

未知输入和可测噪声重构之 线性矩阵不等式非线性系统观测器设计

杨俊起^{1,2}, 朱芳来^{1†}

(1. 同济大学 电子与信息工程学院, 上海 201804; 2. 河南理工大学 电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454000)

摘要: 针对一类同时具有未知输入和输出可测噪声的Lipschitz非线性系统, 讨论了状态估计、未知输入与可测噪声重构的问题. 首先, 基于广义系统和线性矩阵不等式的方法设计滑模未知输入观测器, 不仅对原系统状态进行渐近估计, 而且实现了对系统输出可测噪声的重构; 其次, 考虑一种鲁棒滑模微分器, 实现了广义系统输出向量微分的精确估计, 并在此基础上, 提出了一种未知信息重构方法, 该方法具有避免直接使用系统输出微分信息的优点. 最后, 对火车牵引拖动系统模型仿真, 结果表明该方法不但能够实现了对系统状态的估计, 而且可以有效重构未知信息.

关键词: 未知输入观测器; 广义系统; 滑模微分器; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Linear-matrix-inequality observer design of nonlinear systems with unknown input and measurement noise reconstruction

YANG Jun-qi^{1,2}, ZHU Fang-lai^{1†}

(1. College of Electronic and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China;

2. College of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan 454000, China)

Abstract: We investigate the unknown-input observer design for a class of nonlinear systems with both unknown inputs and measurement noise. First, based on the techniques of linear matrix inequality and generalized systems, the original nonlinear system is transformed into an augmented generalized system, and a robust sliding-mode observer which can estimate both the states and measurement noise vector of the original system is developed. Second, a robust sliding-mode differentiator is considered to exactly estimate the derivative of the output vector of the augmented generalized system, and a kind of unknown information reconstruction method which can be used to estimated unknown inputs of original system is proposed. The proposed method avoids using the derivative information of system output. Finally, a train system model is used to illustrate the effectiveness of the proposed methods which not only estimates the states of the original system, but also reconstructs the unknown input and measurement noise.

Key words: unknown input observer; generalized system; sliding mode differentiator; linear-matrix-inequality

1 引言(Introduction)

在现代控制理论中, 对具有未知输入的线性或非线系统观测器设计可追溯到20世纪70年代, 各种各样的未知输入观测器(unknown input observer, UIO)设计方法已经被提出^[1-13]. 针对一类具有未知输入的线性系统, 在不考虑未知输入重构的情况下, 文献[10]通过设计全维观测器达到了对系统状态向量的重构; Bejarano和Pisanoa针对具有未知输入的切换线性系统, 设计切换观测器实现了切换系统的状态估计^[12]; 文献[13]针对一类非线性自治切换系统, 设计高阶滑模观测器实现了状态估计和未知信息重构. 此外, 对

同时具有未知输入和可测噪声的线性或非线系统的UIO设计将更具有挑战性和工程实用性, 近来已经引起广泛关注^[14-18]. 其中, 文献[14]在观测器匹配条件不满足的情况下通过设计降维观测器实现了状态估计和未知信息重构; Lee等通过坐标变换, 并设计滑模描述系统观测器实现了对不确定非线性系统的状态估计, 并利用等价注入的方法实现对扰动信息重构^[16]. 文献[17]通过设计鲁棒滑模观测器, 并利用多观测器思想实现了故障检测和隔离. 文献[18]通过状态和输出变换设计观测器达到对状态和未知信息的估计目的, 但未知输入的估计直接用到了系统输出

收稿日期: 2013-05-15; 录用日期: 2013-11-11.

†通信作者. E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn; Tel.: +86 21-69580373.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61074009); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20110072110015); 广西制造系统与先进制造技术重点实验室资助项目(PF110289); 上海市重点学科资助项目(B004); 河南省教育厅科学技术研究重点项目(13B413035, 13B413028).

的微分信息.

本文采用不同于上述文献的可测噪声处理方法和观测器设计方法,发展了文献[14]的结果到非线性系统,并给出一种不同于文献[16]的未知信息重构方法.所提出的未知输入重构方法不但可以实现对具有未知输入和可测噪声的非线性系统状态估计,而且实现了对未知输入和可测噪声信息重构.

2 系统描述(System description)

考虑具有可测噪声和未知输入的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, t) + D\eta, \\ y = Cx + Fd, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 分别为系统的状态、控制输入和可测输出向量; $\eta \in \mathbb{R}^k$ 和 $d \in \mathbb{R}^h$ 分别为系统的未知输入和可测噪声向量; $f(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为非线性函数. 矩阵 A, B, C, D 和 F 是常量矩阵, 且 $\text{rank}D = k, \text{rank}C = p, \text{rank}F = h$ 和 $p \geq k + h$.

