

DOI: 10.7641/CTA.2014.30551

非仿射系统的自适应观测器自抗扰控制

程春华^{1†}, 胡云安¹, 吴进华¹, 邹 强²

(1. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001; 2. 海军航空工程学院 飞行器工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 研究了一类单输入单输出(SISO)非仿射非线性系统的控制问题, 通过微分同胚变换以及自抗扰思想将该类形式转化成含有未知非线性且控制增益未知的仿射形式. 引入扩展状态自适应观测器以及Nussbaum-type增益技术, 利用积分反演和调节函数技术, 设计了自抗扰控制器. 从理论上证明了所设计的控制器能够保证闭环系统所有信号全局一致有界, 并且证明了跟踪误差渐近收敛到零点的残集内. 仿真例子验证了算法的有效性.

关键词: 非仿射非线性; 自抗扰; 扩展状态自适应观测器

中图分类号: TP13 文献标识码: A

Auto disturbance rejection controller for non-affine nonlinear systems with adaptive observers

CHENG Chun-hua^{1†}, HU Yun-an¹, WU Jin-hua¹, ZOU Qiang²

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China;

2. Department of Airborne Vehicle Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China)

Abstract: The control for a class of SISO non-affine nonlinear systems is studied. Based on differential homeomorphism transform and the auto disturbance rejection idea, the system is transformed to the affine form with unknown control directions and uncertain nonlinear terms. Combined with extended state adaptive observers (ESAO) and Nussbaum-type gain technique, a auto disturbance rejection controller (ADRC) is designed by employing the integrator backstepping and tuning function approach. According to Lyapunov stability analysis, we prove that the controller guarantees all signals in the closed-loop system to be globally uniformly bounded; especially, the tracking error can asymptotically converge to an arbitrary small region of the origin. The effectiveness of the proposed algorithm is validated by simulation examples.

Key words: non-affine nonlinear; auto disturbance rejection (ADR); extend state adaptive observers

1 引言(Introduction)

近年来, 非仿射型系统的控制问题得到了广泛关注, 并取得了大量的研究成果^[1-6]. 1998年, S. S. GE在文献[1]中假设SISO非仿射非线性系统具有强相对度, 利用微分同胚变换将非仿射形式转化为严格反馈输入非仿射形式, 通过隐函数定理证明存在控制器, 最后用自适应多层神经网络构建这种理想的控制器. 2000年, S. S. GE在文献[1]的基础上, 采用泰勒级数将严格反馈输入非仿射形式变成输入仿射形式^[2]. 在2003年, S. S. GE又考虑零动态, 设计了高增益观测器重构系统的状态, 进一步扩展了该方法^[3]. 文献[5]利用前面文献的基本技巧, 例如中值定理、反演技术和逼近定理, 研究了每个子系统都是嵌套下三角形式的MIMO非仿射非线性系统的控制. 2011年, 文献[6]针对严格反馈输入非仿射非线性系统, 设计了滤波跟踪误差, 然后利用中值定理和神经网络设计了鲁棒控制

器. 总的来说, 前述文献解决此类问题可以归结为两步: 首先基于隐函数定理或中值定理或泰勒级数定理, 证明存在理想的控制器能够镇定该类系统; 其次, 利用逼近定理构建理想的控制器, 然后利用Lyapunov进行稳定性分析. 但是由于设计中需要构建模糊和神经网络逼近器, 同时还涉及到对虚拟控制(含有模糊和神经基函数或是符号函数)的求导, 随着输入维数及系统阶的增加, 会使这类问题的控制设计显得异常的复杂.

本文将采用韩京清教授提出的自抗扰控制技术(ADRC)^[7-8]对一类仿射系统进行研究. 该控制器的设计不依赖于对象的精确数学模型, 它将对象的未建模动态、外部干扰等视为一个综合扰动, 并对其实时估计及补偿, 利用性能良好的非线性反馈控制结构实现系统的高品质控制. 为了提高自抗扰控制性能, 不少学者研究了控制结构确定的情况下的参数选取规则. 文献[9]利用粒子群优化算法(particle swarm

optimization, PSO)优化算法对ADRC的参数进行优化整定. 文献[10]从频域角度, 分析并推导出含线性化扩张状态观测器(extended state observer, ESO)的自抗扰控制器的参数确定方法. 文献[11]则采用遗传算法对控制器参数进行优化. 文献[12]尝试将变尺度混沌优化方法应用于ADRC参数的寻优设计. 文献[13]将神经网络技术应用于ADRC参数的优化中, 取得了较好的研究效果. 但是上述文献要求系统所有的状态可测, 或者要求每个子系统是积分链式结构, 并且都没有考虑与被控对象结构有关的参数, 考虑到这些参数时, 上述文献的扩展观测器都不适用了. 文献[14–16]研究了控制方向未知的非线性系统的状态反馈控制. 文献[17]研究了不确定控制系数的非线性系统输出反馈, 文献[18]在文献[17]的基础上考虑了外部干扰, 设计了输出反馈自适应扰动抑制控制器, 但是文中仅考虑了均值为零的外部干扰, 并且文献[17]和文献[18]都没有考虑系统未知非线性的存在. 为了有效处理均值不为零的外部干扰以及系统的未知非线性, 本文引入了扩展状态.

本文研究了一类非仿射非线性系统的控制, 首先利用微分同胚变换以及自抗扰思想将该类形式转化成含有未知非线性且控制增益未知的仿射形式, 然后提出了扩展状态自适应观测器自抗扰控制, 解决了在不需知道所有状态信息的条件下具有外部干扰的非仿射系统的控制问题. 仿真结果表明该设计方案对系统内部的不确定性和系统外部的干扰具有很好的抑制能力.

2 问题描述和准备(Problem formulation and preliminaries)

考虑如下单输入单输出(SISO)非仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ y = h(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (1)$$

式中: 状态向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 输入 $u \in \mathbb{R}$, 输出 $y \in \mathbb{R}$, 并且 $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$ 是未知的光滑非线性函数向量和 $h(\cdot)$ 是未知的光滑非线性函数. 控制目标是让输出 y 跟踪有界的期望轨迹 y_d , 同时保证所有的闭环信号有界.

定义 1 不妨取紧集 $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\Omega_u \subset \mathbb{R}$, 并且使得 $x \in \Omega_x, u \in \Omega_u$. 如果系统(1)在紧集 $U = \Omega_x \times \Omega_u$ 上有强相对度 ρ , 则存在正整数 $1 \leq \rho < \infty$, 使得下式成立:

$$\begin{cases} \frac{\partial [L_f^i h]}{\partial u} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \rho - 1, \\ \frac{\partial [L_f^\rho h]}{\partial u} \neq 0, \end{cases} \quad (2)$$

假设 1 系统(1)拥有强相对度 $\rho = n, \forall (\mathbf{x}, u) \in U$.

在假设1条件下, 系统(1)是可反馈线性化的, 并且

映射 $\phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x}))^T$ 对所有的 $\mathbf{x} \in \Omega$ 非奇异, 其中 $\phi_j(\mathbf{x}) = L_f^j h, j = 1, \dots, n, \phi(\mathbf{x})$ 在 Ω_x 上微分同胚. 定义新坐标 $\boldsymbol{\xi} = \phi(\mathbf{x})$, 则系统能转换成下面的形式:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 1, \\ \dot{\xi}_n = b(\boldsymbol{\xi}, u), \\ y = \xi_1, \end{cases} \quad (3)$$

式中: $b(\boldsymbol{\xi}, u) = L_f^n h(\mathbf{x}), \mathbf{x} = \phi^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ 且 $\boldsymbol{\xi} \in \phi_\xi, \phi_\xi = \phi(\Omega_x)$. 定义系统(3)的域为

$$\bar{U} := \{(\boldsymbol{\xi}, u) | \boldsymbol{\xi} \in \phi(\Omega_x); u \in \Omega_u\}. \quad (4)$$

不妨定义 $b_u = \frac{\partial b(\boldsymbol{\xi}, u)}{\partial u}$ 和 $\dot{b}_u = \frac{d(b_u)}{dt}$ 是光滑的函数. 根据假设1和定义1, 可以得出 $b_u \neq 0, \forall (\boldsymbol{\xi}, u) \in \bar{U}$, 这意味着对所有的 $(\boldsymbol{\xi}, u) \in \bar{U}$, 该光滑函数 b_u 为严格正或严格负.

