

多机器人编队离散模型及队形控制稳定性分析

吴晋^{1†}, 张国良¹, 曾静², 徐君¹

(1. 第二炮兵工程大学 301教研室, 陕西 西安 710025; 2. 第二炮兵工程大学 数学教研室, 陕西 西安 710025)

摘要: 针对包含绕心运动情况下的多机器人编队进行离散建模, 并利用该模型解决保持队形期望前端始终朝着编队前进方向的控制问题. 以控制多机器人编队收敛到期望的队形并镇定到预设运动规律上为目标, 定义了一类通信拓扑图, 基于该类图提出了一种分布式协同控制算法. 给出了该控制算法下编队系统渐进稳定的充分必要条件及反馈控制参数的收敛域. 证明了在该充分必要条件下可实现编队收敛到期望的队形和预设运动规律上的目标. 仿真实验表明, 在该算法控制下多机器人编队较好地收敛到期望队形并按预设规律运动, 且过程中始终保持队形期望前端朝着编队前进方向, 进而验证了该算法的有效性和正确性.

关键词: 队形控制; 运动模型; 稳定性分析; 分布式控制; 代数图论

中图分类号: TP242 文献标识码: A

Discrete-time modeling for multirobot formation and stability of formation control algorithm

WU Jin^{1†}, ZHANG Guo-liang¹, ZENG Jing², XU Jun¹

(1. 301 Teaching and Research Section, The Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025, China;

2. Mathematics Teaching and Research Section, The Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: For the distributed multirobot formation with revolving round, a discrete-time kinematic model for the formation center is developed, and is applied to keep the desired front-end to turn towards the moving direction. A kind of communication topology graph is defined by which the robots converge to the desired geometry formation with desired motion rules. Then, a distributed discrete coordination control algorithm is proposed based on that graph. A sufficient and necessary condition of asymptotic stability of the formation system and the convergence region of feedback control parameter are given. It is proved that the formation can converge to the desired geometry formation with desired motion rules under this sufficient and necessary condition. Simulation results validate the efficacy of the control algorithm in achieving these goals.

Key words: formation control; kinematics model; stability analysis; distributed control; algebraic graph theoretic

1 引言(Introduction)

编队控制是多机器人协调控制中的一个研究热点, 其目标在于通过自主调整各机器人的行为使所有个体保持一定的几何构型. 事实上, 编队控制是一种几何构型严格的聚结控制, 在诸如多机器人协调控制^[1-2]、地面车辆队形保持^[3]、无人机编队^[4-5]、自主水下装置^[6], 以及航天器编队^[7-8]中得到广泛研究.

多机器人编队系统的稳定性是编队完成各项目标任务的基础. 针对理想条件下连续模型的编队控制稳定性, Fax^[9], Lafferriere^[10]等利用代数图论的方法进行了深入分析. 郑军等^[11]针对时间离散条件下基于输出反馈的队形控制稳定性进行了分析. 杨波等^[12]分析了在弱通信条件下以一定参考速度前进的分布式编

队控制的稳定性. 王佳^[13]提出了输入-状态弦稳定性的概念, 结合输入-状态稳定性、弦稳定性的概念以及奇异摄动理论的分析方法对多智能体系统的输入-状态弦稳定性进行了讨论. 姜丽梅等^[14]基于一致性理论, 提出了一种时延依赖的分布式编队控制算法, 根据Lyapunov稳定性定理, 得到了线性矩阵不等式(LMI)形式的时延独立和时延依赖的稳定条件. 然而目前针对包含有绕心运动情况下的多机器人编队离散建模及稳定性分析还比较少, 故本文将就此展开讨论.

本文对于多机器人编队控制的目标是: 控制一组自主式移动机器人, 以期望的队形, 期望的速度及轨迹进行运动, 进而完成目标任务. 本文主要包括以下

两部分工作: 1) 对包含绕心(编队中心)运动情况下的多机器人编队离散建模, 解决了编队在运动的过程中始终保持队形期望前端朝着编队前进方向的问题; 2) 对一类分布式队形控制的稳定性进行了分析, 重点讨论使编队稳定时输出反馈控制参数的阈值范围, 且最终成功地实现了编队快速镇定到期望队形及预定运动规律上的目标.

2 多机器人系统离散模型(Discrete-time model of multi-robots system)

考虑由 N 个万向轮式机器人 $R_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 组成的多机器人编队. 在全局坐标系 $x_o o_o y_o$ 下, 每个机器人 R_i 的状态为 $X_{oi} = (x_{oi}, y_{oi}, \theta_{oi})^T$, $V_{oi} = (v_{xoi}, v_{yoi}, \omega_{oi})^T$; 将队形中心虚拟为一中心机器人 R_e , 其状态为 $X_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T$, $V_e = (v_{xe}, v_{ye}, \omega_e)^T$. 对每个机器人通常取如下离散模型:

$$\begin{cases} X_{oi}(k+1) = X_{oi}(k) + V_{oi}(k)T, \\ V_{oi}(k+1) = V_{oi}(k) + U_{oi}(k)T, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $T > 0$ 为采样时间. 然而, 当编队在运行过程中伴随有绕心运动时, 即 ω_e 是时间 k 的函数, 每个机器人 R_i 相对 R_e 而言, 其牵连运动将包含转动分量. 正是由此部分的影响致使多机器人编队的离散模型有别于式(1). 本文正是对该情况下的编队离散模型展开论述的.

2.1 坐标转换(Coordinate transforming relation)

以 (x_e, y_e) 为原点 o_c , 以中心机器人的正方向为 x_c 轴, 根据右手规则建立队形中心坐标系 $x_c o_c y_c$, 则中心坐标系相对全局坐标的旋转角为 θ_e (图1所示).

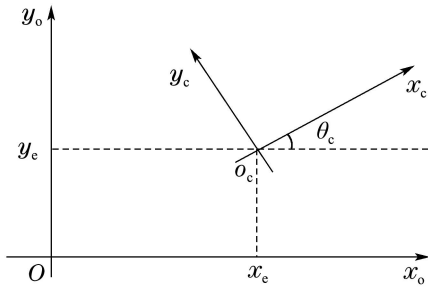


图1 全局坐标系与中心坐标系

Fig. 1 World coordinates and center coordinates

根据图1可较易得到由全局坐标到中心坐标系的转换关系为

$$\begin{cases} x_c = (x_o - x_e) \cos \theta_e + (y_o - y_e) \sin \theta_e, \\ y_c = -(x_o - x_e) \sin \theta_e + (y_o - y_e) \cos \theta_e, \\ \theta_c = \theta_o - \theta_e, \\ v_{xc} = (v_{xo} - v_{xe}) \cos \theta_e + (v_{yo} - v_{ye}) \sin \theta_e - \\ \quad (x_o - x_e) \omega_e \sin \theta_e + (y_o - y_e) \omega_e \cos \theta_e, \\ v_{yo} = -(v_{xo} - v_{xe}) \sin \theta_e + (v_{yo} - v_{ye}) \cos \theta_e - \\ \quad (x_o - x_e) \omega_e \cos \theta_e - (y_o - y_e) \omega_e \sin \theta_e, \\ \omega_c = \omega_o - \omega_e. \end{cases} \Rightarrow$$