假设 1 系统(1)的所有不变零点在左半开复平面内, 即对所有满足 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 式(2)成立.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A & 0 & D \\ C & F & 0 \end{bmatrix} = n + k + h. \quad (2)$$

假设 2 状态向量 x 、可测噪声 d 和未知输入 η 及其微分是范数有界的. 特别地, 存在正数 γ 使得 $\|\eta\| < \gamma$.

假设 3 非线性项 $f(x, t)$ 满足 Lipschitz 条件, 即

$$\|f(x, t) - f(\hat{x}, t)\| \leq L_f \|x - \hat{x}\|, \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

式中 $L_f > 0$ 为 Lipschitz 常数.

引入增广向量 $\bar{x} = [x^T \ d^T]^T$, 那么系统(1)可以改写如下广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + Bu + f(E\bar{x}, t) + D\eta, \\ y = \bar{C}\bar{x}, \end{cases} \quad (4)$$

其中矩阵 $\bar{A} = [A \ 0_{n \times h}]$, $\bar{C} = [C \ F]$ 和 $E = [I_n \ 0_{n \times h}]$. 令矩阵

$$W = \begin{bmatrix} E \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times h} \\ C & F \end{bmatrix}.$$

由于 $\text{rank}F = h$, 矩阵 F 为列满秩矩阵, 所以 $\text{rank}W = n + h$, 即 W 为列满秩矩阵. 因此存在矩阵 $T \in \mathbb{R}^{(n+h) \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{(n+h) \times p}$, 使得矩阵方程

$$[T \ M]W = I_{n+h} \quad (5)$$

具有通解 $[T \ M] = W^+ - Z(I_{n+p} - WW^+)$, 其中 W^+ 是矩阵 W 的广义逆矩阵, 可由如下方程给出:

$$W^+ = \Delta W^T = \Delta [E^T \ \bar{C}^T],$$

其中: 矩阵 $\Delta = (E^T E + \bar{C}^T \bar{C})^{-1}$, Z 是具有相应维的任意矩阵. 由于矩阵 W 为列满秩矩阵, 故式(5)的一

个解为 $[T \ M] = (W^T W)^{-1} W^T$, 所以

$$[T \ M] = (W^T W)^{-1} \begin{bmatrix} I_n & C^T \\ 0_{h \times n} & F^T \end{bmatrix},$$

即方程(5)的一个特解为

$$T = (W^T W)^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{h \times n} \end{bmatrix}, \quad M = (W^T W)^{-1} \begin{bmatrix} C^T \\ F^T \end{bmatrix}.$$

引理 1 系统 $\{T\bar{A}, \bar{C}, TD\}$ 是最小相位的, 即其所有的不变零点都在左半开复平面内, 或对于所有满足 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s ,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_{n+h} - T\bar{A} & TD \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} = n + h + k \quad (6)$$

成立当且仅当对于所有满足 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 式(2)成立.

证 令

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} (W^T W)^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & -sC^T \\ 0 & I_h & -sF^T \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} sI_n + sC^T C - A & sC^T F \\ sF^T C & sF^T F \end{bmatrix},$$

那么对于所有满足 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 由于

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{pmatrix} sI_{n+h} - T\bar{A} & TD \\ \bar{C} & 0 \end{pmatrix} = \\ & \text{rank} \left(\Phi_1 \begin{bmatrix} sW^T W - \begin{bmatrix} \bar{A} \\ 0_{h \times n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \\ 0_{h \times n} \end{bmatrix} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ & \text{rank} \begin{pmatrix} s(W^T W) - \begin{bmatrix} \bar{A} \\ 0_{h \times n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \\ 0_{h \times n} \end{bmatrix} \\ \bar{C} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sW^T W &= s \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times h} \\ C & F \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times h} \\ C & F \end{bmatrix} = \\ & s \begin{bmatrix} I_n + C^T C & C^T F \\ F^T C & F^T F \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{bmatrix} sI_{n+h} - T\bar{A} & TD \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} = \\ & \text{rank} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n + sC^T C - A & sC^T F \\ sF^T C & sF^T F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \\ 0_{h \times n} \end{bmatrix} \\ [C \ F] & 0 \end{bmatrix} = \\ & \text{rank} \left(\Phi_2 \begin{bmatrix} \Pi & \begin{bmatrix} D \\ 0_{h \times n} \end{bmatrix} \\ [C \ F] & 0 \end{bmatrix} \right) = \end{aligned}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} [sI_n - A \ 0] \\ 0 \ 0 \\ [C \ F] \ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ 0_{h \times n} \\ 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A \ 0 \ D \\ C \ F \ 0 \end{bmatrix}.$$

可以推断,对于所有满足 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s ,秩条件(6)成立当且仅当式(2)对于所有满足 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s 成立. 证毕.

