

DOI: 10.7641/CTA.2014.30528

## 有向图中模块化航天器系统相对轨道的自适应分布式一致性

刘付成<sup>1,2</sup>, 梅杰<sup>3†</sup>, 马广富<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;

2. 上海航天技术研究院, 上海 200235; 3. 哈尔滨工业大学 深圳研究生院, 广东 深圳 518055)

**摘要:** 基于多智能体系统一致性理论, 对模块化航天器相对轨道的分布式一致性问题进行了研究. 各模块之间的信息交互拓扑结构为更具一般性的有向图. 当存在模块质量不确定性的情形下, 设计了仅依赖模块自身及其邻近模块信息且无需模块间相对速度信息的自适应控制算法. 针对模型中存在外部干扰的情形, 通过引入带有变自适应参数的变结构控制项, 实现了对未知上界干扰的补偿, 并且证明了闭环系统是渐近稳定的. 此外, 本文所设计的算法具有分布式的特点, 不会因为模块数量的增多而增加所提算法的复杂度. 最后对 6 个模块组成的模块化航天器的编队飞行进行了仿真分析, 仿真结果表明本文设计的控制律是有效可行的.

**关键词:** 模块化航天器; 相对轨道; 一致性; 自适应控制

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

### Adaptive distributed consensus for relative orbit of modular spacecrafts under a directed graph

LIU Fu-cheng<sup>1,2</sup>, MEI Jie<sup>3†</sup>, MA Guang-fu<sup>1</sup>

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China;

2. Shanghai Academic of Spaceflight Technology, Shanghai 200235, China;

3. Shenzhen Graduate School, Harbin Institute of Technology, Shenzhen Guangdong 518055, China)

**Abstract:** The distributed leaderless consensus problem for relative orbit of modular spacecrafts is studied based on the consensus theory of multi-agent systems. The interaction topology among the modules is a general directed graph. When all modules are with unknown masses, we propose an adaptive control algorithm based on the information of individual module and its neighbors, without the need of relative velocity measurements. To compensate with the bounded external disturbances, we introduce a variable structure control term with an adaptive updating law. The closed-loop system is proved to be asymptotically stable. Moreover, the proposed control algorithm is totally distributed; its complexity will not increase when the number of modules becomes greater. Simulation results of a scenario of six modules are conducted to validate the effectiveness of the proposed control schemes.

**Key words:** modular spacecraft; relative orbit; consensus; adaptive control

### 1 引言(Introduction)

随着航天技术的不断发展, 航天任务的要求越来越高, 因此航天器的结构也越来越复杂. 当航天器上某单一功能失效时, 极有可能导致整个航天器系统失效. 由于单个复杂航天器的造价极其昂贵, 这势必造成极大的损失. 为尽量避免这一缺陷, “模块化航天器”的概念应运而生. 这一概念得到了美国军方的高度重视, 并成为近几年航天领域的研究热点. 模块化航天器是将单个复杂航天器拆解成若干个具有不同功能的模块, 如有效载荷模块、电源模块、控制模块、推进模块、测控模块和数管模块等. 将这些功能

模块分别送入各自的空间轨道, 构成一组编队飞行的模块, 每个模块执行自己的功能. 模块化航天器在功能上等同于一颗虚拟的大型卫星, 其实质是将一个航天器的质量和故障风险分解到多个功能模块. 相比于传统的单个大型复杂航天器, 模块化航天器具有很多的优势, 如: 提高运输能力、能够降低风险以及具有更高的灵活性.

基于模块化航天器的上述特点以及空间技术的迅猛发展和空间战略地位的日益提高, 模块化航天器的飞行技术研究引起了世界各航天大国的重视, 并可以在将来有效应用于深空探测、科学实验、对地勘测和

收稿日期: 2013-5-25; 录用日期: 2013-9-29.

†通信作者. E-mail: jmei@hitsz.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174200); 中国博士后科学基金资助项目(2012M520737); 广东省自然科学基金资助项目(S2012040007301); 深圳市科技计划基础研究资助项目(JCYJ20120613115259889).

军事领域等方面. 但与此同时, 要将模块化航天器付诸于实际工程, 还有很多关键技术需要解决, 主要包括: 航天器功能模块的分解与无线接口技术、模块间的无线传输技术、数据信息处理技术以及航天器编队飞行控制技术. 其中航天器编队飞行技术包括各模块的相对轨道和姿态的保持与控制, 从这一方面来讲与分布式航天器的编队控制相同. 本文主要关注模块化航天器各模块的相对轨道控制问题.

近年来, 国内外许多学者对各种模型下航天器编队飞行的相对轨道进行了广泛的研究<sup>[1-4]</sup>. 注意到以上文献均考虑的是主从式的编队飞行, 从星之间没有信息交互, 这种结构可以看作只有两颗航天器的编队飞行. 模块化航天器作为由多个不同模块组成的系统, 系统中各模块之间通过无线接口相互通讯或者通过传感获取信息, 共同完成整星的任务. 因此, 与多智能体系统相似, 模块化航天器也具有“个体动态+通讯/传感拓扑”的特点. 因此, 可以采用代数图论的方法来描述模块成员之间的信息交互关系, 不同的拓扑结构可以方便地用来描述新模块加入或故障模块退出时模块化航天器不同模块间的拓扑关系. 基于多智能体系统的一致性理论, 文献[5-6]在无向图中研究了航天器编队飞行的相对轨道控制问题. 文献[7]将航天器的相对轨道写成Lagrange的形式, 在双向环形拓扑结构中研究了航天器的编队飞行. 由于编队航天器的相对轨道可以写成Larange系统的形式, 因此关于网络Lagrange系统协调控制的结果对模块化航天器的编队控制也有很好的借鉴意义. 文献[8]和文献[9]分别在无向拓扑结构中研究了网络Lagrange系统的分布式一致性和协调跟踪控制问题. 文献[10-12]则在有向图中对网络Lagrange系统的分布式协调控制问题进行了研究, 包括分布式一致性<sup>[11-12]</sup>、分布式协调跟踪<sup>[10-11]</sup>以及分布式包含控制<sup>[12]</sup>.