假设 2 存在正常数 g_0 和 g_1 , 对所有的 $(\boldsymbol{\xi}, u) \in \bar{U}$, 有 $g_0 \leq b_u \leq g_1$ ^[3].

考虑如下时变系统:

$$\dot{y} = f(y, w(t)) + b(t)u, \quad (5)$$

其中: f, w, b 均为不确定函数, $b_2 > b(t) > b_1 > 0$, 取 $b(t)$ 变化范围内的某一中间值 b_0 , 则系统(5)可改写成

$$\dot{y} = f(y, w(t)) + (b(t) - b_0)u + b_0u. \quad (6)$$

可以将 $(b(t) - b_0)u$ 当作新的扰动项, 定义 $a(t, u) = f(y, w(t)) + (b(t) - b_0)u$. 为系统(6)构建扩展状态观测器 (Z_1, Z_2) , 其中 Z_2 为扩展状态, 有 $Z_2 \rightarrow a(t, u)$, 则可设计如下状态反馈控制器来镇定系统(6):

$$u(t) = -\frac{Z_2}{b_0} - ky, \quad (7)$$

式中 $k > 0$ 为待设计的常数.

引理 1 针对时变系统(5), 只要 $b_2 > b(t) > b_1 > 0$, 则可以通过为它构建ESO, 在 $b(t)$ 变化范围内取某一中间值 b_0 , 设计控制器(7)使系统(5)渐近镇定^[7].

注 1 b 是被控对象有关的参数, 它对ADRC的控制性能起着很重要的作用. $b(t) - b_0$ 越小, b_0u 的自抗扰效果也越好. 该引理的详细说明可以参见文献[7–8].

3 自适应自抗扰控制器设计(Adaptive auto disturbance rejection controller design)

自抗扰控制器主要由3部分组成: 微分跟踪器、扩展状态观测器、状态反馈控制律. 欲使ADRC很好地处理系统(3), 关键是根据系统特性调好 $n + 1$ 阶ESO. 文献[7–13]在ESO设计前都是先在 $b(t)$ 的取值范围内任意确定某值 b_0 , 但是其范围是未知的, 尽管ESO最后能补偿该选择带来的误差. 为了解决 $b(t)$ 的取值范围未知这个难题, 本文将 b_0 视为未知常数, 然后设计了自适应扩展状态观测器.

由假设2和引理1可知,系统(3)可以写成下列形式:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_n = g(\xi, u) + g_0 u, \\ y = \xi_1, \end{cases} \quad (8)$$

式中 $g(\xi, u) + g_0 u = b(\xi, u)$,且 g_0 是未知常数(控制增益), $g(\xi, u)$ 是未知非线性,由于 $b(\xi, u) = L_f^r h(x)$ 是光滑的函数,故 $g(\xi, u)$ 也是光滑的函数,则系统(8)是具有未知非线性和控制增益未知的系统.引入 ξ_{n+1} 作为扩展状态,则系统(8)可写成

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_n = \xi_{n+1} + g_0 u, \\ \dot{\xi}_{n+1} = -\omega(t), \\ y = \xi_1, \end{cases} \quad (9)$$

式中 $\omega(t)$ 为有界的光滑的不确定函数(它相当于未知非线性 $g(\xi, u)$ 的导数),即存在未知常数 ω_0 ,满足 $|\omega(t)| < \omega_0$.接着为系统(9)设计自适应观测器.

注2 当系统存在外部干扰 $w_0(t)$ 时,假设该外部干扰作用于输入通道,并且通过上述变化,该外部干扰仍然作用于输入通道,不妨设变换后的干扰为 $w(t)$,则系统(3)中 $b(\xi, u)$ 可以写成 $b(\xi, u, w)$,同时 $g(\xi, u)$ 可以写成 $g(\xi, u, w)$.该含有未知外部干扰的未知非线性项可以成为总的未知部分,本文仍然可以对它引入扩展状态,以便构建状态估计器.

在此,本文试着用两个滤波器重构系统的状态,其中滤波器 O_1 是针对系统不包含未知常数 g_0 的部分,滤波器 O_2 是针对系统未知部分.用 η_0 和 η_1 表示两个滤波器的状态,则原系统状态可以重构为

$$\xi = \eta_0 + g_0 \eta_1 + \varepsilon, \quad (10)$$

式中 ε 是状态估计误差,为了保证 ε 渐近收敛,可以构建下面两个滤波器:

$$O_1 : \begin{cases} \dot{\eta}_{0,i} = k_i(y - \eta_{0,1}) + \eta_{0,(i+1)}, \\ i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\eta}_{0,n} = k_n(y - \eta_{0,1}) + \eta_{0,(n+1)}, \\ \dot{\eta}_{0,n+1} = k_{n+1}(y - \eta_{0,1}), \end{cases} \quad (11)$$

$$O_2 : \begin{cases} \dot{\eta}_{1,i} = -k_i \eta_{1,1} + \eta_{1,(i+1)}, \\ i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\eta}_{1,n} = -k_n \eta_{1,1} + \eta_{1,(n+1)} + u, \\ \dot{\eta}_{1,(n+1)} = -k_{n+1} \eta_{1,1}, \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n+1})^T$ 是待设计的增益向量,并且使得下面的矩阵 \mathbf{A}_0 是Hurwitz:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & \dots & 0 \\ -k_2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ -k_{n+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

将对象和两个滤波器写成下列形式:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \mathbf{A}_0 \xi + \mathbf{k}y + \beta u + \varphi, \\ \beta = (0, \dots, g_0, 0)^T, \\ \varphi = (0, \dots, 0, -\omega(t))^T, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_0 = \mathbf{A}_0 \eta_0 + \mathbf{k}y, \\ \dot{\eta}_1 = \mathbf{A}_0 \eta_1 + \mathbf{e}_{(n+1)-1} u, \mathbf{e}_{(n+1)-1} \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{e}_{(n+1)-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0)^T$ 是单位向量,结合方程(14)和方程(15),对状态估计误差 ε 微分得

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\xi} - \dot{\eta}_0 - g_0 \dot{\eta}_1 = \\ &\mathbf{A}_0 \xi + \mathbf{k}y + \beta u + \varphi - \mathbf{A}_0 \eta_0 - \\ &\mathbf{k}y - \mathbf{A}_0 g_0 \eta_1 - g_0 \mathbf{e}_{(n+1)-1} u = \\ &\mathbf{A}_0 (\xi - \eta_0 - g_0 \eta_1) + \varphi = \\ &\mathbf{A}_0 \varepsilon + \varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

由于 $\|\varphi\| = |\omega(t)| \leq \omega_0$, \mathbf{A}_0 是Hurwitz矩阵,所以 ε 渐近收敛到 $B(0, \omega_0/\lambda_{\min}(\mathbf{A}_0))$ 范围内,并且该范围可以通过设计增益向量 \mathbf{k} 使其尽量小.不妨对系统(16)取其估计方程为

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = \mathbf{A}_0 \hat{\varepsilon}, \quad (17)$$

则式(10)可以表示成

$$\xi = \eta_0 + g_0 \eta_1 + \hat{\varepsilon}. \quad (18)$$

接下来可以设计自适应输出反馈控制器:

Step 1 控制目标让系统的输出跟踪上参考信号,所以第1个误差变量取跟踪误差

$$z_1 = y - y_r. \quad (19)$$

对其进行微分得

$$\dot{z}_1 = \dot{y} - \dot{y}_r = \xi_2 - \dot{y}_r. \quad (20)$$

因为 ξ_2 是不可测的,所以不能作为虚拟控制,在此,将用它的虚拟估计以及估计误差来替代

$$\xi_2 = \eta_{0,2} + g_0 \eta_{1,2} + \hat{\varepsilon}_2. \quad (21)$$

将式(21)代入到式(20),可得

$$\dot{z}_1 = \eta_{0,2} + g_0 \eta_{1,2} + \hat{\varepsilon}_2 - \dot{y}_r. \quad (22)$$

从式(22)可以分析出,只有 $\eta_{1,2}$ 的 $n-2$ 阶导数中会出现控制变量 u ,故选取 $\eta_{1,2}$ 作为虚拟控制.由于式(22)中出现状态估计误差,所以应该设计非线性阻滞项来补偿.又因为 g_0 未知,故在此引入Nussbaum增益设计虚拟控制律

$$\alpha_1 = N_1(v) \bar{\alpha}_1. \quad (23)$$

参数 v 满足下式:

$$\dot{v} = \gamma_v z_1 \bar{\alpha}_1. \quad (24)$$

参数 γ_v 是待设计的正常数,Nussbaum增益函数满足下列属性:

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \sup \frac{1}{s} \int_0^s N(v) dv = +\infty, \\ \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \inf \frac{1}{s} \int_0^s N(v) dv = -\infty. \end{cases} \quad (25)$$

它可以取函数 $e^{v^2} \cos(\pi v/2)$, $v^2 \cos(\pi v/2)$ 或 $\ln(v+1) \cos(\sqrt{\ln(v+1)})$.