假设4 系统 $\{T\bar{A}, \bar{C}, TD\}$ 满足下述秩条件:

$$\text{rank}(\bar{C}TD) = \text{rank}(TD). \quad (7)$$

在秩条件(6)–(7)同时成立的情况下,对于给定的对称正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{(n+h) \times (n+h)}$,存在 $L \in \mathbb{R}^{(n+h) \times p}$, $U \in \mathbb{R}^{k \times p}$ 和对称正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{(n+h) \times (n+h)}$ 使得下述矩阵方程成立:

$$\begin{cases} (T\bar{A} - L\bar{C})^T P + P(T\bar{A} - L\bar{C}) = -Q, \\ (TD)^T P = U\bar{C}. \end{cases} \quad (8)$$

文献[1]利用MATLAB中的LMI工具箱通过求解最小化问题给出了矩阵方程(8)的具体方法,即

$$\begin{cases} \min \delta, \\ P > I, \\ P(T\bar{A}) + \Gamma\bar{C} + (P(T\bar{A}) + \Gamma\bar{C})^T < 0, \\ \begin{bmatrix} \delta I & (TD)^T P - U\bar{C} \\ ((TD)^T P - U\bar{C})^T & \delta I \end{bmatrix} > 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $L = -P^{-1}\Gamma$.

引理2^[19] 对任意的具有合适维数的向量 X 和 Y ,下述不等式对于任意正实数 $\mu > 0$ 成立:

$$X^T Y + Y^T X \leq \mu X^T X + \frac{1}{\mu} Y^T Y.$$

引理3^[20] (Schur补引理.) 对给定的对称矩阵

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix},$$

其中: $S_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $S_{11}^T = S_{11}$, $S_{22}^T = S_{22}$,那么以下3个条件是等价的:

- 1) $S < 0$;
- 2) $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 3) $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

3 鲁棒滑模观测器设计(Design of robust sliding mode observer)

对于广义系统(4),考虑如下鲁棒滑模观测器:

$$\begin{cases} \dot{z} = Nz + L_1 y + L_2 u + L_3 f(E\hat{x}, t) + \alpha(y, \hat{x}, t), \\ \hat{x} = z + My, \end{cases} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} \alpha(y, \hat{x}, t) &= \beta \frac{(TD)U(y - \bar{C}\hat{x})}{\|U(y - \bar{C}\hat{x})\|}, \\ N &= T\bar{A} - L\bar{C}, \quad L_1 = L + NM, \\ L_2 &= TB, \quad L_3 = T, \end{aligned}$$

其中参数 β 是一个满足 $\beta \geq \gamma$ 的充分大正常量.

注1 为了消除滑模控制项产生奇异现象,通常采用下式计算滑模控制项^[21–23]:

$$\alpha(y, \hat{x}, t) = \begin{cases} \beta \frac{(TD)U(y - \bar{C}\hat{x})}{\|U(y - \bar{C}\hat{x})\|}, & \|U(y - \bar{C}\hat{x})\| \geq \varepsilon, \\ 0, & \|U(y - \bar{C}\hat{x})\| < \varepsilon, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是人为设定的一个充分小的正数,这使得通过鲁棒滑模观测器而得到的状态估计误差具有充分小的误差界.

定理1 对于满足式(9)的矩阵 L 和正定对称矩阵 P ,如果矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} (T\bar{A} - L\bar{C})^T P + P(T\bar{A} - L\bar{C}) & PT & E^T \\ (PT)^T & -\mu I & 0 \\ E & 0 & -\frac{1}{\mu L_f^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

具有可行解,那么鲁棒滑模观测器(10)能够渐近估计广义系统(4)的状态,其中 $\mu > 0$ 是正实数.