矩阵形式表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_c &= \begin{bmatrix} A & O \\ B & A \end{bmatrix} (\mathbf{q}_o - \mathbf{q}_e), \\ \mathbf{q}_o &= [x_o \ y_o \ \theta_o \ v_{xo} \ v_{yo} \ \omega_o]^T, \\ \mathbf{q}_e &= [x_e \ y_e \ \theta_e \ v_{xe} \ v_{ye} \ \omega_e]^T, \\ \mathbf{q}_c &= [x_c \ y_c \ \theta_c \ v_{xc} \ v_{yc} \ \omega_c]^T, \\ A &= \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \sin \theta_e & 0 \\ -\sin \theta_e & \cos \theta_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} -\omega_e \sin \theta_e & \omega_e \cos \theta_e & 0 \\ -\omega_e \cos \theta_e & -\omega_e \sin \theta_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

在全局坐标系中, 系统的模型为 $\Gamma_o(X_o, V_o, U_o)$, 其中状态变量

$$\begin{aligned} X_o &= (X_{o1}^T, X_{o2}^T, \dots, X_{oN}^T)^T, \\ V_o &= (V_{o1}^T, V_{o2}^T, \dots, V_{oN}^T)^T. \end{aligned}$$

在中心坐标系中, 系统的模型为 $\Gamma_c(X_c, V_c, U_c)$, 其中状态变量

$$\begin{aligned} X_c &= (X_{c1}^T, X_{c2}^T, \dots, X_{cN}^T)^T, \\ V_c &= (V_{c1}^T, V_{c2}^T, \dots, V_{cN}^T)^T. \end{aligned}$$

则对每一个机器人有

$$\begin{cases} X_{ci} = A(X_{oi} - X_e), \\ V_{ci} = A(V_{oi} - V_e) + B(X_{oi} - X_e). \end{cases} \quad (3)$$

对于数量为 N 的多机器人系统便有

$$\begin{cases} X_c = I_N \otimes A(X_o - X_e^*), \\ V_c = I_N \otimes A(V_o - V_e^*) + I_N \otimes B(X_o - X_e^*), \end{cases} \quad (4)$$

其中: I_N 为维数 N 的单位向量; $X_e^* = \mathbf{1}_N \otimes X_e$, $V_e^* = \mathbf{1}_N \otimes V_e$, $\mathbf{1}_N$ 表示 $(1, 1, \dots, 1)^T$ 的 N 维列向量.

2.2 各系统离散模型(Discrete model in each system)

在中心坐标系中系统 Γ_o 的离散模型为

$$\begin{cases} X_c(k+1) = X_c(k) + V_c(k)T, \\ V_c(k+1) = V_c(k) + U_c(k)T, \end{cases} \quad (5)$$

其中: $T > 0$ 为系统采样时间, $U_c(k) = U_c(X_c(k))$, $V_c(k)$ 为中心坐标系下的控制输入量. 在全局坐标系下, 编队中心虚拟机器人满足如下关系:

$$\begin{cases} X_e^*(k+1) = X_e^*(k) + V_e^*(k)T, \\ V_e^*(k+1) = V_e^*(k) + U_e^*(k)T, \end{cases} \quad (6)$$

其中: $U_e^*(k) = \mathbf{1}_N \otimes U_e(k)$, $U_e(k)$ 为编队中心虚拟机器人的输入控制量, 即为使多机器人编队中心按期望规律运动的控制输入量, 编队中心运动规律便由

式(6)描述. 令

$$\begin{cases} A_N(k) = I_N \otimes A(k), \\ A_a = [I_N \otimes A(k+1)]^{-1}[I_N \otimes A(k)], \\ A_{b1} = [I_N \otimes A(k+1)]^{-1}[I_N \otimes B(k)], \\ A_{b2} = [I_N \otimes A(k+1)]^{-1}[I_N \otimes B(k+1)]. \end{cases}$$

将式(4)代入式(5)可得到在全局坐标系下系统 Γ_o 的离散状态空间方程为

$$\begin{bmatrix} X_o(k+1) \\ V_o(k+1) \end{bmatrix} = \Psi(k) \begin{bmatrix} X_o(k) \\ V_o(k) \end{bmatrix} + H(k) \begin{bmatrix} X_e^*(k) \\ V_e^*(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_{Nd} \\ U_o(k)T \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Psi(k) = \begin{bmatrix} A_a + A_{b1}T & A_aT \\ -A_{b2}A_a + A_{b1}A_a - A_{b2}A_aT \end{bmatrix}, \\ H(k) = \begin{bmatrix} I_{Nd} & TI_{Nd} \\ O_{Nd} & I_{Nd} \end{bmatrix} - \Psi(k), \\ U_o(k) = -A_{b2}A_{b1}T[X_o(k) - X_e^*(k)] + A_N^{-1}(k+1)U_o(k) + U_e^*(k), \end{cases} \quad (8)$$

其中 $U_o(k) = U_o(X_o(k), V_o(k))$ 为全局坐标系下的控制队形输入量.

定义 1 若各机器人相对编队中心的期望位置向量分别为 $X_{p1}, X_{p2}, \dots, X_{pN}$, 则称 $P = (X_{p1}^T, X_{p2}^T, \dots, X_{pN}^T)^T$ 为队形向量, 其中 $X_{pi} \in \mathbb{R}^3$. n 个机器人构成某种队形并按期望规律运动当且仅当在中心坐标系内有 $X_{ci} - X_{pi} = \mathbf{0}, V_{ci} = \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, N$.

令 $X_c^* = X_c - P, V_c^* = V_c$, 则由式(5)知以 X_c^*, V_c^* 为状态变量的系统 Γ_c^* 的离散状态空间方程为

$$\begin{cases} X_c^*(k+1) = X_c^*(k) + V_c^*(k)T, \\ V_c^*(k+1) = V_c^*(k) + U_c^*(k)T, \\ U_c^*(k) = U_c(X_c(k) - P, V_c(k)), \end{cases} \quad (9)$$

$$U_c^*(k) = U_c(X_c(k) - P, V_c(k)), \quad (10)$$

其中 $U_c^*(k) = U_c^*(X_c^*(k), V_c^*(k))$ 为在系统 Γ_c^* 中的控制输入量.

3 编队控制律设计(Design of formation control)

3.1 通信拓扑图(Communication graph)

在多机器人系统中, 每个个体通过无线通信网络连接. 这种网络包括基于数据包的通讯网络及基于测量的通讯网. 在本文中将这种网络抽象成信息流的拓扑形式, 即通信拓扑图. 图论是研究协调控制和机器人队形稳定性分析的重要工具, 尤其是图的拓扑特征除了用于研究稳定性和可控性外, 还可针对某种特定的队形模式选择合适的控制器, 甚至决定该控制器是否存在^[11].

