\|^2 + \sum_{i=1}^r w_i \|\vec{\beta}_{i,k+1}\|^2, \\ w_1 &> 0, \dots, w_r > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

将式(1)的 $k+1$ 次模型与 k 次模型相减可得

$$-\Delta \vec{e}_{k+1} = \bar{G}_{k+1} \vec{\beta}_{k+1}, \quad (18)$$

其中: $\bar{G}_{k+1} \in \mathbb{R}^{N \times (N \times r)}$, $\vec{\beta}_{k+1} \in \mathbb{R}^{(N \times r) \times 1}$, 并有

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_{k+1} &= [\beta_{1,k+1}(0) \ \beta_{2,k+1}(0) \ \dots \ \beta_{r,k+1}(0) \ \dots \\ &\beta_{1,k+1}(1) \ \beta_{2,k+1}(1) \ \dots \ \beta_{r,k+1}(1) \ \dots \\ &\beta_{1,k+1}(N-1) \ \beta_{2,k+1}(N-1) \ \dots \\ &\beta_{r,k+1}(N-1)]^T, \end{aligned} \quad (19)$$

$\bar{G}_k =$

$$\begin{bmatrix} c\bar{B}_k(0) & 0 & \dots & 0 \\ cA\bar{B}_k(0) & c\bar{B}_k(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA^{N-1}\bar{B}_k(0) & cA^{N-2}\bar{B}_k(1) & \dots & c\bar{B}_k(N-1) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

以及

$$\begin{aligned} \bar{B}_k(t) &= b[e_k(t+1) \ e_{k-1}(t+1) \ \dots \\ &e_{k-r+1}(t+1)], \quad 0 \leq t < N. \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(19), 目标函数(17)可改写成

$$J = \|e_{k+1}\|^2 + \|W \vec{\beta}_{k+1}\|^2, \quad W \in \mathbb{R}^{(Nr) \times (Nr)}, \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} W &= \text{diag}\{\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_r}, \sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_r}, \dots, \\ &\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_r}\}, \\ w_1 &> 0, \dots, w_r > 0. \end{aligned}$$

将式(18)代入式(21)并令 $\frac{\partial J}{\partial \beta} = 0$ 可得

$$(W + \bar{G}_k \bar{G}_k^T) \bar{\beta}_{k+1}^* = \bar{G}_k^T \bar{e}_k. \quad (23)$$

由于 $(W + \bar{G}_k \bar{G}_k^T)$ 为正定矩阵且可逆, 因此式(23)可以改写为 $\bar{\beta}_{k+1}^* = (W + \bar{G}_k \bar{G}_k^T)^{-1} \bar{G}_k^T \bar{e}_k$, 高阶算法(16)满足以下定理:

定理 5 算法(16)用于对象(1)跟踪误差具有单调收敛的性质, 即 $\|\bar{e}_{k+1}\| \leq \|\bar{e}_k\|$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\beta}_{k+1}^* = 0$.

证 将式(21)的非最优解 $\bar{\beta}_{k+1} = 0$ 代入目标函数:

$$\|\bar{e}_{k+1}\|^2 \leq \|\bar{e}_{k+1}\|^2 + \|W \bar{\beta}_{k+1}^*\|^2 \leq \|\bar{e}_k\|^2, \quad (24)$$

则根据式(24)递推得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|W \bar{\beta}_{k+1}^*\| \leq \|\bar{e}_0\|. \quad (25)$$

根据上面的式(25)可知, 序列 $\{\|W \bar{\beta}_{k+1}^*\|\}$ 收敛, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} W \bar{\beta}_{k+1}^* = 0$. 由于 W 的对角线元素均为正, 因此可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\beta}_{k+1}^* = 0$.

定理 6 当迭代次数 $k \rightarrow \infty$ 时, 算法(16)的跟踪误差趋近于零, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{e}_k\| = 0$.