本文设计 $\bar{\alpha}_1$ 如下:

$$\bar{\alpha}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \eta_{0,2} + \dot{y}_r, \quad (26)$$

式中 c_1, d_1 为待设计的正实数, 其中 $d_1 z_1$ 是非线性阻滞项, 定义变量

$$z_2 = \eta_{1,2} - \alpha_1, \quad (27)$$

则式(22)可以写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \eta_{0,2} + g_0(z_2 + \alpha_1) + \hat{\varepsilon}_2 - \dot{y}_r = \\ &\eta_{0,2} + g_0 z_2 + (g_0 N_1(v) - 1)\bar{\alpha}_1 + \\ &\bar{\alpha}_1 + \hat{\varepsilon}_2 - \dot{y}_r = \\ &g_0 z_2 + (g_0 N_1(v) - 1)\bar{\alpha}_1 - c_1 z_1 - d_1 z_1 + \hat{\varepsilon}_2. \end{aligned} \quad (28)$$

构建Lyapunov函数如下:

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{d_1} \hat{\varepsilon}^T P_0 \hat{\varepsilon}, \quad (29)$$

其中 $P_0 A_0 + A_0^T P_0 = -I$. 对式(29)微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -c_1 z_1^2 - d_1 z_1^2 + z_1 \hat{\varepsilon}_2 - \frac{1}{d_1} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} + \\ &z_1(g_0 z_2 + (g_0 N_1(v) - 1)\bar{\alpha}_1) \leq \\ &-c_1 z_1^2 - d_1(z_1 - \frac{1}{2d_1} \hat{\varepsilon}_2)^2 - \frac{3}{4d_1} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} + \\ &g_0 z_2 z_1 + z_1(g_0 N_1(v) - 1)\bar{\alpha}_1 \leq \\ &-c_1 z_1^2 - \frac{3}{4d_1} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} + g_0 z_2 z_1 + \\ &z_1(g_0 N_1(v) - 1)\bar{\alpha}_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Step 2 对式(27)进行微分得

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{\eta}_{1,2} - \dot{\alpha}_1 = \\ &\eta_{1,3} - k_2 \eta_{1,1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 - \sum_{i=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r^{(i)}} y_r^{(i+1)} - \\ &\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\eta_{0,2} + g_0 \eta_{1,2} + \hat{\varepsilon}_2). \end{aligned} \quad (31)$$

注 3 $\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r$. 由于 α_1 中含有Nussbaum函数, 在计算过程中可采用链式求导法则, 例如 $\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial N_1(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \bar{\alpha}_1 + N_1 \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial y} \dot{y}$, 其他项也是如此. 为了下文的推导方便, $\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y}$ 写成式(31)中的 $\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\eta_{0,2} + g_0 \eta_{1,2} + \hat{\varepsilon}_2)$ 形式.

从式(31)可以看出, 状态估计误差出现了, 所以需要设计非线性阻滞项来补偿, 则虚拟控制量可设计为

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -c_2 z_2 - d_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_2 - \hat{g}_0 z_1 + k_2 \eta_{1,1} + \\ &\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \eta_{0,2} + \hat{g}_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \eta_{1,2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 + \\ &\sum_{i=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r^{(i)}} y_r^{(i+1)}, \end{aligned} \quad (32)$$

式中 c_2, d_2 为待设计的正实数, 其中: $d_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_2$ 是非线性阻滞项, \hat{g}_0 为 g_0 的估计值, 其估计误差为 $\tilde{g}_0 = g_0 - \hat{g}_0$, 定义变量

$$z_3 = \eta_{1,3} - \alpha_2. \quad (33)$$

将式(32)和式(33)代入式(31)得出

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= z_3 - c_2 z_2 - d_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_2 - \hat{g}_0 z_1 - \\ &\tilde{g}_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \eta_{1,2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \hat{\varepsilon}_2. \end{aligned} \quad (34)$$

构建Lyapunov函数如下:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{g}_0^T \Gamma^{-1} \tilde{g}_0 + \frac{1}{d_2} \hat{\varepsilon}^T P_0 \hat{\varepsilon}, \quad (35)$$

式中 Γ 为待设计的正常数, 对其微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -c_1 z_1^2 - \frac{3}{4d_1} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} + g_0 z_2 z_1 + \tilde{g}_0^T \Gamma^{-1} (-\dot{\tilde{g}}_0) - \\ &\frac{1}{d_2} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} + z_1(g_0 N_1(v) - 1)\bar{\alpha}_1 + z_2 \dot{z}_2 = \\ &-c_1 z_1^2 - \frac{3}{4d_1} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + \frac{1}{4d_2} \hat{\varepsilon}_2^2 + \\ &z_1(g_0 N_1(v) - 1)\bar{\alpha}_1 - d_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} z_2 + \frac{1}{2d_2} \hat{\varepsilon}_2\right)^2 + \\ &\tilde{g}_0 [z_2(z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \eta_{1,2}) - \Gamma^{-1} \dot{\tilde{g}}_0] - \frac{1}{d_2} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} \leq \\ &-\sum_{i=1}^2 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}) + \tilde{g}_0 [\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\tilde{g}}_0] + \\ &z_2 z_3 + z_1(g_0 N_1(v) - 1)\bar{\alpha}_1, \end{aligned} \quad (36)$$

式中 $\tau_1 = z_2(z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \eta_{1,2})$ 为第1个调节函数.

Step 3 对式(33)进行微分得

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \eta_{1,4} - k_3 \eta_{1,1} - \dot{\alpha}_2 = \\ &\eta_{1,4} - k_3 \eta_{1,1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} (\eta_{0,2} + g_0 \eta_{1,2} + \hat{\varepsilon}_2) - \\ &\frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{g}_0} \dot{\hat{g}}_0 - \sum_{i=0}^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r^{(i)}} y_r^{(i+1)}. \end{aligned} \quad (37)$$

上式中出现了观测误差, 因此需要设计非线性阻滞项来补偿. 这一步的目标是设计虚拟控制 α_3 使系统 (z_1, z_2, z_3) (即由式(28)(34)(37)构成的系统) 稳定, 选取Lyapunov函数如下:

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 + \frac{1}{d_3} \hat{\varepsilon}^T P_0 \hat{\varepsilon}. \quad (38)$$

设计虚拟控制如下:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -c_3 z_3 - z_2 - d_3 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial y}\right)^2 z_3 - z_2 + \\ &k_3 \eta_{1,1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \eta_{0,2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 + \\ &\sum_{i=0}^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r^{(i)}} y_r^{(i+1)} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \hat{g}_0 \eta_{1,2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{g}_0} \Gamma \tau_2, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\tau_2 = \tau_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} z_3 \eta_{1,2}, \quad (40)$$