证 假设观测器误差为 $e = \bar{x} - \hat{x}$,那么系统(4)和系统(10)之间误差动态方程为

$$\dot{e} = \dot{\bar{x}} - \dot{\hat{x}} - M\bar{C}\dot{\bar{x}} = (I - M\bar{C})\dot{\bar{x}} - \dot{z}. \quad (13)$$

由式(5)可得 $TE + M\bar{C} = I_{n+p}$,所以式(13)等价于为

$$\dot{e} = \dot{\bar{x}} - \dot{\hat{x}} = \dot{\bar{x}} - \dot{z} - M\bar{C}\dot{\bar{x}} =$$

$$(I - M\bar{C})\dot{\bar{x}} - \dot{z} =$$

$$T\bar{A}\dot{\bar{x}} + TBu + Tf(E\bar{x}, t) + TD\eta - Nz -$$

$$L_1 y - L_2 u - L_3 f(E\hat{x}, t) - \alpha =$$

$$T\bar{A}\dot{\bar{x}} - N(\dot{\hat{x}} - M\bar{C}\dot{\bar{x}}) - L_1 \bar{C}\dot{\bar{x}} + (TB - L_2)u +$$

$$Tf(E\bar{x}, t) + TD\eta - L_3 f(E\hat{x}, t) - \alpha =$$

$$Ne + (T\bar{A} - N + NM\bar{C} - L_1 \bar{C})\dot{\bar{x}} + TD\eta +$$

$$(TB - L_2)u + Tf(E\bar{x}, t) - L_3 f(E\hat{x}, t) - \alpha,$$

其中 $\alpha = \alpha(y, \hat{x}, t)$.根据式(12)–(15)可以得到

$$\dot{e} = Ne + T\tilde{f} + TD\eta - \alpha, \quad (14)$$

其中 $\tilde{f} = f(E\bar{x}, t) - f(E\hat{x}, t)$.

考虑Lyapunov函数 $V = e^T P e$,那么 V 沿着误差方程(14)的微分为

$$\dot{V} = e^T ((T\bar{A} - L\bar{C})^T P + P(T\bar{A} - L\bar{C}))e + \tilde{f}^T T^T P e + e^T P T \tilde{f} + 2e^T P T D \eta - 2e^T P \alpha.$$

根据式(8)(11)可得

$$2e^T PTD\eta \leq 2|e^T(U\bar{C})^T\eta| = 2|(U\bar{C}e)^T\eta| \leq 2\|\eta\|\|U\bar{C}e\| \leq 2\gamma\|U\bar{C}e\|, \quad (15)$$

$$2e^T P\alpha = 2\beta \frac{e^T P(TD)U(y - \bar{C}\hat{x})}{\|U(y - \bar{C}\hat{x})\|} = 2\beta\|U\bar{C}e\|. \quad (16)$$

又根据式(3)可以推得

$$\|\tilde{f}\| = \|f(E\bar{x}, t) - f(E\hat{x}, t)\| \leq L_f\|E(\bar{x} - \hat{x})\|,$$

那么, 基于引理2和 $\tilde{f}^T \tilde{f} \leq L_f^2 e^T E^T E e$, 可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{f}^T T^T P e + e^T P T \tilde{f} &\leq \\ \frac{1}{\mu} e^T P T (P T)^T e + \mu \tilde{f}^T \tilde{f} &\leq \\ \frac{1}{\mu} e^T P T (P T)^T e + \mu L_f^2 e^T E^T E e. \end{aligned} \quad (17)$$

将式(19)–(21)代入 \dot{V} 的表达式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq e^T [(T\bar{A} - L\bar{C})^T P + P(T\bar{A} - L\bar{C}) + \\ &\quad \frac{1}{\mu} P T (P T)^T + \mu L_f^2 E^T E] e. \end{aligned}$$

对式(16)利用Schur补引理(引理3), 可以得到

$$\begin{aligned} (T\bar{A} - L\bar{C})^T P + P(T\bar{A} - L\bar{C}) + \\ \frac{1}{\mu} P T (P T)^T + \mu L_f^2 E^T E < 0, \end{aligned}$$

故 $\dot{V} < 0$. 根据Lyapunov稳定性理论, 可知观测器误差系统(18)是渐近稳定的.

结合式(9)(16), 并根据Schur补引理可直接得到如下定理:

定理 2 假设对于正定对称矩阵 P 、矩阵 U, Γ 和正实数 $\mu > 0$, 使得下述线性矩阵不等式组的最小化问题

$$\begin{cases} \min \delta, \\ P > I, \\ \begin{bmatrix} \Sigma & P T & E^T \\ (P T)^T & -\mu I & 0 \\ E & 0 & -\frac{1}{\mu L_f^2} I \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} \delta I & (T D)^T P - U \bar{C} \\ ((T D)^T P - U \bar{C})^T & \delta I \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (18)$$

具有可行解, 那么鲁棒滑模观测器系统(10)能够渐近估计广义系统(4)的状态. 其中

$$\Sigma = P(T\bar{A}) + \Gamma\bar{C} + (P(T\bar{A}) + \Gamma\bar{C})^T,$$

观测器增益矩阵 $L = -P^{-1}\Gamma$.