机器人 R_i 代表通信拓扑图 $G = (V(G), E(G))$ 中

的顶点 v_i , 如果有由机器人 R_i 到机器人 R_j 的通信链路存在, 则有 $(v_i, v_j) \in E(G)$, 即表明 R_j 是 R_i 的邻居. 为了让多机器人编队能收敛到期望队形, 并要求编队中心按期望的规律运动, 设定机器人 R_1 为领航机器人, 由其产生编队中心虚拟机器人, 并按任务意图控制中心机器人运动规律. 在通信链路上机器人 R_1 仅将状态信息传输给邻居, 实时将编队中心机器人控制律 u_e 向环境中发布, 但并不获得邻居状态信息或者并不将获得的邻居状态信息用于自身运动控制, 即 R_1 不会成为其他机器人的邻居. 在通信网络中, 每个机器人只能与自己的邻居进行通信, 获得其状态信息, 显然本文采用的是有向通信拓扑图, 且要求除 R_1 外其余机器人构成的通信拓扑图是连通的双向图. 下面定义这一类图:

定义 2 图 $G = (V(G), E(G))$ 是含生成树的有向图, 且 $(v_1, v_i) \notin E(G), i = 2, 3, \dots, N$, 除去 G 中 v_1 节点及其邻边后的子图为 $G^* = (V^*(G^*), E^*(G^*))$, 其中 $E^*(G^*) = \{(v_i, v_j) \in E(G) | v_i, v_j \in V^*(G^*)\}$, $V^*(G^*) = \{v_2, v_3, \dots, v_N\}$. 若 G^* 为连通的双向图, 则称图 G 为 Ω 类图. 图2中所示的拓扑图就是属于 Ω 类图.

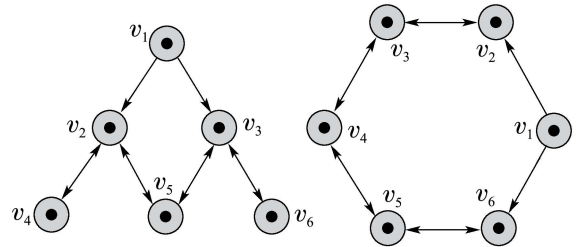


图2 几类简单的 Ω 类图
Fig. 2 A few Ω graphs

显然文中采用的通信拓扑图就是属于 Ω 类图, 且对于 Ω 类图有如下引理.

引理 1 若 $G \in \Omega$, 则0是图 G 的Laplacian矩阵 L 的单一特征值, 其余 $N - 1$ 各特征值均为正数.

证 由图 $G \in \Omega$ 的条件可设其邻接矩阵和入度矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_N \end{bmatrix}.$$

由子图 $G^* = (V^*(G^*), E^*(G^*))$ 为连通的双向图知 $a_{rs} = a_{sr} (2 \leq r \leq N, 2 \leq s \leq N, r \neq s)$. 则有 $G = (V(G), E(G))$ 的Laplacian矩阵为

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & d_2 & -a_{23} & \cdots & -a_{2N} \\ -a_{31} & -a_{32} & d_3 & \cdots & -a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & -a_{N3} & \cdots & d_N \end{bmatrix}.$$

令实对称矩阵 L_2 为

$$L_2 = \begin{bmatrix} d_2 & -a_{23} & \cdots & -a_{2N} \\ -a_{32} & d_3 & \cdots & -a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N2} & -a_{N3} & \cdots & d_N \end{bmatrix},$$

则有

$$|\lambda I - L| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \lambda - d_2 & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda - d_3 & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & \lambda - d_N \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|\lambda I - L| = |\lambda| |\lambda I - L_2|.$$

令矩阵 L 的特征值集合为 $\lambda(L)$, 矩阵 L_2 的特征值集合为 $\lambda(L_2)$, 由上式知

$$\lambda(L) = \lambda(L_2) + \{0\}.$$

根据矩阵论关于特征值估计的相关知识, 有如下引理:

引理 2 实对称矩阵的特征值都是实数.

由引理2知矩阵 L_2 的特征值都是实数, 及 $\lambda(L_2)$ 为实数集. 进而可知 $\lambda(L)$ 也为实数集, 矩阵 L 的特征值都是实数.

引理 3 设 $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是有向图 $G = (V(G), E(G))$ 的Laplacian矩阵, $\mathbf{1}_N = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$, 则有如下结论:

1) L 至少有一个0特征值, $\mathbf{1}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$ 是其对应的一个特征向量, 即 $L\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$;

2) 如果 G 包含生成树, 那么0是 L 的单一特征值, 其余 $N - 1$ 各特征值均具有正实部.

结合引理3便可知0是图 G 的Laplacian矩阵 L 的单一特征值, 其余 $N - 1$ 各特征值均为正数. 即引理1得证.

3.2 各系统中的控制律 (Control law in each systems)

在通信网络中, 每个机器人只与自己的邻居进行通信, 获得其状态信息. 因此, 在系统 Γ_o^* 中, 则设计如下输出反馈控制律:

$$u_{ci}^* = \sum_{j \in N_i} \omega_1 (X_{cj}^* - X_{ci}^*) + \sum_{j \in N_i} \omega_2 (V_{cj}^* - V_{ci}^*), \quad (11)$$

其中 N_i 为机器人 R_i 的邻居集合. 故在系统 Γ_c^* 中, 对于多机器人系统有

$$U_c^*(k) = -\omega_1 (L \otimes I_d) X_c^*(k) - \omega_2 (L \otimes I_d) V_c^*(k), \quad (12)$$

其中 d 为 X_{ci}^* 的维数, 此时有 $d = 3$; I_d 为维数为 d 的单位向量. 由式(9)得, 闭环系统 Γ_c^* 状态方程为

$$\begin{cases} X_c^*(k+1) = X_c^*(k) + V_c^*(k)T, \\ V_c^*(k+1) = \\ V_c^*(k) - \omega_1 (L \otimes I_d) T X_c^*(k) - \\ \omega_2 (L \otimes I_d) T V_c^*(k). \end{cases} \quad (13)$$

将 $X_c^* = X_c - P$, $V_c^* = V_c$ 代入 $U_o^*(k)$, 可得闭环系统 Γ_c 中控制律为

$$U_c(k) = -\omega_1 (L \otimes I_d) [X_c(k) - P] - \omega_2 (L \otimes I_d) V_c(k), \quad (14)$$

故闭环系统 Γ_c 状态方程为

$$\begin{cases} X_c(k+1) = X_c(k) + V_c(k)T, \\ V_c(k+1) = \\ V_c(k) - \omega_1 (L \otimes I_d) [X_c(k) - P]T - \\ \omega_2 (L \otimes I_d) V_c(k)T. \end{cases} \quad (15)$$