证 根据定理 5 和式(23)可知, 当 $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\beta}_{k+1}^* = 0$ 时, 必有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{G}_k^T \bar{e}_k = 0$. 令 $\bar{G}_k^T \bar{e}_k = \bar{s}_k = 0$, 注意 $\bar{G}_k^T \in \mathbb{R}^{(N \times r) \times N}$, $\bar{e}_k \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, 因此 $\bar{s}_k \in \mathbb{R}^{(N \times r) \times 1}$, 于是有 $\bar{s}_k = (\bar{s}_k^1, \bar{s}_k^2, \dots, \bar{s}_k^N)^T$, 其中 $\bar{s}_k^i \in \mathbb{R}^r (1 \leq i \leq N)$, 考虑式(20)中 \bar{G}_k 的结构以及式(21)中 \bar{B}_k^T 的结构有

$$\begin{aligned} \bar{s}_k^N &= \bar{B}_k^T(N-1)C^T e_k(N) = \\ & b^T c^T [e_k(N) \ e_{k-1}(N) \ \dots \ e_{k-r+1}(N)]^T e_k(N) = \\ & b^T c^T [e_k^2(N) \ e_{k-1}(N) e_k(N) \ \dots \\ & e_{k-r+1}(N) e_k(N)]^T. \end{aligned}$$

由系统(1)的假设 $cb \neq 0$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_k^N = 0$ 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(N) = 0,$$

并由此可以推出

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-1}(N) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-2}(N) = \dots = \\ \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-r}(N) &= 0. \end{aligned}$$

再考虑 \bar{s}_k^{N-1} , 根据 \bar{G}_k 的结构有

$$\begin{aligned} \bar{s}_k^{N-1} &= \\ & \bar{B}_k^T(N-2)C^T e_k(N-1) + \\ & \bar{B}_k^T(N-2)A^T c^T e_k(N) = \\ & b^T c^T [e_k^2(N-1) \ e_{k-1}(N-1) e_k(N-1) \\ & \dots \ e_{k-r+1}(N-1) e_k(N-1)]^T + \\ & b^T c^T [e_k(N-1) \ e_{k-1}(N-1) \ \dots \\ & e_{k-r+1}(N-1)]^T e_k(N). \end{aligned}$$

根据 $cb \neq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_k^{N-1} = 0$ 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(N) = 0$ 可得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(N-1) = 0$, 并由此可以推出

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-1}(N-1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-2}(N-1) = \\ \dots &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-r}(N-1) = 0, \end{aligned}$$

再以此类推有

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(N-2) = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(1) = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-1}(N-2) = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-1}(1) = 0, \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-r}(N-2) = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-r}(1) = 0, \end{cases}$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}_{k-1} = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}_{k-r} = 0.$$

由此定理 6 得证.

本节在式(8)的基础上给出了高阶算法(16), 并证明了高阶算法(16)应用于非正定系统同样使跟踪误差单调趋近于零. 但是由于

1) 一阶算法在每一次迭代时, 控制输入均包含了前一次的信息. 依次递推, 进而也包含了以前任何一次迭代的输入输出信息.

2) 当迭代次数增加时, 时迭代误差将向零趋近, 迭代输入将向期望输入趋近.

因此可以判断, 高阶算法的迭代性能将在迭代开始进行时有提高, 而随着迭代次数的增加, 高阶算法的作用将逐渐减弱. 接下来本文将利用一个仿真实例来验证算法的性能.

5 仿真实例(Case study)

为了本文提出算法的有效性, 考虑如下离散线性系统:

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = [0.1 \ 0] x(t). \end{cases} \quad (26)$$

采样周期 $N = 20$, 期望输出 $y_d(t) = \sin(2\pi t/N)$. 对式(26)的离散输入输出模型 G 进行矩阵计算, 求得 $G + G^T$ 的特征值取值范围为 $[-0.2697 \ 0.4856]$, 因此式(26)为非正定. 分别利用如下的参数优化方法进行对式(26)仿真:

1) 传统参数优化迭代学习算法^[5]:

$$\bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k + \beta_{k+1} \bar{e}_k,$$

β_{k+1} 由目标函数(6)解出.

2) 一阶参数优化迭代学习算法:

$$\bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k + \bar{\beta}_{k+1} \bar{e}_k,$$

$\bar{\beta}_{k+1}$ 由目标函数(9)解出.

3) 二阶参数优化迭代学习算法:

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \vec{\beta}_{1,k+1} \vec{e}_k + \vec{\beta}_{2,k+1} \vec{e}_{k-1}, \quad (27)$$

$\vec{\beta}_{1,k+1}$ 和 $\vec{\beta}_{2,k+1}$ 由目标函数(22)($r=2$)解出.

图1给出了采用传统、本文提出的一阶和二阶参数优化迭代学习算法时,系统输出误差在迭代域上的收敛情况.仿真结果表明,采用文献[5]提出的传统参数优化算法的系统跟踪误差单调收敛某一非零数,这是由于系统的非正定性造成的^[5].采用本文提出的参数优化算法(一阶、二阶)的跟踪结果及收敛性能大大好于传统参数优化方法.此外,本文提出的二阶算法的误差收敛性能在最初的几次迭代时好过一阶算法,而随着迭代次数的增加,一阶算法和二阶算法的跟踪误差逐渐接近.

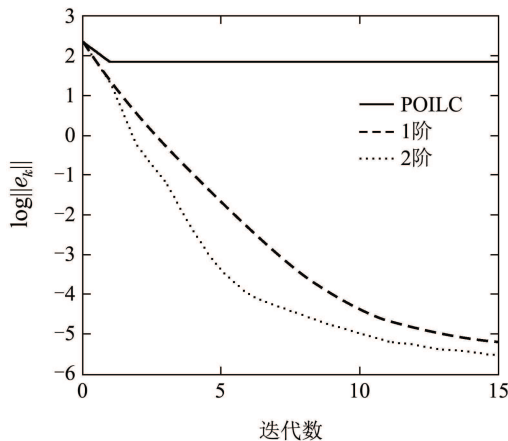


图1 3种不同算法的跟踪误差收敛情况

Fig. 1 Convergence of tracking error of 3 different POILC

接下来考虑当系统存在测量误差时算法的鲁棒性,对系统(26)加入状态扰动和输出扰动:

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.001 \times \text{rand } n \\ 0.001 \times \text{rand } n \end{bmatrix}, \\ y(t) = [0.1 \ 0]x(t) + 0.001 \times \text{rand } n, \end{cases} \quad (28)$$

其中rand n 是在时间域上均值为0、方差为1的白噪声序列.系统(28)的期望输出和采样周期和系统(26)相同,分别利用本文提出的一阶算法和二阶算法进行仿真,得到跟踪误差在迭代域上的收敛情况如图2所示.

由图2可以看出,在存在测量干扰情况下,二阶算法的误差跟踪曲线和一阶算法相比更加平滑,受测量误差影响的波动幅度较小.由此判断,二阶算法的鲁棒性要好于一阶算法.

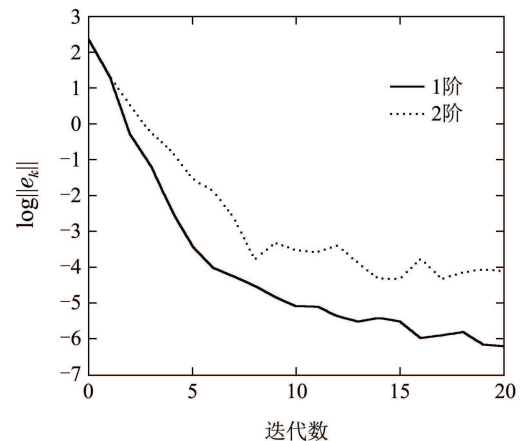


图2 一阶算法和二阶算法的鲁棒性收敛情况

Fig. 2 Robustness convergence of first-order POILC and second-order POILC

论文仅对带有测量噪声的情况进行了仿真研究,对于算法推广到带有输入输出扰动的随机系统的情况将是作者进一步的研究工作.

6 结语(Conclusions)

相比较于传统参数优化算法,本文提出的算法在系统模型为非正定时依然具有闭环稳定性,并使跟踪误差单调收敛至零.因此该算法可适用于一般情况下的离散线性时不变系统,应用范围更加广泛.在今后的工作中,将对此算法在带有输入输出扰动的随机系统的应用做进一步研究,并对高阶算法和低阶算法的收敛速度的比较进行理论分析.

参考文献(References):

- [1] GAO F, YANGA Y, SHAO C. Robust iterative learning control with applications to injection molding process [J]. *Chemical Engineering Science*, 2001, 56(24): 7025 - 7034.
- [2] 池荣虎, 侯忠生, 王郢维, 等. 非线性离散时间系统的最优终端迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 1025 - 1030 (CHI Ronghu, HOU Zhongsheng, WANG Danwei, et al. An optimal terminal iterative learning control approach for nonlinear discrete-time systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1025 - 1030.)
- [3] 陈宸, 熊智华. 一种间歇过程的综合预测迭代学习控制方法 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 1069 - 1072. (CHEN Chen, XIONG Zhihua. An integrated predictive iterative learning control for batch process [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1069 - 1072.)
- [4] PANG B, SHAO C. Modified Newton-based ILC solving specific target tracking problems for non-linear batch reactor [J]. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 2013, 18(2): 158 - 165.
- [5] OWENS D H, FENG K. Parameter optimization in iterative learning control [J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(11): 1059 - 1069.
- [6] LI H J, HAO X H, XU W T. A fast parameter optimal iterative learning control algorithm [C] // *2008 International Conference on Embedded Software and Systems Symposia*. Los Alamitos, CA: IEEE, 2008: 375 - 379.

- [7] HAO X H, OWENS D H, DALEY S. Proportional difference type iterative learning control algorithm based on parameter optimization [C] // *2008 Chinese Control and Decision Conference*. New York: IEEE, 2008: 3136 – 3141.
- [8] HATONEN J, OWENS D H, FENG K. Basis functions and parameter optimisation in high order iterative learning control [J]. *Automatica*, 2006, 42(2): 287 – 294.
- [9] HARTE T J, HATONEN J, OWENS D H. Discrete time inverse model-based iterative learning control: stability, monotonicity and robustness [J]. *International Journal of Control*, 2005, 78(8): 577 – 586.
- [10] OWENS D H, HATONEN J, DALEY S. Robust monotone gradient-based discrete-time iterative learning control [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, 19(6): 634 – 661.
- [11] OWENS D H, TOMAS-RODRIGUEZ M, DALEY S. Limit sets and switching strategies in parameter-optimal iterative learning control [J]. *International Journal of Control*, 2008, 81(44): 626 – 640.
- [12] HATOEN J J, OWENS D H, MOORE L. An algebraic approach to iterative learning control [J]. *International Journal of Control*, 2004, 77(1): 45 – 54.
- [13] CHEN Y, XU J X, LEE T H. Feedback-assisted high-order iterative learning control of uncertain nonlinear discrete-time systems [C] // *International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*. New York: IEEE, 1996: 1785 – 1789.
- [14] 李静, 胡云安, 耿宝亮. 控制方向未知的二阶时变非线性系统自适应迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(6): 730 – 740.
(LI Jing, HU Yun'an, GENG Baoliang. Adaptive iterative learning-control for second-order time-varying nonlinear system with unknown control directions [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 730 – 740.)
- [15] 刘飞, 范杨. 高阶PID采样迭代学习控制 [J]. *控制工程*, 2012, 19(1): 73 – 76.
(LIU Fei, FAN Yang. Higher-order PID sampled-data iterative learning control [J]. *Control Engineering of China*, 2012, 19(1): 73 – 76.)
- [16] CHEN Y Q, WANG C Y, SUN M. A robust high-order P-type iterative learning controller using current iteration tracking error [J]. *International Journal of Control*, 1997, 68(2): 345 – 353.
- [17] CHEN Y Q, GONG Z M, WEN C Y. Analysis of high-order iterative learning control algorithm for uncertain nonlinear systems with state delays [J]. *Automatica*, 1998, 34(3): 1867 – 1880.
- [18] RUAN X, BIEN Z Z, WANG Q. Convergence characteristics of proportional-type iterative learning control in the sense of Lebesgue-p norm [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(5): 1 – 8.
- [19] RUAN X, BIEN Z, WANG Q. Convergence properties of iterative learning control processes in the sense of Lebesgue-p norm [J]. *Asian Journal of Control*, 2012, 14(4): 1095 – 1107.
- [20] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of Robots by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.
- [21] TOGAI M, YAMANO O. Analysis and design of an optimal learning control scheme for industrial robots: A discrete system approach [C] // *Proceeding of the 24th Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1985: 1399 – 1404.

作者简介:

逢勃 (1981–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: pangbo@mail.dlut.edu.cn;

邵诚 (1958–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂系统建模及优化控制, E-mail: cshao@dlut.edu.cn.