在基于鲁棒滑模观测器(10)得到广义系统(4)的状态估计 \hat{x} 之后, 由于增广向量 $\bar{x} = (x^T, d^T)^T$, 容易得

到原系统状态 x 和可测噪声 d 的估计分别为

$$\hat{x} = [I_n \quad 0_{n \times h}] \hat{\bar{x}}, \quad (19)$$

$$\hat{d} = [0_{h \times n} \quad I_h] \hat{\bar{x}}. \quad (20)$$

4 未知输入重构(Reconstruction of unknown inputs)

在原系统中, 未知信息包含了状态方程中的未知输入向量 η 和输出通道的可测噪声 d . 在基于上述方法得到 d 的估计之后, 下面将首先通过一阶鲁棒微分器对广义系统输出的微分进行估计, 然后基于输出微分和状态的估计信息, 给出了一种未知输入 η 的重构方法.

对输出向量的微分进行如下表示:

$$y = \bar{C}\bar{x} = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T,$$

其中: $y_i = \bar{C}_i \bar{x}$ ($i = 1, 2, \dots, p$), 向量 \bar{C}_i 为输出矩阵 \bar{C} 的第 i 个行向量. 那么根据假设2可知, 输出分量的微分 \dot{y}_i 范数有界, 则基于文献[24], 考虑如下鲁棒滑模微分器:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{i,1} = \xi_{i,2} - w_{i,1}, \\ \dot{\xi}_{i,2} = -w_{i,2}, \end{cases} \quad (21)$$

其中:

$$\begin{cases} w_{i,0} = \xi_{i,1} - y_i, \\ w_{i,j} = \kappa_{i,j} |w_{i,j-1}|^{(2-j)/(3-j)} \text{sgn } w_{i,j-1}, \end{cases}$$

$\kappa_{i,j} > 0$ ($j = 1, 2$)为微分器增益. 定义输出分量 y_i 及其微分 \dot{y}_i 与微分器(25)状态量之间的误差分别为

$$e_{y_i} = y_i - \xi_{i,1}, \quad e_{\dot{y}_i} = \dot{y}_i - \xi_{i,2},$$

那么通过与文献[24]相似的方法合理选择微分器增益 $\kappa_{i,j}$, 在有限时间内可以到达滑模面 $e_{y_i} = e_{\dot{y}_i} = 0$, 即在有限时间内 $\xi_{i,2}$ 是输出分量微分 \dot{y}_i 的精确估计. 所以当 $i = 1, 2, \dots, p$ 时, 基于鲁棒滑模精确微分器(25)可以得到系统输出微分的估计为

$$\xi = (\xi_{1,2}, \xi_{2,2}, \dots, \xi_{p,2})^T, \quad (22)$$

其中 ξ 是 $\dot{y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_p)^T$ 的精确估计.

在基于鲁棒滑模微分器(25)得到输出微分的估计之后, 提出对系统未知输入进行重构的方法如下.

定理 3 在假设1–4的前提下, 如下估计:

$$\begin{aligned} \hat{\eta} = (\bar{C}TD)^+ [(I_p - \bar{C}M)\xi - \bar{C}T\bar{A}\hat{x} - \\ \bar{C}T B u - \bar{C}T f(E\hat{x}, t)] \end{aligned} \quad (23)$$

是未知输入的一个最小二乘最优解, 其中 $(\cdot)^+$ 表示矩阵的左伪逆矩阵, 即

$$(\bar{C}TD)^+ = [(\bar{C}TD)^T (\bar{C}TD)]^{-1} (\bar{C}TD)^T,$$

ξ 为鲁棒滑模微分器(25)给出的系统输出微分估计.

证 由式(5)可知 $TE + M\bar{C} = I_{n+h}$, 结合广义系统(4)可以得到

$$(I_{n+h} - M\bar{C})\dot{\bar{x}} = T\bar{A}\bar{x} + TBu + Tf(E\bar{x}, t) + TD\eta.$$

上式可进一步改写为

$$\dot{\bar{x}} = T\bar{A}\bar{x} + TBu + Tf(E\bar{x}, t) + TD\eta + M\bar{C}\dot{\bar{x}}.$$

对该式两边同时左乘 \bar{C} 可以得到

$$\begin{aligned} \bar{C}TD\eta = \\ (I_p - \bar{C}M)\dot{y} - \bar{C}T\bar{A}\bar{x} - \bar{C}TBu - \bar{C}Tf(E\bar{x}, t), \end{aligned}$$