将式(14)代入式(8)中可得

$$U_o(k) = \omega_1 [L \otimes A^{-1}(k+1)]P + U_e^*(k) - [A_{b2}A_{b1}T + \omega_1 (L \otimes I_d)A_a + \omega_2 (L \otimes I_d)A_{b1}](X_o - X_e^*) - \omega_2 (L \otimes I_d)A_a(V_o - V_e^*).$$

令

$$\begin{cases} a_1 = A_{b2}A_{b1}T + \omega_1 (L \otimes I_d)A_a + \omega_2 (L \otimes I_d)A_{b1}, \\ a_2 = \omega_2 (L \otimes I_d)A_a, \\ a_3 = \omega_1 [L \otimes A^{-1}(k+1)], \end{cases}$$

则有系统 Γ_o 的状态方程及控制律为

$$U_o(k) = -a_1 [X_o(k) - X_e^*(k)] - a_2 [V_o(k) - V_e^*(k)] + a_3 P + U_e^*(k). \quad (16)$$

令

$$U_f(k) = -a_1 [X_o(k) - X_e^*(k)] - a_2 [V_o(k) - V_e^*(k)] + a_3 P,$$

则 $U_o(k) = U_f(k) + U_e^*(k)$. $U_f(k)$ 为队形保持输入控制量, 由系统输出反馈控制器获得; $U_e^*(k)$ 为编队中心按期望规律运动的控制律, 由任务层通过领航机器人给出, 实际是系统 Γ_o 的外部输入控制量. 只要任务层给出预先规划好的 $U_e^*(k)$, 便可以保证编队整体按预

设规律运动且保持队形期望前端始终朝着编队前进的方向。

由于系统 Γ_c^* 是由系统 Γ_c 线性变换得到的, 系统 Γ_c 是由系统 Γ_o 经平移旋转变换得到的, 故系统 Γ_c^* 稳定就等价系统 Γ_c 稳定, 系统 Γ_c 稳定就表现为系统 Γ_o 的稳定。

4 算法稳定性分析(Formation control algorithm stability analysis)

4.1 相关理论(Correlative theory)

令 $L^* = L \otimes I_d$, 闭环系统 Γ_o^* 的状态方程可写为如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} X_c^*(k+1) \\ V_c^*(k+1) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} X_c^*(k) \\ V_c^*(k) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} I_{Nd} & TI_{Nd} \\ -\omega_1 L^* T & I_{Nd} - \omega_2 L^* T \end{bmatrix},$$

其中 I_{Nd} 是维数为 Nd 的单位向量。闭环系统 Γ_o^* 的稳定性取决于矩阵 Φ 特征值的分布情况。首先, 引入两个关于矩阵 L^* 的特征值分布的引理:

引理4 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 为矩阵 L 的特征值, 则矩阵 L^* 的特征值集合为 $\{(\lambda_1)_d, (\lambda_2)_d, \dots, (\lambda_N)_d\}$, 其中 $(\lambda_i)_d$ 表示元素为 λ_i , 个数为 d 的子集合, 即 $(\lambda_i)_d = \{\lambda_i, \lambda_i, \dots, \lambda_i\}$ 。

证 设 λ_i 为矩阵 L 的任意一个特征值, p_i 为其对应的任意一个特征向量, 则有 $Lp_i = \lambda_i p_i$ 。因为对于单位矩阵而言, 其特征值均为1, 故设 q_i 为单位矩阵 I_d 的任意一个特征向量, 则有 $I_d q_i = q_i$ 。由直积的性质可得

$$(Lp_i) \otimes (I_d q_i) = (L \otimes I_d)(p_i \otimes q_i) = L^*(p_i \otimes q_i),$$

故有 $L^*(p_i \otimes q_i) = (Lp_i) \otimes (I_d q_i) = \lambda_i(p_i \otimes q_i)$

因此可知 λ_i 是矩阵 L^* 的特征值。设矩阵 L^* 的特征值集合为 F , 令 $E = \{(\lambda_1)_d, (\lambda_2)_d, \dots, (\lambda_N)_d\}$, 则有 $E \subset F$ 。又由于集合 E, F 的元素个数都是 Nd , 故易知 $F = E$ 。至此, 引理4得证。

由引理4和矩阵 L 特征值的性质, 可以得出如下推论:

推论1 矩阵 L^* 的特征值具有以下性质:

- 1) L^* 至少有一个0特征值, $\mathbf{1}_{Nd} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{Nd}$ 是其对应的一个特征向量, 即 $L^* \mathbf{1}_{Nd} = \mathbf{0}$;
- 2) 对于有向图 G , 若 G 包含生成树, 那么0是矩阵 L^* 的 d 重特征值, 其余 $(N-1)d$ 个特征值均具有正实部;
- 3) 对于无向图 G , 若 G 是连通的, 那么0是矩阵 L^* 的 d 重特征值, 其余 $(N-1)d$ 个特征值均为正数;
- 4) 矩阵 L^* 的所有特征值位于一个以 $N_{\max} + j0$ 为

圆心, N_{\max} 为半径的圆盘中(其中 N_{\max} 是图 G 中顶点的最大邻居数);

5) 对于 $G \in \Omega$ 类图, 则0是矩阵 L^* 的 d 重特征值, 其余 $(N-1)d$ 个特征值均为正数, 且都为 d 重特征值。

推论2 若矩阵 $D^* = D \otimes \mathbf{1}_d$ 的特征值集合为 $\{(\lambda_1)_d, (\lambda_2)_d, \dots, (\lambda_N)_d\}$, 则矩阵 D 的特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ 。

引理5 数值1是矩阵 Φ 的特征值。

证 假设1是矩阵 Φ 的特征值, 且 $p = (p_1^T, p_2^T)^T$ (p_1, p_2 均为维数为 Nd 的列向量)为其相应的一个特征向量, 则必有

$$\begin{aligned} \Phi p = p &\Leftrightarrow (\Phi - I_{2Nd})p = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\left\{ \begin{bmatrix} I_{Nd} & TI_{Nd} \\ -\omega_1 L^* T & I_{Nd} - \omega_2 L^* T \end{bmatrix} - I_{2Nd} \right\} p = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\left\{ \begin{bmatrix} O_{Nd} & TI_{Nd} \\ -\omega_1 T L^* & -\omega_2 T L^* \end{bmatrix} p = \mathbf{0} \right. \\ &\left. \begin{matrix} T p_2 = \mathbf{0} \\ \omega_1 T L^* p_1 + \omega_2 T L^* p_2 = \mathbf{0} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \\ &L^* p_1 = \mathbf{0} (\omega_1 \neq 0, T \neq 0). \end{aligned}$$