式中 c_3, d_3 为待设计的正实数, 其中: $d_3(\frac{\partial \alpha_2}{\partial y})^2 z_3$ 是非线性阻滞项, τ_2 为第2个调节函数. 定义变量

$$z_4 = \eta_{1,4} - \alpha_3. \quad (41)$$

对式(38)微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & - \sum_{i=1}^2 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ & z_2 z_3 + \tilde{g}_0 [\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{g}_0] + z_3 \dot{z}_3 - \frac{1}{d_3} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon} = \\ & - \sum_{i=1}^2 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ & \tilde{g}_0 [\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{g}_0] - \frac{1}{d_3} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon} + \\ & z_3 \left[\begin{array}{l} z_2 + z_4 - c_3 z_3 - d_3 (\frac{\partial \alpha_2}{\partial y})^2 z_3 - z_2 \\ - \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \epsilon_2 - \tilde{g}_0 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \eta_{1,2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{g}_0} (\dot{g}_0 - \Gamma \tau_2) \end{array} \right] = \\ & - \sum_{i=1}^2 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 - \\ & c_3 z_3^2 - \frac{\hat{\epsilon}_2^2}{4d_3} - d_3 (\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} z_3 + \frac{1}{2d_3} \hat{\epsilon}_2)^2 + z_3 z_4 + \\ & \tilde{g}_0 (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{g}_0) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{g}_0} z_3 (\dot{g}_0 - \Gamma \tau_2) \leq \\ & - \sum_{i=1}^3 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ & z_3 z_4 + \tilde{g}_0 (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{g}_0) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{g}_0} z_3 (\dot{g}_0 - \Gamma \tau_2). \quad (42) \end{aligned}$$

Step 4 对式(41)进行微分得

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = & \eta_{1,5} - k_4 \eta_{1,1} - \dot{\alpha}_3 = \\ & \eta_{1,5} - k_4 \eta_{1,1} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} (\eta_{0,2} + g_0 \eta_{1,2} + \hat{\epsilon}_2) - \\ & \frac{\partial \alpha_3}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 - \frac{\partial \alpha_3}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 - \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} \dot{g}_0 - \sum_{i=0}^3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y_r^{(i)}} y_r^{(i+1)}. \quad (43) \end{aligned}$$

上式中出现了观测误差, 因此需要设计非线性阻滞项来补偿. 选取Lyapunov函数如下:

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2} z_4^2 + \frac{1}{d_4} \hat{\epsilon}^T P_0 \hat{\epsilon}. \quad (44)$$

设计虚拟控制如下:

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & -c_4 z_4 - z_3 - d_4 (\frac{\partial \alpha_3}{\partial y})^2 z_4 + k_4 \eta_{1,1} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \eta_{0,2} + \\ & \frac{\partial \alpha_3}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 + \sum_{i=0}^3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y_r^{(i)}} y_r^{(i+1)} + \\ & (-\frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} \Gamma z_3 + \hat{g}_0) \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \eta_{1,2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} \Gamma \tau_3, \quad (45) \end{aligned}$$

$$\tau_3 = \tau_2 - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} z_4 \eta_{1,2}, \quad (46)$$

式中 c_4, d_4 为待设计的正实数, 其中: $d_4(\frac{\partial \alpha_3}{\partial y})^2 z_4$ 是非线性阻滞项, τ_3 为第3个调节函数. 定义变量

$$z_5 = \eta_{1,5} - \alpha_4. \quad (47)$$

对式(44)微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 \leq & - \sum_{i=1}^3 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ & z_3 z_4 + \tilde{g}_0 (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{g}_0) - \\ & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{g}_0} z_3 (\dot{g}_0 - \Gamma \tau_2) + z_4 \dot{z}_4 - \frac{1}{d_4} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon} = \\ & - \sum_{i=1}^3 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ & \tilde{g}_0 (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{g}_0) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{g}_0} z_3 (\dot{g}_0 - \Gamma \tau_2) - \frac{1}{d_4} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon} + \\ & z_4 [z_3 + z_5 - c_4 z_4 - d_4 (\frac{\partial \alpha_3}{\partial y})^2 z_4 - z_3 - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \hat{\epsilon}_2 + \\ & (-\frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} \Gamma z_3 - \tilde{g}_0) \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \eta_{1,2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} (\Gamma \tau_3 - \dot{g}_0)] = \\ & - \sum_{i=1}^3 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) - d_4 (\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} z_4 + \frac{1}{2d_4} \hat{\epsilon}_2)^2 - \\ & c_4 z_4^2 - \frac{1}{4d_4} \hat{\epsilon}_2^2 - \frac{1}{d_4} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon} + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ & \tilde{g}_0 (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{g}_0) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{g}_0} z_3 (\dot{g}_0 - \Gamma \tau_2) - \\ & (-\frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} \Gamma z_3 - \tilde{g}_0) \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} z_4 \eta_{1,2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} z_4 (\Gamma \tau_3 - \dot{g}_0) \leq \\ & - \sum_{i=1}^4 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ & \tilde{g}_0 (\tau_2 - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} z_4 \eta_{1,2} - \Gamma^{-1} \dot{g}_0) + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} z_4 (\Gamma \tau_3 - \dot{g}_0) + \\ & \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} z_3 (-\dot{g}_0 + \Gamma \tau_2 - \Gamma \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} z_4 \eta_{1,2}). \quad (48) \end{aligned}$$

由式(47)可以注意到

$$\begin{aligned} \Gamma \tau_2 - \dot{g}_0 = & \Gamma \tau_2 - \Gamma \tau_3 + \Gamma \tau_3 - \dot{g}_0 = \\ & \Gamma \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} z_4 \eta_{1,2} + \Gamma \tau_3 - \dot{g}_0, \quad (49) \end{aligned}$$

则式(48)可以写成

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 \leq & - \sum_{i=1}^4 (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ & \tilde{g}_0 (\tau_3 - \Gamma^{-1} \dot{g}_0) + (\frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} z_3 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \hat{g}_0} z_4) (\Gamma \tau_3 - \dot{g}_0). \quad (50) \end{aligned}$$

Step i ($i = 5, \dots, n-1$) 重复上面的过程, 可以对第 i 次的跟踪误差进行微分得

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \eta_{1,i+1} - k_i \eta_{1,1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (\eta_{0,2} + g_0 \eta_{1,2} + \\ &\hat{\varepsilon}_2) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{g}_0} \dot{\hat{g}}_0 - \\ &\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)}. \end{aligned} \quad (51)$$

上式中出现了观测误差, 因此需要设计非线性阻滞项来补偿. 选取虚拟控制

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -c_i z_i - z_{i-1} - d_i \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i + k_i \eta_{1,1} + \\ &\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \eta_{0,2} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 + \\ &\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)} + \left(-\sum_{j=3}^{i-1} z_j \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{g}_0} \Gamma + \right. \\ &\left. \hat{g}_0\right) \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \eta_{1,2} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{g}_0} \Gamma \tau_{i-1}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\tau_{i-1} = \tau_{i-2} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} z_i \eta_{1,2}, \quad (53)$$

式中 c_i, d_i 为待设计的正实数, 其中: $d_i \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i$ 是非线性阻滞项, τ_{i-1} 为第 $i-1$ 个调节函数. 相应的 Lyapunov 函数可以选取为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{d_i} \hat{\varepsilon}^T \mathbf{P}_0 \hat{\varepsilon}. \quad (54)$$

对其微分后得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\sum_{j=1}^i (c_j z_j^2 + \frac{3}{4d_j} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}) + z_i z_{i+1} + \\ &\hat{g}_0 (\tau_{i-1} - \Gamma^{-1} \dot{\hat{g}}_0) + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + \\ &\left(\sum_{j=3}^i z_j \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{g}_0}\right) (\Gamma \tau_{i-1} - \dot{\hat{g}}_0). \end{aligned} \quad (55)$$

在最后一步, 控制 u 出现在 z_n 的动态方程里, 因此可以对其进行设计. z_n 的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \eta_{1,n+1} + u - k_n \eta_{1,1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 - \\ &\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} (\eta_{0,2} + g_0 \eta_{1,2} + \hat{\varepsilon}_2) - \\ &\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{g}_0} \dot{\hat{g}}_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)}. \end{aligned} \quad (56)$$

可选取控制量和参数自适应律为

$$\begin{aligned} u &= -c_n z_n - z_{n-1} - d_n \left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2 z_n - \eta_{1,n+1} + \\ &k_n \eta_{1,1} + \left(-\sum_{j=3}^{n-1} z_j \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{g}_0} \Gamma + \hat{g}_0\right) \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \eta_{1,2} + \\ &\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \eta_{0,2} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 + \\ &\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{g}_0} \Gamma \tau_{n-1}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\tau_{n-1} = \tau_{n-2} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} z_n \eta_{1,2}, \quad (58)$$

$$\dot{\hat{g}}_0 = \Gamma \tau_{n-1}, \quad (59)$$

式中 c_n, d_n 为待设计的正实数, 其中: $d_n \left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2 z_n$ 是非线性阻滞项, τ_{n-1} 为调节函数.