于是

$$\eta = (\bar{C}TD)^+ [(I_p - \bar{C}M)\dot{y} - \bar{C}T\bar{A}\bar{x} - \bar{C}TBu - \bar{C}Tf(E\bar{x}, t)] \quad (24)$$

就是满足式(4)的未知输入的最小二乘最优解. 在式(28)和式(29)之间的误差方程为

$$\tilde{\eta} = (\bar{C}TD)^+ [(I_p - \bar{C}M)\tilde{\xi} - \bar{C}T\bar{A}\tilde{x} - \bar{C}T\tilde{f}],$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \eta - \hat{\eta}, \quad \tilde{\xi} = \dot{y} - \hat{\xi}, \quad \tilde{x} = \bar{x} - \hat{x}, \\ \tilde{f} &= f(E\bar{x}, t) - f(E\hat{x}, t). \end{aligned}$$

基于鲁棒滑模观测器(10)和鲁棒滑模微分器(25)可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi} = 0,$$

所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\eta} = 0$. 故 $\hat{\eta}$ 在有限时间内是收敛到未知输入的最小二乘最优解. 证毕.

5 仿真(Simulation)

本节将本文提出的状态估计和同时未知输入和可测噪声重构方法应用到火车系统^[20]. 该系统由发动机引擎E和客车厢C组成, 发动机引擎和客车厢之间通过弹簧连接, 其中弹簧的刚度系数 κ 和 ρ 分别表示弹簧的线性和非线性特性, 系统连接图请参看文献[18]. M_E 和 M_C 分别为引擎质量和客车厢质量. 可以得到火车系统非线性状态空间模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{M_E} & -\alpha g & \frac{\kappa}{M_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\kappa}{M_C} & 0 & -\frac{\kappa}{M_C} & -\alpha g \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{M_E}(x_2 + x_4)^2 \\ 0 \\ \frac{\rho}{M_C}(x_2 + x_4)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{M_E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \eta, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} d, \end{aligned}$$

其中: α 为滚动摩擦, η 为系统的未知输入向量和 d 为输出通道的可测噪声向量. 状态向量定义为

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T,$$

其中 x_1 和 x_2 分别为火车引擎的位置和速度, x_3 和 x_4 分别为客车厢的位置和速度. 在仿真中, 系统参数设置为 $M_E = 10 \text{ kg}$, $M_C = 5 \text{ kg}$, $\kappa = 4.87 \text{ N/s}$, $\alpha = 0.5 \text{ s/m}$, $\rho = 1 \text{ N/s}$ 和 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 那么可以得到如式(1)的系统, 其参数如下:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.487 & -4.9 & 0.487 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.974 & 0 & -0.974 & -4.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

系统的非线性项为

$$f(x, t) = [0 \quad 0.1(x_2 + x_4)^2 \quad 0 \quad 0.2(x_2 + x_4)^2]^T,$$

其中Lipschitz常量 $L_f = 0.088^{[18]}$.

根据式(4)可得到原系统(1)的广义系统, 容易得到系数矩阵 \bar{A} , \bar{C} 和 E , 从而可以得到矩阵方程(5)的一个特解矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过计算容易得到

$\bar{C}TD = [0.5 \ 0 \ 0]^T$, $TD = [0.5 \ -0.1 \ 0 \ 0 \ 0.1]^T$, 所以 $\text{rank}(\bar{C}TD) = \text{rank}(TD) = 1$, 即秩条件(7)是成立的. 假设正实数 $\mu = 500$, 那么通过MATLAB中的LMI工具箱对最小化问题(22)进行求解, 得到

$$\begin{aligned} L &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 5.5082 & -0.4646 & 0.0002 \\ -1.4626 & 0.7149 & -0.0002 \\ 0.0002 & -0.0003 & 0.0198 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0058 \\ 0.7892 & 0.4304 & -0.0002 \end{bmatrix}, \\ U &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 4.0690 \\ 1.6675 \\ -0.0079 \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