由推论1性质1)知, 若取 $p_1 = kI_{Nd}$, 便可得 $L^* p_1 = \mathbf{0}$, 由此可知假设成立。

根据Lyapunov稳定性理论, 为了镇定闭环系统 Γ_c^* , 必须使矩阵 Φ 的特征值在复平面的单位圆内, 则可得出如下推论:

推论3 闭环系统 Γ_c^* 稳定的必要条件是矩阵 Φ 的谱半径为1。

4.2 稳定性分析(Stability analysis)

由推论3知, 设计控制器设计的关键问题在于如何确定输出反馈控制参数及采样设计 (ω_1, ω_2, T) 使 Φ 的特征值位于单位圆内。首先给出如下定理:

定理1 设 L 的最大特征值为 λ_{\max} , 则闭环系统 Γ_o^* 渐近稳定的充分必要条件是参数 (ω_1, ω_2, T) 位于区域 \mathfrak{R} 内。

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = (\omega_1, \omega_2) | \{ &\omega_2 > 0, \omega_1 < \omega_2/T, \\ &\omega_1 > 2\omega_2/T - 4/\lambda_{\max} T^2, \\ &0 < T < 2/\sqrt{\omega_1 \lambda_{\max}} \}. \end{aligned}$$

证 必要性. 令通信拓扑图 $G \in \Omega$ 中每个节点的出度分别为 d_1, d_2, \dots, d_N , 则矩阵 Φ 的迹为

$$\begin{aligned} T_r(\Phi) &= Nd + T_r[I_{Nd} - \omega_2 L^*] = \\ &2Nd - \omega_2 T d \sum_{i=1}^N d_i. \end{aligned}$$

由于矩阵 Φ 的所有特征值都在单位圆内, 故矩阵 Φ 的

特征值和 $\sum \lambda(\Phi) < 2Nd$, 则由 $T_r(\Phi) = \sum \lambda(\Phi)$ 得 $\omega_2 > 0$. 设 γ 为矩阵 Φ 的任意一个特征值, 则有

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} (\gamma-1)I_{Nd} & -TI_{Nd} \\ \omega_1 TL^* & (\gamma-1)I_{Nd} + \omega_2 TL^* \end{vmatrix} = 0.$$

若 $\gamma = 1$ 时, 由引理5知, 上式显然成立. 又 $|L^*| = \Pi(L^*) = 0$, 故此时 (ω_1, ω_2) 的值域为 \mathbb{R}^2 . 若 $\gamma \neq 1$ 时, 由行列式初等行变换得

$$\begin{vmatrix} (\gamma-1)I_{Nd} & -TI_{Nd} \\ O_{Nd} & (\gamma-1)I_{Nd} + \omega_2 TL^* + \frac{\omega_1 T^2 L^*}{(\gamma-1)} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$|L^* - \frac{-(\gamma-1)^2}{\omega_2 T(\gamma-1) + \omega_1 T^2} I_{Nd}| = 0 \Rightarrow \frac{-(\gamma-1)^2}{\omega_2 T(\gamma-1) + \omega_1 T^2} \in \lambda(L^*),$$

因此知 $\frac{-(\gamma-1)^2}{\omega_2 T(\gamma-1) + \omega_1 T^2}$ 是矩阵 L^* 的特征值.

由推论1中的性质5)可知0是矩阵 L^* 的 d 重特征值, 其余 $(N-1)d$ 个特征值均为正数, 且都为 d 重特征值. 不失一般性, 设

$$-(\gamma-1)^2 / [\omega_2 T(\gamma-1) + \omega_1 T^2] = \lambda_i,$$

显然当 $\lambda_i = 0$ 时, 有 $\gamma = 1$. 令 $\gamma = a_i + jb_i$, $a_i, b_i \in (-1, 1)$, 代入上式则有

$$\frac{(a_i + jb_i - 1)^2}{\omega_2 T(a_i + jb_i - 1) + \omega_1 T^2} = -\lambda_i.$$

由等式两边虚部为零得

$$2(a_i - 1)[\omega_2 T(a_i - 1) + \omega_1 T^2] = [(a_i - 1)^2 - b_i^2]\omega_2 T \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(a_i - 1)^2 + b_i^2}{2(1 - a_i)T}.$$

由 $a_i < 1$, $\omega_2 > 0$, $T > 0$ 可以得到 $\omega_1 > 0$, 当 $\lambda_i > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} [\omega_2 T(\gamma-1) + \omega_1 T^2]\lambda_i + (\gamma-1)^2 &= 0 \Rightarrow \\ \gamma &= 1 + \frac{-\omega_2 T\lambda_i \pm \sqrt{(\omega_2 T\lambda_i)^2 - 4\omega_1 T^2 \lambda_i}}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$

又因要求 $\|\gamma\| < 1$, 分以下两种情况来讨论:

情况1 若

$$\omega_2^2 \lambda_i^2 - 4\omega_1 \lambda_i \geq 0 \Rightarrow \omega_1 \leq \omega_2^2 \lambda_i / 4,$$

此时 γ 为实数, 且有 $-1 < \gamma < 1$, 即有

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \\ \|2 - \omega_2 T\lambda_i \pm \sqrt{(\omega_2 T\lambda_i)^2 - 4\omega_1 T^2 \lambda_i}\| / 2 &< 1 \Rightarrow \\ \begin{cases} \omega_1 > 2\omega_2/T - 4/\lambda_i T^2, \\ \omega_2 < 4/\lambda_i T. \end{cases} \end{aligned}$$

由此便有

$$(\omega_1, \omega_2, T) \in \mathfrak{R}_{i1},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{i1} &= (\omega_1, \omega_2, T) | \{ \omega_1 > 0, 0 < \omega_2 < 4/\lambda_i T, \\ &\omega_1 > 2\omega_2/T - 4/\lambda_i T^2, \\ &\omega_1 \leq \omega_2^2 \lambda_i / 4 \}, \end{aligned}$$

即要求参数 (ω_1, ω_2, T) 位于区域 \mathfrak{R}_{i1} 内.

情况2 若 $\omega_2^2 \lambda_i^2 - 4\omega_1 \lambda_i < 0 \Rightarrow \omega_1 > \omega_2^2 \lambda_i / 4$, 此时 γ 为复数, 要求 $\|\gamma\| < 1$, 即有

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \\ \|2 - \omega_2 T\lambda_i \pm \sqrt{(\omega_2 T\lambda_i)^2 - 4\omega_1 T^2 \lambda_i}\| / 2 &< 1 \Rightarrow \\ (2 - \omega_2 T\lambda_i)^2 - (\omega_2 T\lambda_i)^2 + 4\omega_1 T^2 \lambda_i &< 4 \Rightarrow \\ \omega_1 &< \omega_2 / T, \end{aligned}$$

因此可以得到

$$(\omega_1, \omega_2, T) \in \mathfrak{R}_{i2},$$

$$\mathfrak{R}_{i2} = (\omega_1, \omega_2, T) | \{ \omega_1 > 0, \omega_2 > 0, \omega_1 < \omega_2 / T, \omega_1 > \omega_2^2 \lambda_i / 4 \},$$

即要求参数 (ω_1, ω_2, T) 位于区域 \mathfrak{R}_{i2} 内.

若要 \mathfrak{R}_{i1} 不为空集, 则由 $\omega_2 < 4/\lambda_i T$ 与 $\omega_1 \leq \omega_2^2 \lambda_i / 4$, 可知必须有 $\omega_1 \lambda_i T^2 < 4$. 同理要 \mathfrak{R}_{i2} 不为空集也必须有 $\omega_1 \lambda_i T^2 < 4$. 由情况1和情况2的结果知, 对于每个非零特征值 λ_i 都有 $(\omega_1, \omega_2, T) \in \mathfrak{R}_{i1} \cup \mathfrak{R}_{i2}$. 且有

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{i1} \cup \mathfrak{R}_{i2} &= \\ (\omega_1, \omega_2, T) | \{ \omega_2 > 0, \omega_1 < \omega_2 / T, \\ &\omega_1 > 2\omega_2 / T - 4/\lambda_i T^2, \\ &0 < T < 2/\sqrt{\omega_1 \lambda_i} \}. \end{aligned}$$

由定理2知, 矩阵 L^* 中相异特征值与矩阵 L 相同, 故综合矩阵 L 的所有非零特征值得

$$(\omega_1, \omega_2, T) \in \bigcap_{i=1}^{N-1} (\mathfrak{R}_{i1} \cup \mathfrak{R}_{i2}) = \mathfrak{R},$$

即 $(\omega_1, \omega_2, T) \in \mathfrak{R}$. 必要性得证.

充分性. 对于式(18), 当 $\lambda_i = 0$ 时, 有 $\gamma = 1$; 当 $\lambda_i > 0$ 时, 由于 $(\omega_1, \omega_2, T) \in \mathfrak{R}$, 易得 $\|\gamma\| < 1$, 即有当 $(\omega_1, \omega_2, T) \in \mathfrak{R}$ 时, 闭环系统 L_c^* 是渐近稳定的. 至此充分性得证.

注1 文中虽得到了闭环系统 L_c^* 渐近稳定的充分必要条件, 但需要计算Laplacian阵 L 的最大特征值 λ_{\max} . 由于在编队运行过程中, 通信拓扑可能会根据需要进行切换, 则对于分布式控制系统而言, λ_{\max} 并不能实时得到. 根据推论1中式(4)可知, $\lambda_{\max} \leq 2N_{\max}$, 其中 N_{\max} 可根据编队中机器人的实际通信能力得到. 故为了更好地应用于更一般的分布式情况, 可以用 N_{\max} 代替 \mathfrak{R} 中的 λ_{\max} 得到 \mathfrak{R}^* , 容易知 $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}$.

注2 文中的定理1虽然是在 Ω 类图的基础上证明的, 但可推广到任何含生成树的对称通信拓扑图中, 证明与定理1类似.

4.3 收敛性分析(Convergence analysis)

仅仅得到闭环系统 Γ_c^* 渐近稳定的充要条件还不能说明多机器人系统收敛到了期望队形并按期望规律运动, 即 $X_{ci} - X_{pi} = \mathbf{0}, V_{ci} = \mathbf{0}$. 事实上, 有如下关于闭环系统 Γ_c^* 的收敛性定理.

定理 2 闭环系统 Γ_c^* 稳定是闭环系统 Γ_c^* 一致收敛的充分条件.

证 设矩阵 Φ 的特征值集合为 $\{(\gamma_1)_d, (\gamma_2)_d, \dots, (\gamma_{2N})_d\}$, 其中 $(\gamma_i)_d$ 表示元素为 γ_i , 个数为 d 的子集合, 即 $(\gamma_i)_d = \{\gamma_i, \gamma_i \dots, \gamma_i\}$. 由推论3及定理1知道, 当 $(\omega_1, \omega_2, T) \in \bigcap_{i=1}^{N-1} (\mathfrak{R}_{i1} \cup \mathfrak{R}_{i2})$ 时矩阵 Φ 的特征值均有 $\|\gamma\| \leq 1$, 其中 $\gamma_{2N-1} = \gamma_{2N} = 1, \|\gamma_i\| < 1, i = 1, 2, \dots, 2N - 2$. 设

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} I_N & TI_N \\ -\omega_1 TL & I_N - \omega_2 TL \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N},$$

则有 $\Phi = \Phi_2 \otimes I_d$, 由推论3知矩阵 Φ_2 的特征值集合为 $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2N}\}$. 根据矩阵论知识可知, 存在非奇异 H , 使矩阵 Φ_2 可以写成如下Jordan型:

$$\Phi_2 = H \Sigma H^{-1} = H \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & J \end{bmatrix} H^{-1}, \quad (19)$$

其中: $\Lambda = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2N-2}\}, J = [1 \ 1; 0 \ 1], H = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{2N-1} \ h_{2N}]$, 且 h_{2N-1} 是特征值1所对应的特征向量, 则有 $\Phi_2 h_{2N-1} = h_{2N-1}$.

令

$$H_{(2N-1)1} = [h_{(2N-1)1} \ h_{(2N-1)2} \ \dots \ h_{(2N-1)N}]^T, \\ H_{(2N-1)2} = [h_{(2N-1)(N+1)} \ h_{(2N-1)(N+2)} \ \dots \ h_{(2N-1)2N}]^T,$$

则有

$$\begin{bmatrix} I_N & TI_N \\ -\omega_1 TL & I_N - \omega_2 TL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{(2N-1)1} \\ H_{(2N-1)2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{(2N-1)1} \\ H_{(2N-1)2} \end{bmatrix}.$$

可以得到 $H_{(2N-1)2} = O_{N \times 1}, -\omega_1 TL H_{(2N-1)1} = O_{N \times 1}$. 由图的Laplacian矩阵 L 的性质可知, 当 $H_{(2N-1)1} = k_1 \mathbf{1}_N$, 其中 $k_1 \in \mathbb{R}$. 因此便有 $LH_{(2N-1)1} = O_{N \times 1}$. 故可得 $H_{(2N-1)1} = k_1 \mathbf{1}_N, H_{(2N-1)2} = O_{N \times 1}$. 由式(19)可得

$$\Phi_2 H = H \Sigma \Rightarrow \Phi_2 h_{2N} = h_{2N-1} + h_{2N}.$$

令

$$H_{(2N)1} = [h_{(2N)1} \ h_{(2N)2} \ \dots \ h_{(2N)N}]^T, \\ H_{(2N)2} = [h_{(2N)(N+1)} \ h_{(2N)(N+2)} \ \dots \ h_{(2N)2N}]^T,$$

则有

$$\begin{bmatrix} I_N & TI_N \\ -\omega_1 TL & I_N - \omega_2 TL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{(2N)1} \\ H_{(2N)2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} H_{(2N-1)1} \\ H_{(2N-1)2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{(2N)1} \\ H_{(2N)2} \end{bmatrix},$$

进而可以得到 $H_{(2N)1} = k_2 \mathbf{1}_N, H_{(2N)2} = k_3 \mathbf{1}_N$, 其中: $k_2 \in \mathbb{R}, k_3 = k_1/T$. 由矩阵论关于Jordan阵的性质得

$$\Phi_2^k = H \sum H^{-1} = H \begin{bmatrix} \Lambda^k & O \\ O & J_k \end{bmatrix} H^{-1},$$

其中 $J_k = [1 \ k; 0 \ 1]$. 对于 $i = 1, 2, \dots, 2N - 2$, 由于 $\|\gamma_i\| < 1$, 故有 $\gamma_i^k = 0 (k \rightarrow +\infty)$. 因此有

$$\Phi_2^k = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{2N-1} \ h_{2N}] \sum H^{-1} (k \rightarrow +\infty) \Rightarrow \\ \Phi_2^k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & k_1 \mathbf{1}_N & k_3 \mathbf{1}_N \\ h_{12} & h_{22} & \dots & O_{N \times 1} & k_2 \mathbf{1}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & O \\ O & J_k \end{bmatrix} H^{-1} \Rightarrow$$

$$\Phi_2^k = \mathbf{e} \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{2n} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{2n} \end{bmatrix}.$$

由于 $\Phi = \Phi_2 \otimes I_d$, 故有 $\Phi^k = (\Phi_2 \otimes I_d)^k = \Phi_2^k \otimes I_d$, 进而当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $\Phi^k = (\mathbf{e} \otimes \mathbf{1}_N) \otimes I_d$.

结合式(14)可知, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时有

$$\begin{bmatrix} X_c^*(k) \\ V_c^*(k) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} X_c^*(k-1) \\ V_c^*(k-1) \end{bmatrix} = \\ \Phi^k \begin{bmatrix} X_c^*(0) \\ V_c^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{m}_0 \end{bmatrix},$$

其中:

$$\mathbf{e}_0 = \sum_{i=1}^N e_i X_{ci}^*(0) + \sum_{i=1}^N e_{N+i} V_{ci}^*(0), \\ \mathbf{m}_0 = \sum_{i=1}^N m_i X_{ci}^*(0) + \sum_{i=1}^N m_{N+i} V_{ci}^*(0).$$

在系统 Γ_c^* 中, 由于

$$V_{c1}^*(0) = \mathbf{0}, X_{c1}^*(0) = \mathbf{0}, u_{c1}^* = \mathbf{0},$$

故有

$$V_{c1}^*(k+1) = V_{c1}^*(0) = \mathbf{0}, \\ X_{c1}^*(k+1) = X_{c1}^*(0) = \mathbf{0}.$$

因此由上式可得 $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$. 进而当 $k \rightarrow +\infty$ 时有: $X_c^*(k) = \mathbf{0}, V_c^*(k) = \mathbf{0}$. 至此定理2得证.

因此, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时在系统 Γ_c 有 $X_c(k+1) = P, V_o(k+1) = \mathbf{0}$, 即多机器人系统收敛到期望队形. 由坐标转换关系(4)可得

$$\begin{cases} X_o = (I_N \otimes A)^{-1} X_c + X_e^*, \\ V_o = -(I_N \otimes A^{-1} B A^{-1}) X_c + (I_N \otimes A)^{-1} V_c + V_e^*, \end{cases}$$

故可得在系统 Γ_o 中, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时有

$$\begin{bmatrix} X_o(k) \\ V_o(k) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [I_N \otimes A(k)]^{-1}P \\ -[I_N \otimes A^{-1}(k)B(k)A^{-1}(k)]P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_e^*(k) \\ V_e^*(k) \end{bmatrix},$$

即多机器人系统收敛到期望运动规律上。

5 仿真算例(Simulation)

仿真中运用的是由6个机器人组成的多智能体系统, 编队的队形及通信拓扑图如图3所示, 其Laplacian矩阵 L 为

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

则矩阵 L 的最大特征值为 $\lambda_{\max} = 5$ 。仿真中采样时间 $T = 0.2\text{s}$ 。参数收敛域如图4所示。

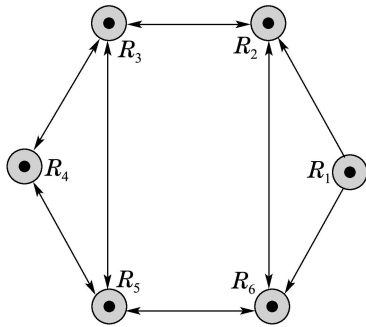


图3 机器人队形及通信拓扑图

Fig. 3 The multi-robot formation and the communication topological graph

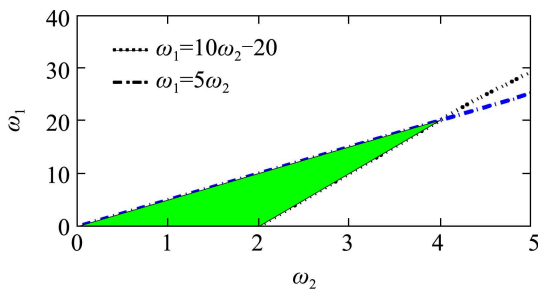


图4 $\omega_1 - \omega_2$ 收敛域

Fig. 4 The convergence domain of $\omega_1 - \omega_2$

算例1 在收敛域内取一组 (ω_1, ω_2, T) 为: $\omega_1 = 0.1, \omega_2 = 1.5$, 为简化起见本文暂不考虑机器人间的避障问题, 初始时, 各机器人均处于静止且位置为 $(3.4, 0.2, 0), (4, 2, 0), (-3, 1.5, 0), (-5.6, -0.3, 0), (-1.8, -1.3, 0), (2.7, -1.4, 0)$ 。虚拟中心机器人 R_e 的初始位置为 $X_e = (0, 0, 0)$, 在运动过程中, 速度由 $V_e = (0, 0, 0)$ 逐渐匀加速到 $V_e = (0.2, 0, 0.1)$ 。图5是6个机器人的运动轨迹。由图显然可知, 6个机器人很快收敛到期望队形, 并伴随队形中心一起做旋转运动。

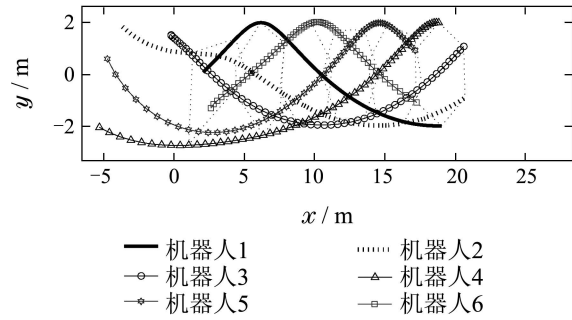


图5 编队绕心运动时各机器人轨迹

Fig. 5 The trajectory of six robots with revolving round the formation center

算例2 参数选取及各机器人初始状态同上。运动过程中, 控制队形中心虚拟机器人 R_e 沿预设轨迹运行。各机器人运动轨迹如图6所示。明显可以看到6个机器人很快收敛到期望队形, 且当编队做曲线运动时其期望前端始终是朝着编队前进方向。

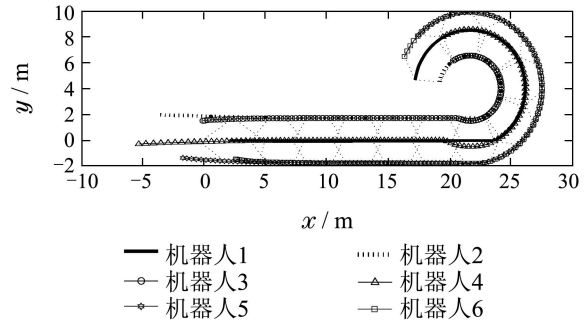


图6 编队中心沿预定轨道时各机器人轨迹

Fig. 6 The trajectory of six robots with formation center moving along desired trajectory

算例3 在收敛域外选取参数 $\omega_1 = 5, \omega_2 = 1$ 进行仿真实验, 所得各机器人运动轨迹如图7所示; 显然可以观察到各机器人的运动轨迹是发散的。

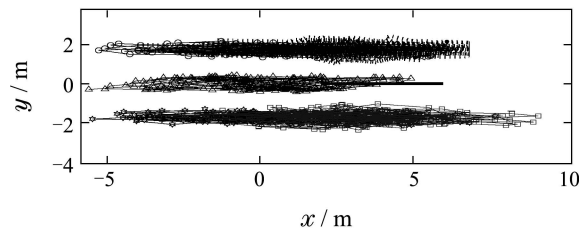


图7 当 $\omega_1 = 5, \omega_2 = 1$ 时各机器人运动轨迹

Fig. 7 The trajectory of six robots with $\omega_1 = 5, \omega_2 = 1$

6 结论(Conclusion)

本文主要针对包含绕心运动的多机器人编队协调控制问题进行了研究, 首先针对编队中心坐标系中的机器人一般运动模型, 进行坐标转换得到机器人在全局坐标系中的模型(7)及控制输入(8)。其次定义了一

类通信拓扑图, 基于该通信拓扑下利用控制律(16)对机器人编队进行协调控制, 证明了其稳定性, 并得到了使编队收敛到期望队形的参数收敛域. 最后利用6个机器人的编队进行了仿真, 验证了本文控制策略的有效性和正确性.

参考文献(References):

- [1] 沈捷, 费树岷, 张兴华, 等. 双参考点切换的多移动机器人队形运动控制方法 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(8): 1030 – 1036.
(SHEN Jie, FEI Shumin, ZHANG Xinghua, et al. Formation motion control for multiple mobile robots based on switching control between two reference points [J]. *Control Theory and Applications*, 2010, 27(8): 1030 – 1036.)
- [2] DING X C, KLOETZER M, CHEN Y, et al. Automatic deployment of robotic teams [J]. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 2011, 18(3): 75 – 86.
- [3] 俞志英, 郭戈, 钱方. 基于反馈线性化的车辆编队控制 [J]. 大连海事大学学报, 2012, 38(1): 111 – 117.
(YU Zhiying, GUO Ge, QIAN Fang. Vehicle formation control based on input-output feedback linearization [J]. *Journal of Dalian Maritime University*, 2012, 38(1): 111 – 117.)
- [4] WISE R A, RYSDYK R T. UAV coordination for autonomous target tracking [C] // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. [S.l.]: [s.n.], 2006.
- [5] 邓婉, 王新民, 王晓燕, 等. 无人机编队队形保持变换控制器设计 [J]. 计算机仿真, 2011, 28(10): 73 – 78.
(DENG Wan, WANG Xinmin, WANG Xiaoyan, et al. Controller design of uavs formation keep and change [J]. *Computer Simulation*, 2011, 28(10): 73 – 78.)
- [6] 俞建成, 张艾群, 王晓辉, 等. 基于模糊神经网络水下机器人直接自适应控制 [J]. 自动化学报, 2007, 33(8): 840 – 848.
(YU Jiancheng, ZHANG Aiqun, WANG Xiaohui, et al. Direct adaptive control of underwater vehicles based on fuzzy neural networks [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(8): 840 – 848.)
- [7] CHUNG S J, AHSUN U, SLOTINE J J. Application of synchronization to formation flying spacecraft: Lagrangian approach [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(2): 512 – 526.
- [8] 张世杰, 段广仁. 分布式卫星编队飞行队形保持协同控制 [J]. 宇航学报, 2011, 32(10): 2140 – 2145.
(ZHANG Shijie, DUAN Guangren. Cooperative control for distributed satellite formation keeping [J]. *Journal of Astronautics*, 2011, 32(10): 2140 – 2145.)
- [9] ALEXANDER F J, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1477.
- [10] LAFFERRIERE G, WILLIAMS A, CAUGHMAN J, et al. Decentralized control of vehicle formations [J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(9): 899 – 910.
- [11] 郑军, 颜文俊. 一类分布式队形控制及其稳定性分析 [J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1107 – 1112.
(ZHENG Jun, YAN Wenjun. A distributed formation control algorithm and stability analysis [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(9): 1107 – 1112.)
- [12] 杨波, 方华京. 具有通信约束的分布式水下航行器群编队控制 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2009, 37(2): 57 – 60.
(YANG Bo, FANG Huajing. Distribution underwater vehicles formation control with limited communication [J]. *Huazhong University of Science and Technology (Natural Science)*, 2009, 37(2): 57 – 60.)
- [13] 王佳. 多Agent系统的控制及稳定性分析 [D]. 南京: 南京理工大学, 2008.
(WANG Jia. *Multi-agent system control and stability analysis* [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2008.)
- [14] 姜丽梅, 张汝波. 弱通信条件下多机器人编队控制及稳定性分析 [J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2012, 33(1): 65 – 71.
(JIANG Limei, ZHANG Rubo. Multi-robot formation control and stability analysis for limited communication [J]. *Journal of Jiangsu University (Natural Science)*, 2012, 33(1): 65 – 71.)

作者简介:

吴 晋 (1990–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为多机器人协调控制, E-mail: wujinrtj525@sina.cn;

张国良 (1970–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为先进控制理论及应用、机器人技术研究, E-mail: zhgl@sohu.com;

曾 静 (1973–), 女, 副教授, 目前研究方向为多传感器信息融合, E-mail: sunyj@sina.cn;

徐 君 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为多机器人协同定位与导航, E-mail: xujun@sina.com.