由于前面采用的都是 ε 的估计值 $\hat{\varepsilon}$, 因此最后的 Lyapunov 函数需要包含这部分的误差, 定义该误差为 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\varepsilon}$, 则 Lyapunov 函数选取为

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{d_n} \hat{\varepsilon}^T \mathbf{P}_0 \hat{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}^T \mathbf{P}_0 \tilde{\varepsilon}. \quad (60)$$

对其微分后得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\sum_{i=1}^n (c_i z_i^2 + \frac{3}{4d_i} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}) + z_1 (g_0 N_1(v) - \\ &1) \bar{\alpha}_1 - (1 - \sigma) \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\varepsilon} + \frac{1}{\sigma} \|\mathbf{P}_0\|^2 \omega_0^2 \leq \\ &-\lambda V_n + z_1 (g_0 N_1(v) - 1) \bar{\alpha}_1 + M, \end{aligned} \quad (61)$$

式中: $\sigma > 0$ 是待设计的常数,

$$\lambda = \min\left\{2c_i, \frac{3}{4\lambda_{\max}(\mathbf{P}_0)}, \frac{1 - \sigma}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_0)}\right\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$M = \frac{1}{\sigma} (\lambda_{\max}(\mathbf{P}_0))^2 \omega_0^2.$$

结合式(24)和式(61)可以写成下面的表达式:

$$\dot{V}_n \leq -\lambda V_n + (g_0 N_1(v) - 1) \dot{v} / \gamma_v + M. \quad (62)$$

引理 2^[16] 设 $V(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 为定义在 $[0, t_f]$ 上的光滑函数, $V(t) \geq 0, \forall t \in [0, t_f]$; $N_1(\cdot)$ 为 Nussbaum 型函数; θ_0 为非零常数. 如果

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{-c_1 t} \int_0^t [\theta_0 N_1(v(\tau)) + 1] \dot{v}(\tau) e^{c_1 \tau} d\tau + c_0, \\ &\forall t \in [0, t_f], \end{aligned} \quad (63)$$

式中: $c_1 > 0, c_0$ 为适当的常数, 则 $V(t), v(t)$ 以及 $\int_0^t [\theta_0 N_1(v(\tau)) + 1] \dot{v}(\tau) d\tau$ 在 $[0, t_f]$ 有界.

定理 1 由系统(9)及控制律(57)和参数自适应律(59)构成的闭环系统, 其所有的信号都是有界的, 跟踪误差 $z_1 = y - y_r$ 收敛到零点的一个邻域内.

证 令 $\rho = M/\lambda$, 对式(62)两边同时乘以 $e^{\lambda t}$ 得出

$$\frac{d}{dt} (V_n e^{\lambda t}) \leq e^{\lambda t} (g_0 N_1(v) - 1) \dot{v} / \gamma_v + M e^{\lambda t}. \quad (64)$$

在 $[0, t]$ 上对上式积分得

$$\begin{aligned} V_n(t) &\leq \rho + [V_n(0) - \rho] e^{-\lambda t} + \\ &e^{-\lambda t} \int_0^t [g_0 N_1(v) - 1] \dot{v} e^{\lambda \tau} d\tau \leq \\ &\rho + V_n(0) e^{-\lambda t} + \\ &e^{-\lambda t} \int_0^t [g_0 N_1(v) - 1] \dot{v} e^{\lambda \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (65)$$

根据引理2可以推导出 v 和 V_n 有界, 所以 $z_i (i = 1, \dots, n)$ 有界. 又由于 y_r 是有界的, 从而 $y(t)$ 是有界的, 已知 \mathbf{A}_0 是 Hurwitz 矩阵, 由式(15)可以得出 η_0, η_1 都是有界的, u 中包含的所有变量都是有界, 因此 u 也是

有界的. 综上所述, 闭环系统的所有信号都是有界的.

不妨设 $\int_0^t |[g_0 N_1(v) - 1] \dot{v} e^{\lambda \tau}| d\tau \leq c_u$, 则有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \int_0^t [g_0 N_1(v) - 1] \dot{v} e^{\lambda \tau} d\tau &\leq \\ \int_0^t |[g_0 N_1(v) - 1] \dot{v}| e^{\lambda(\tau-t)} d\tau &\leq \\ \int_0^t |[g_0 N_1(v) - 1] \dot{v}| d\tau &\leq c_u, \end{aligned} \quad (66)$$

则由式(65)可以得出

$$\begin{aligned} V_n(t) &\leq \rho + V_n(0)e^{-\lambda t} + c_u \leq \\ &\rho + c_u + V_n(0). \end{aligned} \quad (67)$$

由于 $z_1^2 \leq 2V_n$ 可以得出

$$z_1^2(t) \leq 2(\rho + c_u + V_n(0)), \quad (68)$$

即跟踪误差 $z_1 = y - y_r$ 收敛到零点的一个邻域内. 定

理得证. 证毕.

4 仿真分析(Simulation analysis)

仿真实例 1 考虑一阶SISO非仿射非线性系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.1u^3 + 0.5u^2 + u \sin u + \sin x, \\ y = x, \end{cases}$$

式中: 未知非线性 $f(x, u) = 0.1u^3 + 0.5u^2 + u \sin u + \sin x$, 跟踪的参考信号设置为 $y_r = \sin t \cdot \cos t$, 初始值选取 $x(0) = 0.5, \eta_0(0) = \eta_1(0) = \hat{\varepsilon}(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$; 设计参数 $d_1 = 0.01, \gamma_v = 0.1$. 为了论证该方法的有效性, 下面选取了几组不同的参数粗略地从3个性能指标进行了讨论. 设计参数 $c_1 = 1000, \Gamma = 1000$ 时, 增益 k 分别选择: 1) $k_1 = 2, k_2 = 1$; 2) $k_1 = 3, k_2 = 2$; 3) $k_1 = 6, k_2 = 11$; 4) $k_1 = 300, k_2 = 20000$. 仿真结果见图1-3和表1.

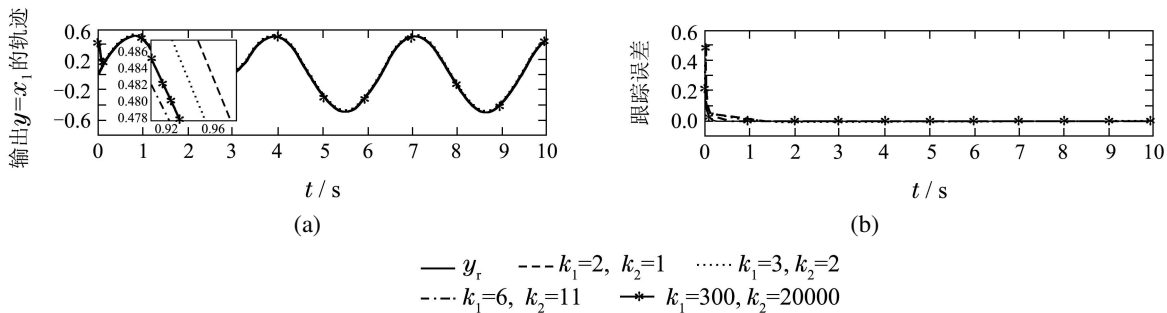


图1 跟踪效果

Fig. 1 Tracking performance

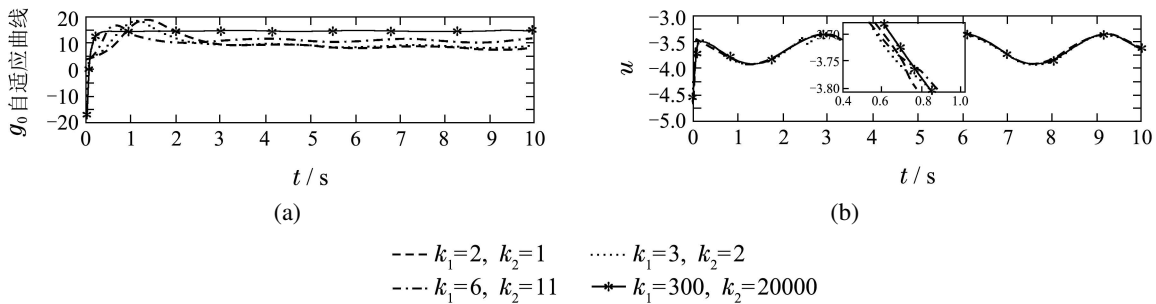
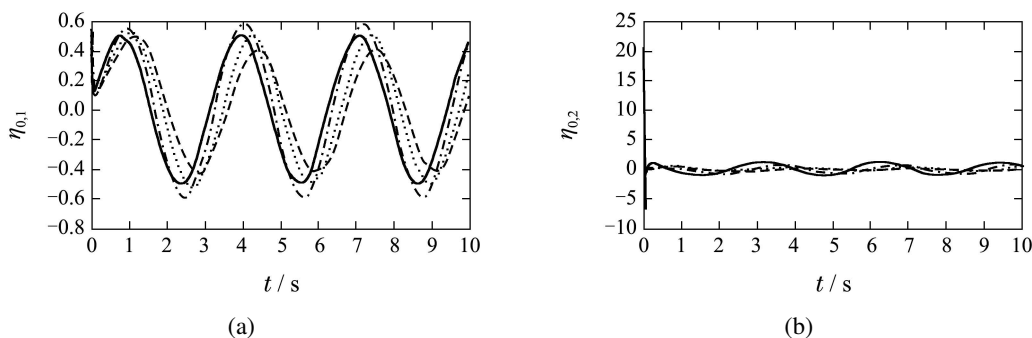


图2 控制律u和参数g0

Fig. 2 Control u and parameters g0



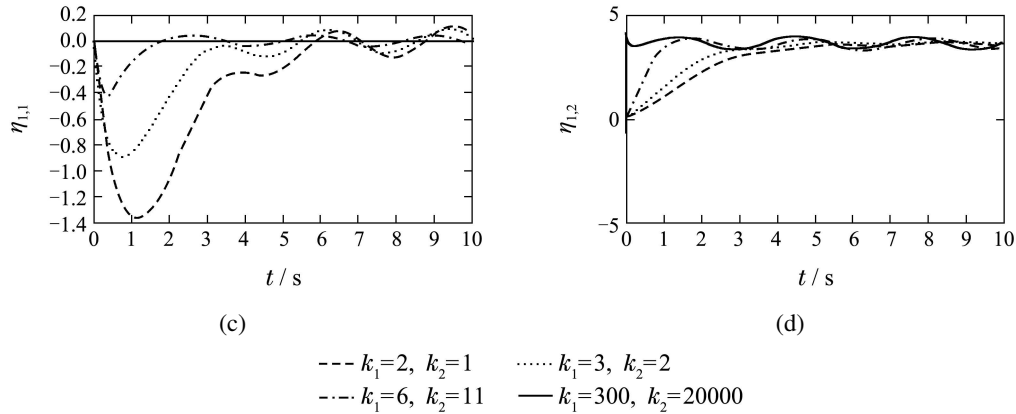


图 3 参数 η_0 和 η_1

Fig. 3 Parameters η_0 and η_1

图1表示不同参数 k_i 时跟踪效果图, 其中图1(a)表示系统输出和参考输出, 图1(b)表示跟踪误差, 图中实线表示参考输出; 图2表示不同参数 k_i 时控制律及参数 g_0 的自适应曲线, 其中图2(a)表示参数 g_0 的自适应曲线, 图2(b)表示控制律; 图3表示不同参数 k_i 时参数 η_0 和 η_1 的自适应曲线. 图中虚线表示 $k_1 = 2, k_2 = 1$ 的情况; 点线表示 $k_1 = 3, k_2 = 2$ 的情况; 点划线表示 $k_1 = 6, k_2 = 11$ 的情况; 实线表示 $k_1 = 300, k_2 = 20000$ 的情况. 从上述仿真结果可以看出: 当 c_1, Γ 选定时, 误差会随着增益 k 的增大而减

小, 但是不明显, 从而表明该设计方案对状态滤波估计器参数的选择具有很好的鲁棒性. 分析式(61)不难发现, 当增益 k 越大时, $\lambda_{\max}(P_0)$ 就越小, 从而 M 就越小, 当 c_1 取值较大时, λ 也随着增大, 结果导致 ρ 减小, 即跟踪误差减小了. 从图2中的参数 g_0 收敛曲线可以看出, 尽管 \hat{g}_0 不一定收敛到其最优值, 但是系统输出仍然能很好地跟踪参考输出. 从表1可以看出, 当 c_1, Γ 选定时, 系统所需的控制量并不会随着增益 k 的增大而有较大的改变, 因为控制量的大小主要由 c_1 的大小决定.

表 1 性能比较

Table 1 Performance comparison

	$k_1 = 2$ $k_2 = 1$	$k_1 = 3$ $k_2 = 2$	$k_1 = 6$ $k_2 = 11$	$k_1 = 300$ $k_2 = 20000$
$ e ^2 + u ^2$	1.3440×10^5	1.3437×10^5	1.3430×10^5	1.3403×10^5
$ e $	49.5352	43.6087	30.5437	16.5883
$ u $	3.6548×10^4	3.6545×10^4	3.6536×10^4	3.6514×10^4

仿真实例 2 考虑二阶SISO非仿射非线性系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 0.15u^3 + 0.1(1 + x_2^2)e^u + \sin(0.1u) + x_2^2 + w_0(t), \\ y = x_1, \end{cases}$$

式中: 未知非线性 $f(x, u, w) = [x_2 \ x_1^2 + 0.15u^3 + 0.1(1 + x_2^2)e^u + \sin(0.1u) + x_2^2]^T$, 外部干扰 $w_0(t)$ 为随机干扰信号, 跟踪的参考信号设置为 $y_r = \sin t \cdot \cos t$, 仿真时初始值选择为: $x_1(0) = x_2(0) = 1.5$, $\eta_0(0) = \eta_1(0) = \hat{\varepsilon}(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$; 设计参数 $c_1 = c_2 = 100, d_1 = d_2 = 0.01, k_1 = 6, k_2 = 11, k_3 = 6$. 仿真结果见图4-6. 由仿真结果可以看出, 控制效果较好.

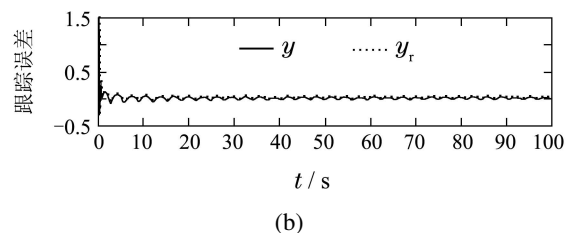
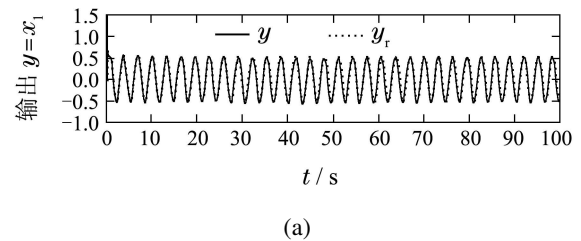
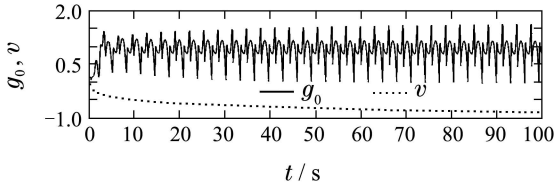
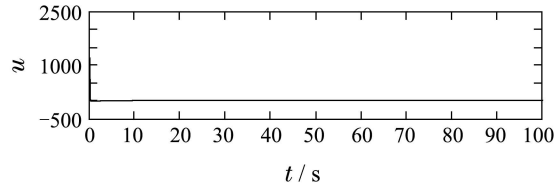


图 4 跟踪效果

Fig. 4 Tracking performance



(a)



(b)

图5 控制律 u 和参数 g_0

Fig. 5 Control u and parameters g_0

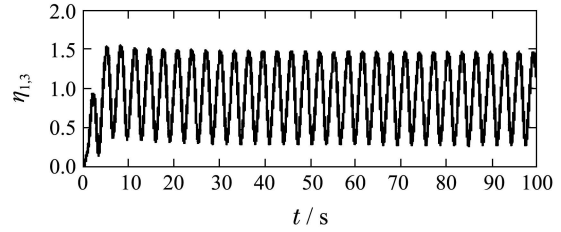
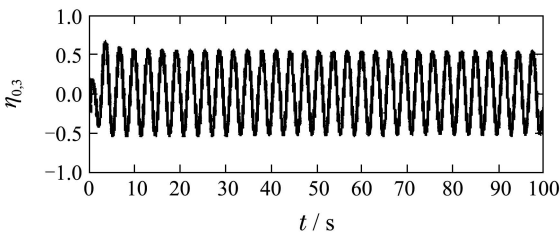
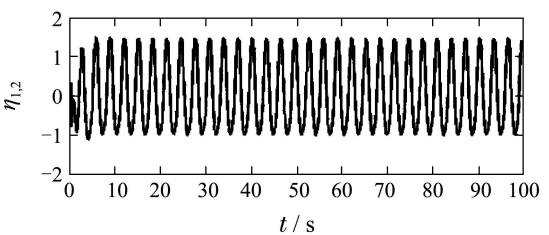
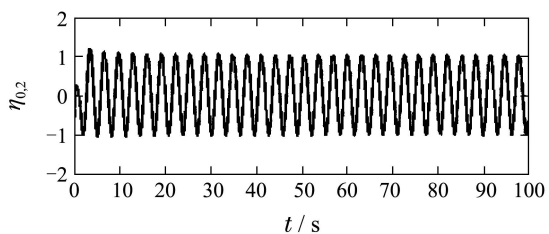
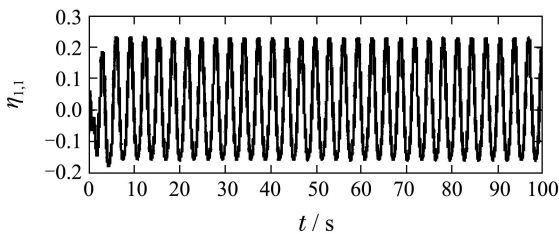
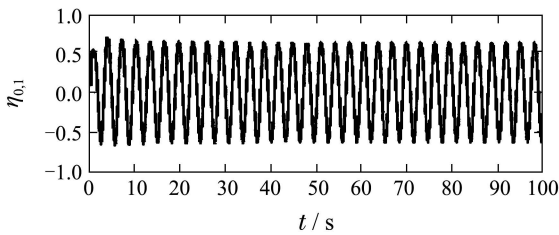


图6 参数 η_0 和 η_1

Fig. 6 Parameters η_0 and η_1

仿真实例 3^[18] 考虑下面二阶SISO非仿射非线性系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + \frac{x_2^3}{5}, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u + \frac{u^3}{7}, \\ y = x_1, \end{cases}$$

式中: $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \frac{x_2^3}{7}$, $f_2(\bar{x}_2, u) = x_1 x_2 + u + \frac{u^3}{7}$ 为未知非线性.

为了进一步说明本文设计方案的有效性, 本文研究了文献[18]中的模型. 下面给出文献[18]中设计的控制器:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -c_1 z_1 + \hat{W}_1^T S_1(Z_1), \\ u &= -z_1 - c_2 z_n + \hat{W}_2^T S_2(Z_2), \\ \dot{\hat{W}}_i &= -\Gamma_i S_i(Z_i) z_i - \sigma_i \hat{W}_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

式中: $z_1 = x_1 - y_r$, $z_2 = x_2 - \alpha_1$, \hat{W}_1 , \hat{W}_2 为神经网络的权值, $S_1(\cdot)$, $S_2(\cdot)$ 为神经网络基函数(文献中选用高斯基函数), Z_i 表示神经网络的输入, 它们的形式如下:

$$\begin{aligned} S_i(Z_i) &= \exp\left(\frac{-\|Z_i - \mu_j\|^2}{\eta^2}\right), \\ i &= 1, 2, \quad j = 1, \dots, l_i, \quad Z_1 = (x_1, \dot{x}_{d1})^T, \\ Z_2 &= (x_1, x_2, \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{W}_1} \dot{\hat{W}}_1). \end{aligned}$$

控制目标是设计控制器, 使系统的输出跟踪参考信号 $y_r = \sin t \cos t$.

参考文献[18]中仿真参数设置为: $c_1 = c_2 = 100$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$, $\hat{W}_i(0) = 0, i = 1, 2$, 参考文献中神经网络 $\hat{W}_1^T S_1(Z_1)$ 选取25个节点, μ_1 均匀分布在 $[-4, 4] \times [-4, 4]$, 神经网络 $\hat{W}_2^T S_2(Z_2)$ 选取135个节点, μ_2 均匀分布在 $[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-4, 0] \times [-6, 6]$.

本文设计方案中仿真参数设置: $\eta_0(0) = \eta_1(0) = \hat{\varepsilon}(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$, $c_1 = c_2 = 100$, $d_1 = d_2 = 0.01$, $k_1 = 6$, $k_2 = 11$, $k_3 = 6$, $\gamma_v = 0.3$.

系统的初始值选取为 $x_1(0) = 1.2$, $x_2(0) = 1.0$, 仿真步长都设置为0.001 s, 仿真结果如图7-8及表2所示.

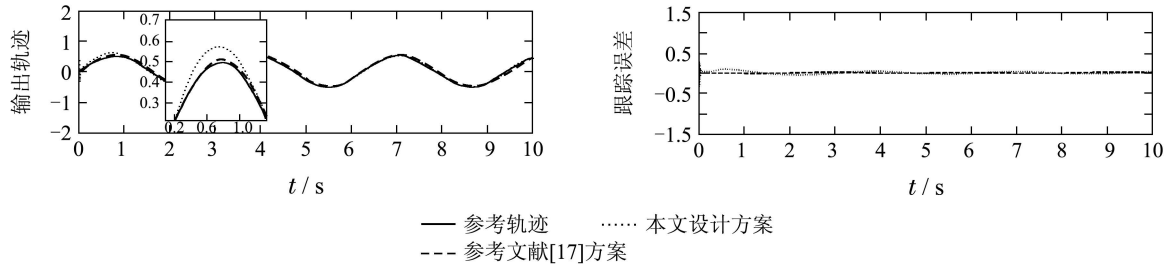


图 7 跟踪效果

Fig. 7 Tracking performance

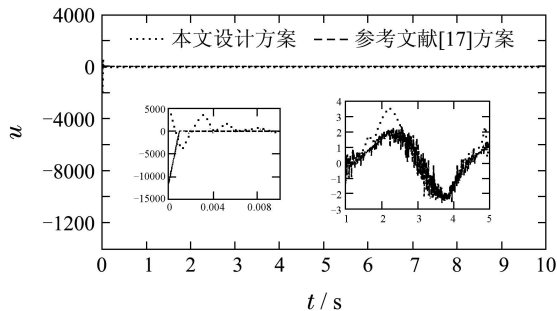


图 8 控制律 u

Fig. 8 Control u

上述仿真计算机配置: CPU为Intel Core i5 2.

67 GHz, 内存为2 GB. 从仿真结果可以看出, 本文设计的方案和参考文献[18]中的方案均能较好地实现系统输出的跟踪. 从表2可以看出, 这4个指标中, 前3个指标数量级相差不大, 但是耗时却相差甚大, 这是因为参考文献[18]中选用了 $25 + 135 = 160$ 个神经元(即意味着160个微分方程)导致的, 而本文只有2个滤波器以及1个参数自适应律. 参考文献中还有一个问题就是, 在计算神经网络输入时较繁琐, 并且神经元的宽度范围的选取比较困难. 综合上面的分析, 可以看出, 本文的设计方案是简便有效的, 并且运行耗时少.

表 2 性能比较

Table 2 Performance comparison

	$ e ^2 + u ^2$	$ e $	$ u $	耗时/s
本文设计方案	5.0736×10^7	274.8259	3.5153×10^4	0.28506
参考文献[18]方案	1.4646×10^8	63.3588	2.2703×10^4	70.9418

5 结论(Conclusions)

本文针对一类非仿射非线性系统, 利用微分同胚变换以及自抗扰思想将其转换成控制增益未知的仿射系统, 然后引入Nussbaum-type增益技术和扩展状态观测器, 最后利用积分反演和调节函数技术设计了自适应观测器自抗扰控制器, 解决了在不需要知道所有状态信息的条件下具有外部干扰的非仿射系统的控制问题, 并且本文提出的设计方案能够很好地处理外部干扰的影响. 所设计的控制器能够保证闭环系统所有信号全局一致有界. 本文接下来的研究方向为在控制结构确定的前提下, 如何确定参数选取规则, 以便使系统的性能更优.

参考文献(References):

[1] ZHANG T, GE S S, HANG C C. Direct adaptive control of non-affine nonlinear system using multilayer neural networks [C] // *Proceedings of American Control Conference*. New York: IEEE, 1998: 515 – 519.
 [2] GE S S, LEE T H, WANG J. Adaptive control of nonaffine nonlinear systems using neural networks [C] // *Proceedings of 15th IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Rio Patras, Greece: IEEE, 2000: 13 – 18.

[3] GE S S, ZHANG J. Neural-network control of nonaffine nonlinear system with zero dynamics by state and output feedback [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2003, 14(4): 900 – 918.
 [4] PARK J H, PARK G T, KIM S H, et al. Direct adaptive self-structuring fuzzy controller for non-affine nonlinear system [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 153(3): 429 – 445.
 [5] LIU Y J, WANG W. Adaptive fuzzy control for a class of uncertain nonaffine nonlinear systems [J]. *Information Sciences*, 2007, 177(18): 3901 – 3917.
 [6] CUI L, LUO Y, ZHANG H. Adaptive critic design based robust neural network control for a class of continuous time nonaffine nonlinear system [C] // *Proceedings of 2011 International Conference on Modelling, Identification and Control*. Shanghai: Modelling, Identification and Control (ICMIC), 2011: 261 – 266.
 [7] 韩京清. 自抗扰控制器及其应用 [J]. *控制与决策*, 1998, 13(1): 19 – 23.
 (HAN Jingqing. Auto-disturbances-rejection controller and its applications [J]. *Control and Decision*, 1998, 13(1): 19 – 23.)
 [8] 韩京清. 自抗扰控制技术 [J]. *前沿科学*, 2007, 1(1): 24 – 31.
 (HAN Jingqing. Auto disturbances rejection control technique [J]. *Frontier Science*, 2007, 1(1): 24 – 31.)
 [9] 史永丽, 侯朝桢, 苏海滨. 基于粒子群优化算法的自抗扰控制器设计 [J]. *系统仿真学报*, 2008, 20(2): 433 – 436.
 (SHI Yongli, HOU Chaozhen, SU Haibin. Auto disturbance rejection controller design based on particle swarm optimization algorithm [J]. *Journal of System Simulation*, 2008, 20(2): 433 – 436.)

- [10] GAO Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning [C] // *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, USA: ACC, 2003: 4989 – 4996.
- [11] 李海生, 朱学峰. 自抗扰控制器参数整定与优化方法研究 [J]. 控制工程, 2004, 11(5): 419 – 423.
(LI Haisheng, ZHU Xuefeng. On parameters tuning and optimization of active disturbance rejection controller [J]. *Control Engineering of China*, 2004, 11(5): 419 – 423.)
- [12] 王丽君, 童朝南, 彭开香, 等. 板宽板厚多变量系统的自抗扰控制及混沌优化 [J]. 控制与决策, 2007, 22(3): 303 – 306.
(WANG Lijun, TONG Chaonan, PENG Kaixiang, et al. Active disturbance rejection control and chaos optimization for strip width and gauge multivariable systems [J]. *Control and Decision*, 2007, 22(3): 303 – 306.)
- [13] 乔国林, 童朝南, 孙一康. 基于神经网络自抗扰控制的结晶器液位拉速协调系统研究 [J]. 自动化学报, 2007, 33(6): 641 – 648.
(QIAO Guolin, TONG Chaonan, SUN Yikang. Study on mould level and casting speed coordination control based on ADRC with DRNN optimization [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(6): 641 – 648.)
- [14] 魏春玲, 王强德, 武玉强. 控制方向未知的高次非线性系统的鲁棒自适应控制 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(4): 519 – 524.
(WEI Chunling, WANG Qiangde, WU Yuqiang. Robust adaptive control of high order nonlinear systems with unknown control direction [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(4): 519 – 524.)
- [15] 李静, 胡云安, 耿宝亮. 控制方向未知的二阶时变非线性系统自适应迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 730 – 740.
(LI Jing, HU Yunan, GENG Baoliang. Adaptive iterative learning-control for second-order time-varying nonlinear system with unknown control directions [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 730 – 740.)
- [16] 胡云安, 晋玉强, 李海燕. 非线性系统鲁棒自适应反演控制 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2010.
(HU Yun'an, JIN Yuqiang, LI Haiyan. *Robustness of Adaptive Backstepping Control for Nonlinear Systems* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010.)
- [17] SHANG F, LIU Y G. Adaptive output-feedback stabilization for a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(1): 92 – 100.
- [18] 尚芳, 刘允刚, 张桂青, 等. 一类非线性系统输出反馈自适应扰动抑制 [J]. 自动化学报, 2011, 37(12): 1530 – 1536.
(SHANG Fang, LIU Yungang, ZHANG Guiqing, et al. Adaptive disturbance attenuation by output feedback for a class of nonlinear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(12): 1530 – 1536.)
- [19] WANG C, HILL D J, GE S S. Adaptive neural control of non-affine pure-feedback systems [C] // *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Limassol: Mediterrean Conference on Control and Automation, 2005: 298 – 303.

作者简介:

程春华 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制,

E-mail: chch715@126.com;

胡云安 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性控制、智能控制与智能系统等, E-mail: huya507@sina.com;

吴进华 (1962–), 男, 教授, 目前研究方向为故障智能检测与诊断、机械及自动化控制等, E-mail: hywjhua@sina.com;

邹强 (1977–), 男, 副教授, 目前研究方向为导弹武器系统工程、导航及控制等, E-mail: hyzq77@sina.com.

《智能控制》两新著出版

蔡自兴教授等编著的《智能控制原理与应用》第2版和《智能控制导论》第2版两教材, 已分别由清华大学出版社和中国水利水电出版社出版. 该教材作为国家精品课程“智能控制”和国家级精品资源共享课“智能控制”的配套教材使用. 两教材主要内容相似, 但深度、篇幅和使用对象不同. 《智能控制原理与应用》的前身曾获2002年全国电子类优秀教材一等奖, 被广大高校师生誉为“经典著作”, 主要面向高校高年级学生和研究生; 而《智能控制导论》则是面向一般院校本科生的智能控制导论性教材.

该书介绍智能控制的基本原理及其应用, 着重讨论各种智能控制系统的基本概念、工作原理、技术方法与应用. 全书共10章, 涉及递阶控制系统、专家控制系统、模糊控制系统、神经控制系统、学习控制系统、多智能体(MAS)控制系统、进化控制系统、免疫控制系统、网络控制系统以及复合智能控制系统的控制机理、类型结构、设计方法和应用示例等, 反映出国内外智能控制研究和应用最新进展. 本次修订, 对全书进行了较大更新, 特别突出了计算智能(软计算), 加强了模糊控制系统和神经控制系统的计算和MATLAB工具的应用指导, 充实了网络控制系统内容等. 在内容编排上也做了一些调整与增删. 在保持本书固有特色的基础上, 精炼了内容, 增加了训练, 吸收了新知识, 更加适合作为本科生教材, 有利于提高课程教学质量和本科生培养质量. 全书系统全面、内容新颖、编排合理、可读性强, 是一部高水平的智能控制教材.

本书作为高等院校自动化、电气工程与自动化、智能科学与技术、测控工程、机电工程、物流工程、电子工程等专业本科生智能控制类课程教材, 也可作为硕士和博士学位课程智能控制、智能系统等课程的教材与教学参考书, 还可供从事智能控制和智能系统研究、设计、应用的科技工作者阅读与参考.

(马成功, 向学习)