从而可以得到满足式(12)–(15)的矩阵 N , L_1 , L_2 和 L_3 . 在仿真过程中, 假设系统的未知输入和可测噪声向量分别为

$$\eta = 3.2 \cos(4t), \quad d = 2.5 \sin(5t) + 1.8 \cos(7t),$$

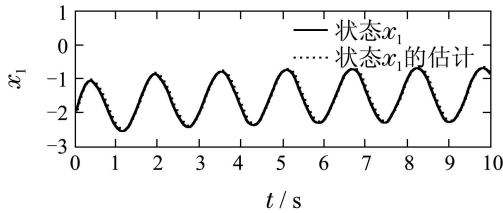
系统(1)的状态初始值设置为

$$x(0) = (-2.2, 1.7, -0.4, -1.4)^T,$$

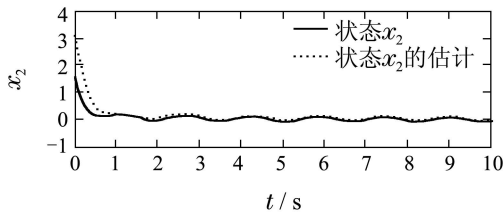
观测器状态初始值设置为

$$z(0) = (2.5, 4.12, 3.3, 4.6, -1.9)^T,$$

那么通过鲁棒滑模观测器系统(10)(23)可以得到原系统(1)的状态估计曲线如图1所示. 与此同时, 根据式(24)可以得到可测噪声的估计曲线如图2所示.



(a) 状态 x_1 和 x_2 的估计曲线



(b) 状态 x_3 和 x_4 的估计曲线

图 1 状态估计曲线
Fig. 1 Estimate of x

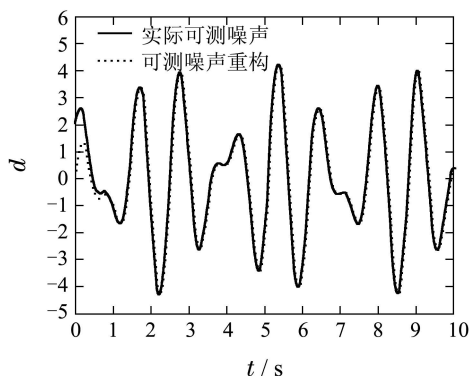


图 2 可测噪声 d 的重构曲线
Fig. 2 Reconstruction of d

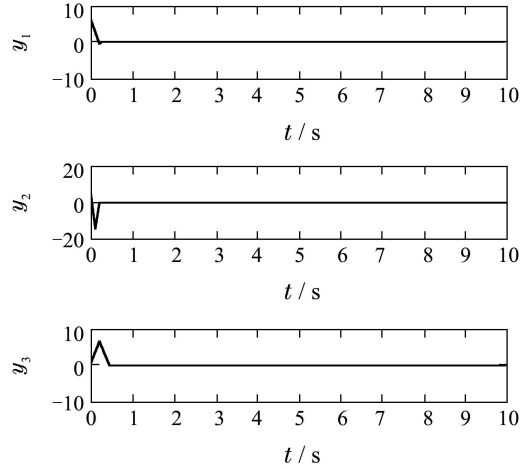


图 3 系统输出微分的估计误差曲线
Fig. 3 Estimate of output derivatives

为了进一步对系统未知输入的估计, 需要鲁棒滑模微分器(25)对系统输出的微分进行精确估计. 如果微分估计初值设置为

$$\xi_{1,2}(0) = -1.5, \xi_{2,2}(0) = -1.8, \xi_{3,2}(0) = -1.6,$$

那么基于微分器(25)可以得到系统输出微分 \dot{y} 的估计误差曲线如图3所示.

基于广义系统的状态估计和输出微分的精确估计, 通过式(27)可以得到系统未知输入的重构曲线如图4所示, 从图4 可以看出本文所提出的未知输入重构方法可以在很短时间内实现对未知信息的重构.

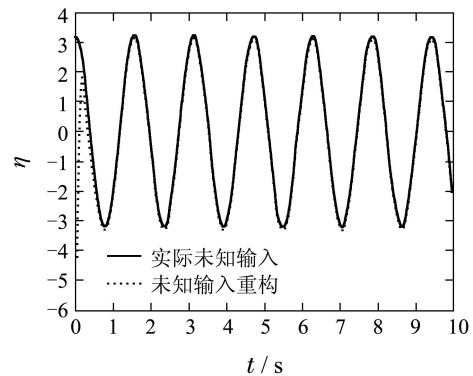


图 4 未知输入 η 的重构曲线
Fig. 4 Reconstruction of unknown input η

6 结论(Conclusions)

本文基于LMI和广义系统观测器理论, 提出了一类具有未知输入和可测噪声的Lipschitz非线性系统未知输入观测器设计方法. 将原系统转化为具有特殊形式的广义系统, 并设计广义系统观测器实现了对原Lipschitz非线性系统的状态估计和可测噪声重构, 并通过线性矩阵不等式的方法给出了观测器存在的条件; 之后, 通过设计鲁棒滑模微分器实现了对广义系统输出微分的估计, 在此基础上提出了一种新的未知信息重构方法. 该方法不仅达到了对具有未知输入

和可测噪声的Lipschitz非线性系统的状态估计, 而且实现了对未知输入和可测噪声重构的目的.