本文主要研究模块化航天器中各模块的相对轨道控制问题. 各模块之间通过更具一般性的有向拓扑结构传递和接收邻近模块的信息, 同时考虑模块存在质量不确定性以及外部干扰的情形, 其中由大气阻力、太阳光压以及 $J_2$ 等高阶非球形摄动引起的外部干扰是有界的, 而且上界未知. 所设计的算法仅用到邻近模块的信息, 因此是分布式的, 不会因为模块数量的增多而增加所提算法的复杂度. 此外, 算法中无需用到模块间的相对速度信息, 可以大大减小通讯负担. 而当模块间的相对位置信息可以通过自身携带的传感设备进行测量时, 各模块间不需要通讯, 因此无需安装通讯设备, 从而减少各模块的制造成本, 也可以避免由通讯引起的时延等问题. 与主从式的编队飞行<sup>[1-4]</sup>相比, 本文引入邻近模块间的相对信息对模块化航天器的相对轨道进行控制, 具有分布式的优点; 与双向环形拓扑<sup>[7]</sup>和一般的无向拓扑结构相

比<sup>[5-6, 8-9]</sup>, 本文中各模块间的拓扑结构为更具一般性的有向图; 与文献[10-12]相比, 本文考虑了存在有界外部干扰的情形, 所提出的分布式自适应算法实现了对上界未知干扰的补偿, 而且无需模块间的相对速度信息.

## 2 数学背景与问题描述(Mathematic background and problem statement)

### 2.1 图论(Graph theory)

本文利用有向图来描述各模块间的信息交互关系. 关于图论的详细内容读者可参阅相关参考文献[13]. 图是由若干给定的顶点及连接两顶点的边所构成的图形, 记为 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ , 其中 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 为所有顶点组成的集合,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是所有边组成的集合,  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是带权的邻接矩阵. 本文中 $v_i$ 表示航天器模块 $i$ . 边 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 表示模块 $j$ 能够通过测量或通信获取模块 $i$ 的信息. 邻接矩阵的元素 $a_{ij}$ 如下定义: 当 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ 时,  $a_{ij} = 1$ ; 否则,  $a_{ij} = 0$ . 一般假设顶点与自身没有连通性, 即 $a_{ii} = 0$ . 有向路径是指有向图中边的一个序列. 如果有向图中任意两个不同顶点之间都存在有向路径, 那么称该有向图是强连通的. 有向图 $\mathcal{G}$ 的Laplacian矩阵定义为 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ , 其中:  $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ ,  $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ . 对有向图而言,  $\mathcal{L}$ 一般是不对称的.

**引理 1**<sup>[14]</sup> 如果有向图 $\mathcal{G}$ 是强连通的, 那么存在 $\xi \triangleq (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 满足 $\sum_{i=1}^n \xi_i = 1$ ,  $\xi_i > 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , 使得 $\xi^T \mathcal{L} = 0$ . 进一步, 矩阵 $B \triangleq \Xi \mathcal{L} + \mathcal{L}^T \Xi$ , 其中 $\Xi \triangleq \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ , 是对称半正定的, 其行和为零, 且定义如下的常数:

$$a(\mathcal{L}) \triangleq \min_{x^T \xi = 0, x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T \Xi x} > 0.$$

也就是说, 对任意满足 $\xi^T x = 0$ 的向量 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^T B x \geq a(\mathcal{L}) x^T \Xi x$ .

### 2.2 相对轨道模型(Model of relative orbit)

首先如下定义参考轨道坐标系(也称为LVLH坐标系):  $x$ 轴由地心指向参考点,  $y$ 轴沿参考点运行的切线方向,  $z$ 轴垂直于参考轨道平面, 与 $x$ 轴和 $y$ 轴形成右手坐标系. 为简单计, 本文考虑参考点运行在某近地圆轨道上, 其轨道角速度为 $\omega_0 = \sqrt{\mu_e/R_0^3}$ , 其中 $\mu_e$ 为万有引力常数,  $R_0$ 为该圆轨道的半径. 那么LVLH坐标系中模块 $i$ 相对参考点的轨道动力学模型可以表示为<sup>[15:p75]</sup>

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i - 2\omega_0 \dot{y}_i - \omega_0^2 x_i + \frac{\mu_e(R_0 + x_i)}{R_0^3} - \frac{\mu_e}{R_0^2} &= \frac{\tau_{oi x} + \tau_{doi x}}{m_{oi}}, \\ \ddot{y}_i + 2\omega_0 \dot{x}_i - \omega_0^2 y_i + \frac{\mu_e y_i}{R_0^3} &= \frac{\tau_{oi y} + \tau_{doi y}}{m_{oi}}, \end{aligned}$$

$$\ddot{z}_i + \frac{\mu_e z_i}{R_i^3} = \frac{\tau_{oiz} + \tau_{doiz}}{m_{oi}},$$

式中:  $i = 1, \dots, n$ ,  $m_{oi}$  为模块  $i$  的质量,  $\tau_{oi} \triangleq (\tau_{oix}, \tau_{oiy}, \tau_{oiz})^T$  和  $\tau_{doi} \triangleq (\tau_{doix}, \tau_{doiy}, \tau_{doiz})^T$  分别为作用在模块  $i$  上的控制力和外部干扰(包括大气阻力以及  $J_2$  等高阶地心非球形摄动)在 LVLH 坐标系中的表示. 在编队飞行过程中, 假设  $m_{oi}$  为常值, 那么存在正常数  $\bar{m}$ , 使得  $\forall i = 1, \dots, n, m_{oi} < \bar{m}$ . 定义  $p_i \triangleq (x_i, y_i, z_i)^T$ , 那么模块  $i$  的相对轨道动力学可以写成

$$m_{oi}\ddot{p}_i + C_{oi}\dot{p}_i + g_{oi} = \tau_{oi} + \tau_{doi}, \quad (1)$$

式中:

$$C_{oi} = 2m_{oi} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = m_{oi}\bar{C}_{oi},$$

$$g_{oi} = m_{oi} \begin{bmatrix} -\omega_0^2 x + \mu_e(R_0 + x)/R_i^3 - \mu_e/R_0^2 \\ -\omega_0^2 y + \mu_e y/R_i^3 \\ \mu_e z/R_i^3 \end{bmatrix} = m_{oi}\bar{g}_{oi},$$

式中  $R_i$  为模块  $i$  到地心的距离.

### 3 分布式一致性算法设计(Distributed consensus algorithm design)

在模块化航天器的飞行任务中, 各模块由于功能的不同往往具有不同的质量, 而且由于燃料消耗等原因, 各模块的质量并不是精确已知的. 另外, 各模块所携带的测量和传感设备往往具有一定的限制, 如传感距离、测量角度等, 这就使得模块  $i$  可以获取模块  $j$  的信息, 但模块  $j$  不一定能获取模块  $i$  的信息, 这就造成各模块间的信息交互拓扑结构是有向的. 因此, 本节在存在模块质量不确定性以及外部干扰的情形下, 考虑模块间信息交互拓扑结构为一般的有向图, 设计仅需自身和邻近模块信息的分布式自适应滑模控制算法, 使得各模块达到航天器任务所需要的目标队形. 从数学上讲, 就是对系统(1)设计控制算法, 使得当  $t \rightarrow \infty$  时,  $p_i - p_j \rightarrow \delta_{ij}$ ,  $\dot{p}_i - \dot{p}_j \rightarrow \mathbf{0}_3$ . 这里,  $\delta_{ij}$  表示航天器任务的目标队形, 为常数向量.

在提出本文的控制算法之前, 假设如下条件成立.

**假设 1** 描述各模块间信息交互的有向图  $\mathcal{G}$  是强连通的.

**假设 2** 各模块受到的外部干扰是有界的, 即存在  $\bar{d}_i$  使得  $\|\tau_{doi}\| \leq \bar{d}_i$ , 其中  $\bar{d}_i$  为未知的正常数.

首先设计如下的辅助变量:

$$\dot{p}_{ri} \triangleq -\alpha \sum_{j=1}^n a_{ij}(p_i - p_j - \delta_{ij}), \quad (2)$$

$$s_i \triangleq \dot{p}_i - \dot{p}_{ri} = \dot{p}_i + \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij}(p_i - p_j - \delta_{ij}), \quad (3)$$

式中  $\alpha$  为正常数.

**注 1** 辅助变量  $s_i$  的设计源自于文献[16: p278]中的经典滑模变量. 由于有向图的 Laplacian 矩阵不是对称的, 因此难以直接设计 Lyapunov 函数, 从而给系统的稳定性分析带来了比较大的困难. 该辅助变量的设计使得具有参数不确定性以及有向图中一致性的稳定性分析变得简单. 这一滑模变量最早用于具有参数不确定性以及有向图中网络 Lagrange 系统的协调控制中<sup>[10-12]</sup>. 注意到文献[10]研究的是存在领航者的协调跟踪, 而本文中并没有领航者; 此外, 文献[10-12]都没有考虑外部干扰的情形, 而且需要用到模块间的相对速度信息. 无需相对速度信息可以带来很大的便利, 主要表现在两个方面: i) 模块间的相对位置可以通过测量设备如微波雷达等进行精确测量, 但模块间的相对速度信息一般难以直接进行测量, 即使可以测量往往也带来很大的噪声; ii) 虽然各模块能测量自身的绝对速度信息, 那么相对速度信息可以通过相互通讯获取, 但这势必需要各模块安装相应的通讯设备, 不仅增加模块的研制成本, 同时也增加的通讯负担.

对系统(1), 提出如下的控制算法:

$$\tau_{oi} = -k_i s_i + \hat{m}_{oi} \phi_i - \hat{d}_i \text{sgn } s_i, \quad (4a)$$

$$\dot{\hat{m}}_{oi} = \gamma_i s_i^T \phi_i, \quad (4b)$$

$$\dot{\hat{d}}_i = \kappa_i \|s_i\|_1, \quad (4c)$$

式中:  $\phi_i \triangleq \bar{C}_{oi} \dot{p}_{ri} + \bar{g}_{oi}$ ,  $k_i$ ,  $\gamma_i$  和  $\kappa_i$  是正常数.

**注 2** 注意到式(4a)中用到了以下信号:  $s_i$ ,  $\hat{m}_{oi}$ ,  $\phi_i$  以及  $\hat{d}_i$ . 其中  $\phi_i$  为模块  $i$  自身的信息, 而由式(4b)和式(4c)可知  $\hat{m}_{oi}$  和  $\hat{d}_i$  仅依赖于信号  $s_i$ . 由  $s_i$  以及  $a_{ij}$  的定义可知,  $s_i$  仅依赖模块  $i$  自身的信息及其邻近模块  $j$  ( $a_{ij} = 1$ ) 的信息. 综合以上论述可知, 控制算法(4)仅依赖模块  $i$  及其邻近模块  $j$  ( $a_{ij} = 1$ ) 的信息, 因此是分布式的.

在式(4)的作用下, 式(1)可以写成如下闭环系统的形式:

$$m_{oi}\dot{s}_i + C_{oi}s_i = -k_i s_i - m_{oi}\ddot{p}_{ri} - \tilde{m}_{oi}\phi_i - \hat{d}_i \text{sgn } s_i + \tau_{doi}, \quad (5)$$

式中  $\tilde{m}_{oi} \triangleq m_{oi} - \hat{m}_{oi}$ . 在假设 1 成立的条件下, 由引理 1 可知存在  $\xi \triangleq (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 满足  $\sum_{i=1}^n \xi_i = 1$ ,  $\xi_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$ , 使得  $\xi^T \mathcal{L} = 0$ .

根据目标队形可行性的相关结果<sup>[17]</sup>, 对强连通的有向图, 如果目标队形  $\delta_{ij}$  是可行的, 那么存在  $\delta_i, i = 1, \dots, n$ , 使得  $\delta_i - \delta_j = \delta_{ij}$ . 定义误差向量  $\tilde{p}_i = p_i - \delta_i - \bar{p}_i$ , 其中  $\bar{p}_i \triangleq \sum_{j=1}^n \xi_j (p_j - \delta_j)$ .

考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} m_{oi} s_i^T s_i + \xi_i \tilde{p}_i^T \tilde{p}_i + \frac{\tilde{m}_i^2}{2\gamma_i} + \frac{\tilde{d}_i^2}{2\kappa_i} \right], \quad (6)$$

式中:  $\tilde{d}_i \triangleq \bar{d}_i - \hat{d}_i$ ,  $\bar{d}_i$  如假设 2 中定义. 对  $V(t)$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^n [m_{oi} s_i^T \dot{s}_i + 2\xi_i \tilde{p}_i^T \dot{\tilde{p}}_i + \frac{\tilde{m}_{oi} \dot{\tilde{m}}_{oi}}{\gamma_i} + \frac{\tilde{d}_i \dot{\tilde{d}}_i}{\delta_i}] = \\ & \sum_{i=1}^n [-s_i^T C_{oi} s_i - m_{oi} s_i^T \ddot{p}_{ri} - k_i s_i^T s_i - \hat{d}_i \|s_i\|_1 + \\ & s_i^T \tau_{doi} - (\bar{d}_i - \hat{d}_i) \|s_i\|_1 + 2\xi_i \tilde{p}_i^T \dot{\tilde{p}}_i] = \\ & \text{(由式(5)(4b)以及式(4c)得)} \\ & \sum_{i=1}^n (-k_i s_i^T s_i - m_{oi} s_i^T \ddot{p}_{ri} + s_i^T \tau_{doi} - \bar{d}_i \|s_i\|_1) + \\ & \sum_{i=1}^n 2\xi_i \tilde{p}_i^T \dot{\tilde{p}}_i. \text{(因为 } C_{oi} \text{ 为反对称矩阵)} \end{aligned} \quad (7)$$

记  $s \triangleq [s_1^T \cdots s_n^T]^T$ ,  $p \triangleq [p_1^T \cdots p_n^T]^T$ ,  $\delta \triangleq [\delta_1^T \cdots \delta_n^T]^T$ ,  $\tilde{p} \triangleq [\tilde{p}_1^T \cdots \tilde{p}_n^T]^T$ . 那么

$$\sum_{i=1}^n 2\xi_i \tilde{p}_i^T \dot{\tilde{p}}_i = \tilde{p}^T (\Xi \otimes I_3) \dot{\tilde{p}} + \dot{\tilde{p}}^T (\Xi \otimes I_3) \tilde{p}, \quad (8)$$

式中:  $\Xi$  如引理1中定义所示,  $\otimes$  表示 Kronecker 积. 注意到

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}} &= \dot{p} - \mathbf{1}_n \otimes \dot{\tilde{p}} = \\ & \dot{p} - \mathbf{1}_n \otimes [(\xi \otimes I_3)^T (p - \delta)] = \\ & \dot{p} - \left[ \begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{array} \right] \otimes I_3 \dot{p}. \end{aligned}$$

那么可以得到

$$\begin{aligned} (\Xi \otimes I_3) \dot{\tilde{p}} &= \\ (\Xi \otimes I_3) \dot{p} - (\Xi \otimes I_3) \left[ \begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{array} \right] \otimes I_3 \dot{p} &= \\ (\Xi \otimes I_3) \dot{p} - [\Xi \begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{array}] \otimes I_3 \dot{p} &= \\ (\Xi \otimes I_3) \dot{p} - [(\xi \xi^T) \otimes I_3] \dot{p} &= \\ [(\Xi - \xi \xi^T) \otimes I_3] \dot{p}. \end{aligned} \quad (9)$$

注意到式(3)可以写成如下向量形式:

$$s = \dot{p} + \alpha(\mathcal{L} \otimes I_3)(p - \delta) = \dot{p} + \alpha(\mathcal{L} \otimes I_3)\tilde{p}.$$

将上式代入到式(9), 并由 Laplacian 矩阵的性质  $\xi^T \mathcal{L} = \mathbf{0}_n$  可得

$$\begin{aligned} (\Xi \otimes I_3) \dot{\tilde{p}} &= \\ [(\Xi - \xi \xi^T) \otimes I_3] [s - \alpha(\mathcal{L} \otimes I_3)\tilde{p}] &= \\ [(\Xi - \xi \xi^T) \otimes I_3] s - \alpha [(\Xi - \xi \xi^T) \mathcal{L} \otimes I_3] \tilde{p} &= \end{aligned}$$

$$[(\Xi - \xi \xi^T) \otimes I_3] s - \alpha [(\Xi \mathcal{L}) \otimes I_3] \tilde{p}. \quad (10)$$

将式(10)代入式(8)可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 2\xi_i \tilde{p}_i^T \dot{\tilde{p}}_i &= -\alpha \tilde{p}^T [(\Xi \mathcal{L} + \mathcal{L}^T \Xi) \otimes I_3] \tilde{p} + \\ & 2\tilde{p}^T [(\Xi - \xi \xi^T) \otimes I_3] s. \end{aligned}$$

注意到

$$(\xi^T \otimes I_3) \tilde{p}_i = \sum_{i=1}^n \xi_i (p_i - \delta_i) - \bar{p} = 0,$$

由引理1可知,

$$\tilde{p}^T [(\Xi \mathcal{L} + \mathcal{L}^T \Xi) \otimes I_3] \tilde{p} > a(\mathcal{L}) \tilde{p}^T \tilde{p},$$

式中  $a(\mathcal{L}) > 0$  如引理1中定义所示.

由式(2)和式(3)可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i^T \ddot{p}_{ri} &= -\alpha s^T (\mathcal{L} \otimes I_3) s + \alpha^2 s^T (\mathcal{L}^2 \otimes I_3) \tilde{p} \leq \\ & \alpha \sigma_{\max}(\mathcal{L}) s^T s + \alpha^2 \sigma_{\max}^2(\mathcal{L}) \|s\| \|\tilde{p}\|, \end{aligned}$$

式中  $\sigma_{\max}(\mathcal{L})$  为矩阵  $\mathcal{L}$  的最大奇异值.

另外由假设2以及  $\|s_i\| \leq \|s\|_1$  可知

$$s_i^T \tau_{doi} - \bar{d}_i \|s_i\|_1 \leq \|s_i\| \|\tau_{doi}\| - \bar{d}_i \|s_i\|_1 \leq 0.$$

那么由式(7)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \\ \sum_{i=1}^n (-k_i s_i^T s_i) + \alpha \bar{m} \sigma_{\max}(\mathcal{L}) s^T s - \alpha a(\mathcal{L}) \tilde{p}^T \tilde{p} &+ \\ \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L}) \|s\| \|\tilde{p}\| + 2\tilde{p}^T [(\Xi - \xi \xi^T) \otimes I_3] s &\leq \\ -[k_{\min} - \alpha \bar{m} \sigma_{\max}(\mathcal{L})] \|s\|^2 - \alpha a(\mathcal{L}) \|\tilde{p}\|^2 &+ \\ [2\lambda_{\max} + \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L})] \|s\| \|\tilde{p}\| &= \\ - (k_{\min} - \alpha \bar{m} \sigma_{\max}(\mathcal{L}) - \\ \frac{[2\lambda_{\max} + \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L})]^2}{4\alpha a(\mathcal{L})}) \|s\|^2 - & \\ (\frac{2\lambda_{\max} + \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L})}{2\sqrt{\alpha a(\mathcal{L})}} \|s\| - \sqrt{\alpha a(\mathcal{L})} \|\tilde{p}\|)^2, \end{aligned} \quad (11)$$

式中:  $k_{\min} \triangleq \min_i k_i$ ,  $\lambda_{\max}$  为矩阵  $\Xi - \xi \xi^T$  的最大特征值. 选取  $k_i$  使得  $\forall i=1, \dots, n, k_i > \alpha \bar{m} \sigma_{\max}(\mathcal{L}) + \frac{[2\lambda_{\max} + \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L})]^2}{4\alpha a(\mathcal{L})}$ , 那么

$$\dot{V}(t) \leq 0.$$

至此, 笔者提出本文的主要结论.

**定理 1** 对系统(1), 在存在模块质量不确定性以及外部干扰的条件下, 如果假设1和假设2成立, 那么在控制输入(4)的作用下, 其中控制增益  $k_i > \alpha \bar{m} \cdot \sigma_{\max}(\mathcal{L}) + \frac{[2\lambda_{\max} + \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L})]^2}{4\alpha a(\mathcal{L})}$ , 模块化航天器中各模块的相对轨道将会达到目标队形, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t) - p_j(t) - \delta_{ij}\| = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ .

**证** 在假设1和2成立的条件下, 考虑如式(6)所示的Lyapunov函数, 如果控制增益  $k_i > \alpha \bar{m} \sigma_{\max}(\mathcal{L}) + \frac{[2\lambda_{\max} + \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L})]^2}{4\alpha a(\mathcal{L})}$ , 那么由式(11)可知  $\dot{V}(t) \leq 0$ . 因此  $V(t) \leq V(0)$ , 那么  $s, \tilde{p}, \tilde{m}_i, \tilde{d}_i$  都是有界的. 由式(3)可知  $\dot{p}$  是有界的, 进而由式(2)可知  $\dot{p}_{ri}$  是有界的, 由  $\tilde{p}$  的定义可知  $\dot{\tilde{p}}$  也是有界的. 注意到对近地轨道可知,  $\bar{C}_{oi}, \bar{g}_{oi}$  都是有界的, 那么由式(5)可知  $\dot{s}_i$  也是有界的. 综合以上论述, 可以得到  $s, \tilde{p}, \dot{s}, \dot{\tilde{p}} \in L_\infty$ .

因为  $\dot{V}(t) \leq 0$  以及  $V(t) \geq 0$ , 那么存在  $V(\infty) \in (0, V(0))$  使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V(\infty)$ . 对式(11)两端积分可得

$$(k_{\min} - \alpha \bar{m} \sigma_{\max}(\mathcal{L}) - \frac{[2\lambda_{\max} + \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L})]^2}{4\alpha a(\mathcal{L})}) \int_0^\infty \|s(t)\|^2 dt + \int_0^\infty \left( \frac{2\lambda_{\max} + \alpha^2 \bar{m} \sigma_{\max}^2(\mathcal{L})}{2\sqrt{\alpha a(\mathcal{L})}} \|s\| - \sqrt{\alpha a(\mathcal{L})} \|\tilde{p}\| \right)^2 dt \leq V(0) - V(\infty).$$

那么可得  $s, \tilde{p} \in L_2$ . 因此,  $s, \tilde{p} \in L_2 \cap L_\infty$  且  $\dot{s}, \dot{\tilde{p}} \in \mathcal{L}_\infty$ . 由Barbalet引理<sup>[16:p123]</sup>可知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t)\| = 0$  以及  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{p}(t)\| = 0$ . 由  $\tilde{p}$  的定义可知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t) - \delta_i - \bar{p}(t)\| = 0$ . 那么显然  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t) - p_j(t) - \delta_{ij}\| = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ . 证毕.

**注 3** 与文献[11–12]中一致性问题仅要求控制增益为正常数不同, 定理1中要求控制增益  $k_i$  满足一定的条件, 这是因为本文所提的控制算法没有用到模块间的相对速度信息, 这表明信息的减少增加了对控制量的要求. 这里给出了  $k_i$  的一个下界, 该下界是由描述各模块间信息交互拓扑关系的有向图对应的Laplacian矩阵决定, 而实际上这是一个全局信息. 但是众所周知, Lyapunov方法只是提供了系统稳定性的一个充分条件. 因此, 在实际工程中,  $k_i$  不一定严格按照定理1中给出的下界进行取值, 可以根据实际情况进行适当的调节. 这就意味着系统的全局信息是可以不需要的, 保证了控制算法分布式的特点. 另外, 注意到在式(4a)中引入了符号函数, 这种不连续的控制算法会引起抖振的发生. 在实际工程中, 可以用双曲正切函数  $\hat{d}_i \tanh s_i$  代替符号函数.

**注 4** 虽然定理1中描述各模块间的信息交互拓扑结构为强连通的有向图, 但是利用Laplacian的Perron-Frobenius标准型<sup>[18:p154]</sup>很容易将定理1的结论推广到具有有向生成树的有向图.

### 4 仿真结果(Simulation results)

为验证本文控制算法的有效性, 本节在MATLAB/Simulink环境下对6个模块组成的模块化航天器的分布式一致性进行仿真验证. 假设参考点运行在近圆轨道上, 具有如下初始轨道根数:

$[a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ f] = [7136.0 \text{ km} \ 0.001 \ 60^\circ \ 10^\circ \ 30^\circ \ 0^\circ]$ , 式中:  $a$  为参考轨道的半长轴(km),  $e$  为偏心率,  $i$  为轨道倾角,  $\Omega$  为升交点赤经,  $\omega$  为近地点幅角,  $f$  为初始时刻的真近点角.

图1为模块化航天器中6个模块间的信息交互拓扑关系及其对应的Laplacian矩阵, 可以看出该拓扑图是有向强连通的. 各模块在LVLH坐标系中的初始状态如表1所示.

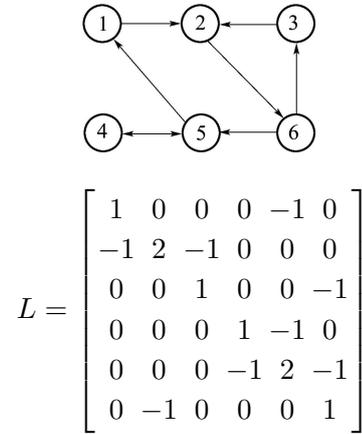


图 1 各模块间的拓扑图及其Laplacian矩阵

Fig. 1 Graph of six modules and its Laplacian matrix

表 1 各模块的初始状态

Table 1 Initial states of the modules	
质量	$m_{o1} = m_{o2} = m_{o3} = 35 \text{ kg}$ $m_{o4} = m_{o5} = m_{o6} = 40 \text{ kg}$
相对位置	$p_1(0) = [150, 100, 300]^T \text{ m}$
	$p_2(0) = [150, -100, 300]^T \text{ m}$
	$p_3(0) = [-200, -200, -300]^T \text{ m}$
	$p_4(0) = [-150, -100, 300]^T \text{ m}$
	$p_5(0) = [150, -100, -300]^T \text{ m}$
	$p_6(0) = [-150, 100, -300]^T \text{ m}$
相对速度	$\dot{p}_i(0) = 0 \text{ m/s} \ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

模块化航天器的目标队形为:  $\delta_{15} = (50, 150, 0)$ ,  $\delta_{21} = (-50, 50, 0)$ ,  $\delta_{23} = (-50, 150, 0)$ ,  $\delta_{36} = (100, -100, 0)$ ,  $\delta_{45} = (-50, 50, 0)$ ,  $\delta_{54} = (50, -50, 0)$ ,  $\delta_{56} = (50, -150, 0)$ ,  $\delta_{62} = (-50, -50, 0)$ . 考虑一个轨道周期下模块化航天器的相对轨道在控制算法(4)下的变化情况. 在仿真中, 外部干扰取为  $\tau_{\text{doi}} = (-1.025 \sin t, 6.248 \cos t, -2.415)^T \times 10^{-4} \text{ N}$ . 控制算法(4a)中的符号函数  $\hat{d}_i \text{sgn } s_i$  被双曲正切函数  $\hat{d}_i \tanh s_i$  取代. 自适应控制律(4a)中卫星质量的估计初值取为真值的50%, 即  $\hat{m}_{oi}(0) = 0.5m_i$ , 式(4b)中  $\hat{d}_i(0) = 0$ . 控制参数取为  $\alpha = 0.01, k_i = 0.02, \gamma_i = 10, \delta_i = 0.01$ . 控制参数的选取主要根据各模块控制

输入的量级以及相对位置和相对速度曲线的变化进行适当的调节。

图2表示控制算法(4)作用下各模块的相对位置的变化曲线,从仿真结果可以看出最终6个模块形成六边形的目标队形.图3为各模块相对速度的变化曲线,结果表明 $\dot{q}_i \rightarrow 0$ .图4为各个卫星所施加的控制输入.值得注意的是,当各模块达到目标队形之后,仍然有控制输入来保持该目标队形.

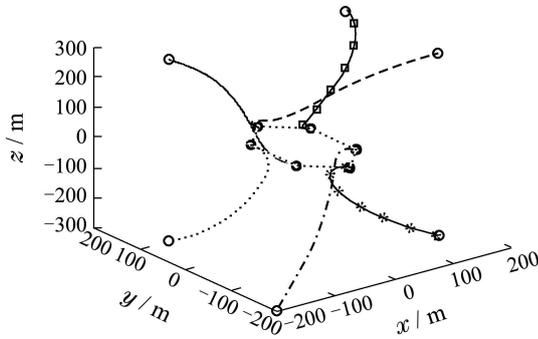


图2 各模块相对位置的变化曲线

Fig. 2 Relative positions of the six modules

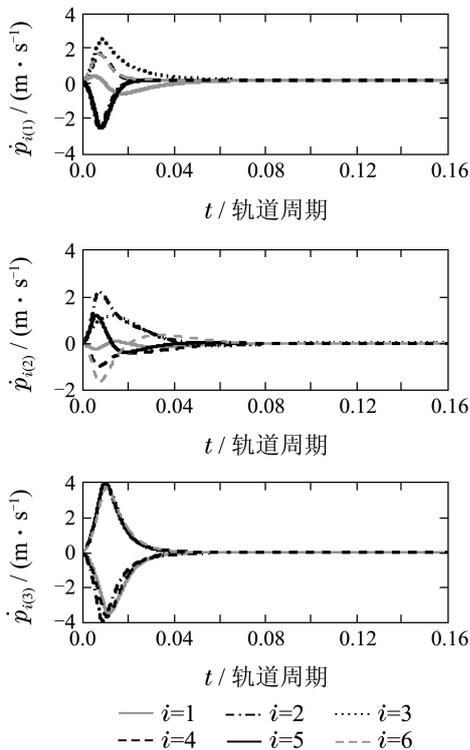


图3 各模块相对速度的变化曲线

Fig. 3 Relative velocities of the six modules

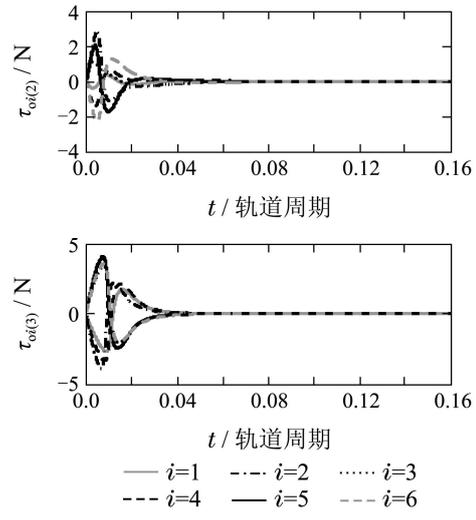
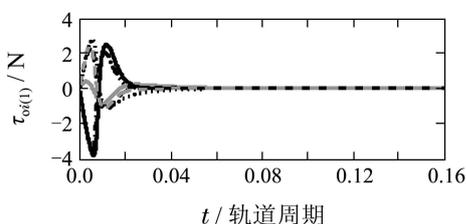


图4 各模块的控制输入

Fig. 4 Control input of the six modules

### 5 结论(Conclusion)

本文基于一致性理论,在有向图中研究了模块化航天器相对轨道的分布式一致性问题.研究了模块存在质量不确定性以及外部干扰具有未知上界的情形.提出的控制算法仅依赖模块自身及其邻近模块的信息,且无需邻近模块的相对速度信息,具有分布式的特点.在描述模块间信息交互关系的有向图为强连通的条件下,当控制增益满足一定的条件时,闭环系统是渐近稳定的.下一步的工作主要考虑无需模块绝对速度信息的输出反馈一致性问题.

### 参考文献(References):

- [1] DE QUEIROZ M S, KAPILA V, YAN Q. Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, 23(3): 385 – 390.
- [2] KAPILA V, SPARKS A G, BUFFINGTON J M, et al. Spacecraft formation flying: dynamics and control [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, 23(3): 561 – 564.
- [3] KRISTIANSSEN R. *Dynamic synchronization of spacecraft* [D]. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, 2008: 83 – 84.
- [4] 卢山, 徐世杰. 航天器椭圆轨道自主会聚的自适应学习控制策略 [J]. *航空学报*, 2009, 30(1): 127 – 131.  
(LU Shan, XU Shijie. Adaptive learning control strategy for autonomous rendezvous of spacecrafts on elliptical orbit [J]. *Acta Astronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(1): 127 – 131.)
- [5] 毕鹏, 罗建军, 张博. 一种基于一致性理论的航天器编队飞行协同控制方法 [J]. *宇航学报*, 2010, 31(1): 70 – 74.  
(BI Peng, LUO Jianjun, ZHANG Bo. Cooperate control algorithm for spacecraft formation flying based on consensus theory [J]. *Journal of Astronautics*, 2010, 31(1): 70 – 74.)
- [6] 马广富, 梅杰. 多星系统相对轨道的自适应协同控制 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(6): 781 – 787.  
(MA Guangfu, MEI Jie. Adaptive cooperative control for relative orbits of multi-satellites systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 781 – 787.)

- [7] CHUNG S J, AHSUN U, SLOTINE J J E. Application of synchronization to formation flying spacecraft: Lagrangian approach [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(2): 512 – 526.
- [8] REN W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems [J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(11): 2137 – 2149.
- [9] MEI J, REN W, MA G. Distributed coordinated tracking with a dynamic leader for multiple Euler-Lagrange systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1415 – 1421.
- [10] 梅杰, 张海博, 马广富. 有向图中Euler-Lagrange系统的自适应协调跟踪 [J]. 自动化学报, 2011, 37(5): 596 – 603.  
(MEI Jie, ZHANG Haibo, MA Guangfu. Adaptive coordinated tracking for networked Euler-Lagrange systems under a directed graph [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(5): 596 – 603.)
- [11] NUNO E, ORTEGA R, BASANEZ L, et al. Synchronization of networks of nonidentical Euler-Lagrange systems with uncertain parameters and communication delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 935 – 941.
- [12] MEI J, REN W, MA G. Distributed containment control for Lagrangian networks with parametric uncertainties under a directed graph [J]. *Automatica*, 2012, 48(4): 653 – 659.
- [13] ROYLE G, GODSIL C. *Algebraic Graph Theory* [M]. New York: Springer Graduate Texts in Mathematics, 2001.
- [14] YU W, CHEN G, CAO M, et al. Second-order consensus for multi-agent systems with directed topologies and nonlinear dynamics [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2010, 40(3): 881 – 891.
- [15] ALFRIEND T, VADALI S, GURFIL P, et al. *Spacecraft Formation Flying: Dynamics, Control and Navigation* [M]. USA: Butterworth-Heinemann, 2009.
- [16] SLOTINE J J E, LI W. *Applied Nonlinear Control* [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [17] DIMAROGONAS D, KYRIAKOPOULOS K. A connection between formation infeasibility and velocity alignment in kinematic multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(10): 2648 – 2654.
- [18] QU Z. *Cooperative Control of Dynamical Systems* [M]. London: Springer-Verlag, 2011.

### 作者简介:

**刘付成** (1970–), 男, 研究员, 目前研究方向为模块化航天器编队飞行, E-mail: liufc\_hit@163.com;

**梅杰** (1986–), 男, 在做博士后研究工作, 目前研究方向为多智能体协调控制及航天器编队飞行, E-mail: jmei@hitsz.edu.cn;

**马广富** (1963–), 男, 教授, 目前研究方向为最优控制、航天器控制方面的教学与科研工作, E-mail: magf@hit.edu.cn.