参考文献(References):

- [1] CORLESS M, TU J. State and input estimation for a class of uncertain systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 757 – 764.
- [2] HA Q P, TRINH P C. State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1779 – 1785.
- [3] HUI S, ŽAK S H. Observer design for systems with unknown inputs [J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2005, 15(4): 431 – 446.
- [4] FLOQUET T, EDWARDS C, SPURGEON S K. On sliding mode observers for systems with unknown inputs [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2007, 21(8/9): 638 – 656.
- [5] FRIDMAN L, SHTESSEL Y, EDWARDS C, et al. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18(4/5): 399 – 412.
- [6] SHTESSEL Y B, BAEV S, EDWARDS C, et al. HOSM observer for a class of non-minimum phase causal nonlinear MIMO systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(2): 843 – 548.
- [7] AHRENS J H, KHALIL H K. High-gain observers in the presence of measurement noise: a switched-gain approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 45(4): 936 – 943.
- [8] KOENING D, MARX B, JACQUET D. Unknown input observers for switched nonlinear discrete time descriptor system [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 51(3): 373 – 379.
- [9] KALSI K, LIAN J, HUI S, et al. Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: a high-gain approach [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 347 – 353.
- [10] LUNGU M, LUNGU R. Full-order observer design for linear systems with unknown inputs [J]. *International Journal of Control*, 2012, 85(10): 1602 – 1615.
- [11] 张强, 吴庆宪, 姜长生, 等. 一种新颖的鲁棒模糊滑模观测器设计及干扰重构方法 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 30(2): 186 – 193. (ZHANG Qiang, WU Qingxian, JIANG Changsheng, et al. A novel robust fuzzy sliding mode observer design and disturbance reconstruction [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 30(2): 186 – 193.)
- [12] BEJARANO F J, PISANO A. Switched observers for switched linear systems with unknown inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(3): 681 – 686.
- [13] RÍOS H, DAVILA J, FRIDMAN L. High-order sliding mode observers for nonlinear autonomous switched systems with unknown inputs [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(10): 2975 – 3002.
- [14] 杨俊起, 朱芳来. 状态估计与未知输入和可测噪声同时重构之方法研究 [J]. *控制与决策*, 2013, 28(8): 1145 – 1151. (YANG Junqi, ZHU Fanglai. The study of the state estimation and simultaneous unknown input and measurement noise reconstruction [J]. *Control and Decision*, 2013, 28(8): 1145 – 1151.)
- [15] DIMASSI H, LORIA A, BELGHITH S. Continuously-implemented sliding-mode adaptive unknown-input observers under noisy measurements [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(12): 1194 – 1202.
- [16] LEE D J, PARK Y, PARK Y S. Robust sliding mode descriptor observer for fault and output disturbance estimation of uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(11): 2928 – 2934.
- [17] 杨俊起, 朱芳来. 基于高增益鲁棒滑模观测器的故障检测和隔离 [J]. *自动化学报*, 2012, 38(12): 2005 – 2013. (YANG Junqi, ZHU Fanglai. FDI based on high-gain robust sliding mode observers [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(12): 2005 – 2013.)
- [18] ALDEEN M, SHARMA R. Estimation of states, faults and unknown disturbances in non-linear systems [J]. *International Journal of Control*, 2008, 81(8): 1195 – 1201.
- [19] 项基, 苏宏业, 褚健. 一类不确定系统的滑模观测器设计 [J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(6): 996 – 1000. (XIANG Ji, SU Hongye, CHU Jian. Sliding-mode observer design for a class of uncertain system [J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(6): 996 – 1000.)
- [20] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. (YU Li. *Robust Control—LMI Approach* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [21] EDWARDS C, SPURGEON S K, PATTON R J. Sliding mode observers for fault detection and isolation [J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 541 – 535.
- [22] EDWARDS C, AKOACHERE A, SPURGEON S K. Sliding-mode output feedback controller design using linear matrix inequalities [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(1): 115 – 119.
- [23] ZHU F, CEN F. Full-order observer-based actuator fault detection and reduced-order observer-based fault reconstruction for a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Journal of Process Control*, 2010, 20(10): 1141 – 1149.
- [24] LEVANT A. High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control [J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(9/10): 427 – 434.

作者简介:

杨俊起 (1979-), 男, 讲师, 博士, 研究方向为观测器设计、故障检测与重构等, E-mail: yjq@hpu.edu.cn;

朱芳来 (1965-), 男, 博士, 博士生导师, 研究方向为基于模型的故障诊断等, E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn.