

# 一类异构多智能体系统一致性协议的收敛性分析

孙一杰<sup>1,3†</sup>, 张国良<sup>1</sup>, 张胜修<sup>1</sup>, 曾 静<sup>2</sup>

(1. 第二炮兵工程大学 三系, 陕西 西安 710025; 2. 第二炮兵工程大学 理学院, 陕西 西安 710025;

3. 中国人民解放军 96211 部队, 云南 红河 654300)

**摘要:** 针对一阶二阶智能体组成的异构多智能体系统, 采用了一种线性一致性协议, 基于图论和矩阵分析的方法对一致性协议的收敛性进行研究, 得出了一致性协议最终收敛值的表达式, 并给出了收敛区间, 通过参数优化设置可以实现系统收敛到该区间内任意给定的期望值. 最后在仿真实例中, 实现了异构多机器人系统在期望位置的聚集, 仿真结果验证了理论分析的正确性.

**关键词:** 异构多智能体系统; 一致性; 图论; 矩阵分析

中图分类号: TP242

文献标识码: A

## Convergence analysis for consensus protocol of heterogeneous multi-agent systems

SUN Yi-jie<sup>1,3†</sup>, ZHANG Guo-liang<sup>1</sup>, ZHANG Sheng-xiu<sup>1</sup>, ZENG Jing<sup>2</sup>

(1. Department Three, the Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025, China;

2. College of Science, the Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025 China;

3. The United 96211, People's Liberation Army, Honghe Yunnan 654300, China)

**Abstract:** A linear consensus protocol for heterogeneous multi-agent systems composed of first-order and second-order agents is proposed. Graph theory and matrix theory are used to establish the convergence value expression of heterogeneous multi-agent systems. Based on the expression, the convergence interval is deduced. Then, the system can converge to arbitrary expected value in this interval via setting the parameters. Finally, in the simulation example, the rendezvous of multi-robot systems is implemented on expected position. Simulation result is provided to demonstrate the correctness of the theoretical results.

**Key words:** heterogeneous multi-agent systems; consensus; graph theory; matrix analysis

## 1 引言(Introduction)

近年来, 分布式多智能体协同控制系统在无人航天的协同控制、卫星编队控制、移动机器人的分布式优化等领域得到了广泛应用, 逐渐成为控制理论、统计物理学、应用数学、计算机科学等领域研究的热点问题. 以上许多协同控制任务都可以统一到多智能体系统的一致性(consensus)问题这一理论框架内. 所谓一致性, 就是设计合适的一致性协议使得所有智能体关于某个感兴趣的量达到相同的值. 到目前为止, 研究人员通过采用图论、矩阵论、频域分析、李雅普诺夫稳定性等方法对一致性问题进行了研究, 获得了许多一阶、二阶以及高阶多智能体系统的一致性标准<sup>[1-8]</sup>. 许多现在的一致性分析结果都是基于同构多智能体系统, 假设所有的智能体具有相同的模型和行为. 这个假设在许多应用中是不符合实际情况的,

进行更为广泛的工程应用需要研究异构多智能体系统的一致性问题. 基于以上考虑, Tian等<sup>[9]</sup>研究了具有未知时延的异构多智能体的高阶一致性问题, 得出了该系统获得高阶一致性的充分必要条件. 文献[10]研究了混合阶多智能体系统时延条件下的一致性问题. Yin等<sup>[11]</sup>研究了分数阶异构多智能体系统的一致性问题, 分析出了系统获得一致性的充分条件. Li等<sup>[12]</sup>研究了异构不确定多智能体系统的分布式鲁棒一致性问题. Kim等<sup>[13]</sup>研究了随机通信故障条件下, 有领导追随和无领导追随两种情况中异构多智能体系统的一致性问题. Liu等<sup>[14]</sup>研究了离散时间有界通信时延的异构多智能体一致性问题. Zheng等<sup>[15]</sup>研究了无向拓扑情况下的一阶二阶混合异构多智能体的一致性问题, 采用图论和李雅普诺夫稳定性理论分析出了系统获得一致性的条件.

收稿日期: 2013-06-08; 录用日期: 2014-07-02.

†通信作者. E-mail: syjlxh@126.com; Tel.: +86 18192196949.

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2012K06-45).

以上研究都是给出了一致性协议收敛的基本条件, 也就是所有智能体状态是否趋同的问题. 但是实际中往往需要智能体状态收敛到一个期望值. 比如在传感器网络分布式信息融合中的一致性滤波算法就要求网络中所有节点去跟踪测量信息的平均值<sup>[16]</sup>, 也就是同构系统中研究较多的平均一致性, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \sum_{j=1}^n x_j(0)/n$ . 但是对于异构系统由于个体间状态存在差异, 难以直接设计控制算法以达到平均一致性.

此外, Feng等<sup>[17]</sup>研究了有向图下一阶二阶混合异构系统的一致性, 给出了系统获得一致性的条件和固定拓扑下的一致性值. 但是, 文献[17]中所提出的协议过于繁琐, 分析过程中进行了反复的变量代换, 就无向图而言, 该文献的分析方法限制了参数的取值范围, 并且没有进一步分析和阐述获得一致性值的作用和意义. 本文的主要贡献在于采用了一种简洁的一致性协议, 基于图论和矩阵分析的方法分析出了系统矩阵的特征值属性, 进一步分析得出了收敛值的表达式, 并给出了收敛区间. 无向图下, 本文得出了较文献[17]更大的参数取值范围. 对系统参数进行优化, 就可以使系统收敛到该区间内任意给定的期望值. 研究基本思路如图1所示.

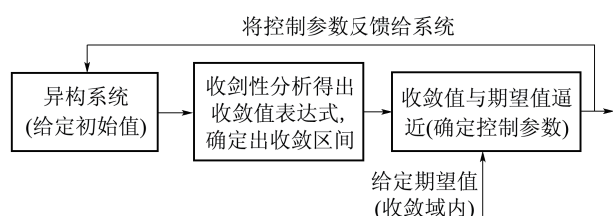


图 1 研究思路

Fig. 1 The study clue

**注 1** 一阶、二阶组成的异构系统, 最终获得静态一致性<sup>[15]</sup>, 智能体位置状态趋同, 且速度趋于0. 所以在对二阶个体进行一致性协议设计时仅考虑自身速度的负反馈, 不考虑个体间的速度信息交互, 更为合理.

## 2 问题描述(Problem formulation)

### 2.1 图论知识(Graph theory)

一个图  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  由一个顶点集  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ , 一个边集  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , 邻接矩阵  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $a_{ij} > 0$  组成.  $e_{ij} \in \mathcal{E}$  表示  $\mathcal{G}$  中  $i$  到  $j$  的有向边, 表示节点  $j$  可以获得节点  $i$  的信息. 假设对于所有的  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 若  $e_{ij} \in \mathcal{E}$ , 则  $a_{ji} > 0$ . 如果邻接矩阵满足  $a_{ij} = a_{ji}$ , 那么图  $\mathcal{G}$  是无向的. 节点  $i$  的邻居集表示为  $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : e_{ji} \in \mathcal{E}\}$ . 图拉普拉斯矩阵定义为  $L = D - A = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D = \text{diag}\{\sum_{j=1}^n a_{ij}, i = 1, \dots, n\}$  是度矩阵. 在一个无向图中, 如果不存在孤立节点, 那么称该无向图是连通的.

### 2.2 异构多智能体系统(Heterogeneous multi-agent systems)

下面对本文研究的异构多智能体系统进行描述, 并给出一致性的定义.

假设异构多智能体系统由  $n$  个智能体组成, 前  $m$  ( $m < n$ ) 个智能体为二阶, 余下的  $(n - m)$  个智能体为一阶.

每一个二阶智能体具有如下模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (1)$$

$x_i \in \mathbb{R}$ ,  $v_i \in \mathbb{R}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}$  分别表示智能体  $i$  的位置, 速度和控制输入. 邻居集描述为  $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i^s \cup \mathcal{N}_i^{\text{sf}}$ , 表示为二阶邻居和一阶邻居的并集. 每一个一阶智能体模型描述如下:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i \in \{m + 1, \dots, n\}, \quad (2)$$

$x_i \in \mathbb{R}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}$  分别表示智能体  $i$  的位置和控制输入. 邻居集描述为  $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i^f \cup \mathcal{N}_i^{\text{fs}}$ , 表示为一阶邻居和二阶邻居的并集. 整个系统的初始条件为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= [x_1(0) \ x_2(0) \ \dots \ x_n(0)]^T, \\ \mathbf{v}(0) &= [v_1(0) \ v_2(0) \ \dots \ v_m(0)]^T. \end{aligned}$$

**定义 1** 如果异构智能体系统(1)–(2)对于任意初始条件能够满足以下要求, 则称系统达到了一致性<sup>[15]</sup>:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| &= 0, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_j(t)\| &= 0, \quad i, j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

线性一致性协议广泛应用于多智能体系统中, 对于异构多智能体系统(1)–(2)采用如下线性一致性协议<sup>[15]</sup>:

$$u_i(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) - k_1 v_i, & i = 1, \dots, m, \\ k_2 \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i), & i = m + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

$k_1, k_2$  为反馈增益, 取值范围为  $0 < k_1 \leq K_1, 0 < k_2 \leq K_2$ ,  $K_1, K_2$  为常值, 且为较大正实数.

定义:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= [\mathbf{x}_s(t)^T \ \mathbf{v}_s(t)^T \ \mathbf{x}_f(t)^T]^T, \\ \mathbf{x}_s(t) &= [x_1(t) \ \dots \ x_m(t)]^T, \\ \mathbf{v}_s(t) &= [v_1(t) \ \dots \ v_m(t)]^T, \\ \mathbf{x}_f(t) &= [x_{m+1}(t) \ \dots \ x_n(t)]^T. \end{aligned}$$

采用矩阵分析和图论的思想协议(3)可以写成:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \Gamma \mathbf{y}(t), \quad (4)$$

其中

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 \\ -(L_s + D_{fs}) & -k_1 I_m & A_{fs} \\ k_2 A_{fs} & 0 & -k_2(L_f + D_{fs}) \end{bmatrix},$$

$L_s$ 表示 $m$ 个二阶智能体间通信拓扑的拉普拉斯矩阵;  $L_f$ 表示 $(n-m)$ 个一阶智能体间通信拓扑的拉普拉斯矩阵;  $D_{fs} = \text{diag}\{\sum_{j \in N_i^{fs}} a_{ij}, i = 1, \dots, m\}$ ;  $A_{fs}$ 表示二阶智能体与一阶智能体的邻接关系;  $D_{fs} = \text{diag}\{\sum_{j \in N_i^{fs}} a_{ij}, i = m+1, \dots, n\}$ ;  $A_{fs}$ 表示一阶智能体与二阶智能体的邻接关系. 则包含 $n$ 个智能体图的拉普拉斯矩阵表示为

$$L = \begin{bmatrix} L_s + D_{fs} & -A_{fs} \\ -A_{fs} & L_f + D_{fs} \end{bmatrix}.$$

通过以上转换就将异构系统一致性问题的分析转化为对矩阵 $\Gamma$ 性质的分析. 通过控制协议将实现所有智能体在位置状态上的一致, 二阶智能体在速度状态上的一致.

**注2** 本文为了方便分析, 假设智能体的所有状态为标量. 采用Kronecker直积工具及其性质, 本文得出的结论同样适用于状态为向量的情况.

### 3 一致性协议分析(Consensus protocol analysis)

本部分主要在已有理论和结果的基础上, 采用矩阵分析方法和稳定性理论对所提出的异构多智能体系统的一致性协议进行分析.

**引理1**  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是无向图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵, 如果图 $\mathcal{G}$ 是连通的, 那么0是 $L$ 的单一特征值, 其余 $n-1$ 个特征值均为正数. 且矩阵 $L$ 的秩为 $\text{rank}(L) = n-1$  [3].

**引理2** 对于线性定常系统 $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $t \geq 0$ 有, 系统的每一个平衡态是在李雅普诺夫意义下稳定的充分必要条件是,  $A$ 的所有特征值均具有非正(负或零)实部, 具有零实部的特征值为 $A$ 最小多项式的单根 [18].

**定理1** 通信网络 $\mathcal{G}$ 是无向连通的, 即 $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , 通过协议(3)使得异构多智能体系统达到一致性 [15].

**引理3** 图 $\mathcal{G}$ 无向连通, 则矩阵 $\Gamma$ 仅有一个零特征值, 且非零特征值均具有负实部.

**证** 由定理1可知通过协议(3)可以使系统达到一致性. 当系统中各模型和参数给定后, 式(4)表示的系统为一个线性定常系统, 如果 $\Gamma$ 存在正实部特征值, 由引理2可得系统将不稳定, 则系统必不可能一致. 所以,  $\Gamma$ 仅具有非正(负或零)实部特征值. 设

$$\hat{\Gamma} = 0I_{n+m} - \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ (L_s + D_{fs}) & k_1 I_m & -A_{fs} \\ -k_2 A_{fs} & 0 & k_2(L_f + D_{fs}) \end{bmatrix}, k_1, k_2 \neq 0,$$

对 $\hat{\Gamma}$ 做初等的行列变换可得

$$\hat{\Gamma} \rightarrow \begin{bmatrix} -I_m & 0 & 0 \\ 0 & (L_s + D_{fs}) & -A_{fs} \\ 0 & -A_{fs} & (L_f + D_{fs}) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}.$$

图 $\mathcal{G}$ 无向连通, 则 $\text{rank}(L) = n-1$ . 初等变换不改变矩阵的秩, 则 $\text{rank}(\hat{\Gamma}) = m + \text{rank}(L) = m+n-1$ . 可得出 $\Gamma$ 仅有一个特征值 $\lambda = 0$ , 且代数重复度为1. 引理得证.

通过以上分析得出了矩阵 $\Gamma$ 仅有一个零特征值, 且非零特征值均具有负实部.

**定理2** 如果图 $\mathcal{G}$ 无向连通, 则协议(3)渐近达到一致. 具体地,

$$\begin{cases} x_i(t) \rightarrow \frac{k_1 k_2 \sum_{j=1}^m x_j(0) + k_2 \sum_{j=1}^m v_j(0) + \sum_{l=m+1}^n x_l(0)}{(k_1 k_2 - 1)m + n}, \\ i = 1, \dots, n, \\ v_i(t) \rightarrow 0, i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (5)$$

**证** 由引理3可得, 图 $\mathcal{G}$ 无向连通时, 矩阵 $\Gamma$ 仅有一个零特征值, 非零特征值均具有负实部.

将矩阵 $\Gamma$ 写为Jordan规范型, 具有如下形式:

$$\Gamma = PJP^{-1} =$$

$$[w_1 \cdots w_{m+n}] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (m+n-1)} \\ \mathbf{0}_{(m+n-1) \times 1} & J' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{m+n}^T \end{bmatrix},$$

$w_j \in \mathbb{R}^{m+n}$ ,  $j = 1, \dots, m+n$ , 为矩阵 $\Gamma$ 的右特征向量和广义右特征向量.  $v_j^T \in \mathbb{R}^{m+n}$ ,  $j = 1, \dots, m+n$ , 为矩阵 $\Gamma$ 的左特征向量和广义左特征向量.  $J'$ 是 $\Gamma$ 非零特征值相关的Jordan块.

不失一般性, 选择 $w_1 = [1_m^T \ 0_m^T \ 1_{n-m}^T]^T$ , 可以验证 $w_1$ 是矩阵 $\Gamma$ 特征值0对应的一个特征向量. 由于图 $\mathcal{G}$ 为无向图,  $L$ 为实对称矩阵, 则容易验证 $v_1^T = [\alpha k_1 k_2 1_m^T \ \alpha k_2 1_m^T \ \alpha 1_{n-m}^T]$ 为矩阵 $\Gamma$ 的特征值0对应的一个左特征向量.  $w_1$ 为可逆变换矩阵 $P$ 的列向量,  $v_1^T$ 为 $P^{-1}$ 的行向量, 由 $P^{-1}P = I$ , 可以得出 $v_1^T w_1 = 1$ . 即

$$(k_1 k_2 m + n - m)\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{(k_1 k_2 - 1)m + n},$$

则

$$\mathbf{v}_1^T = \left[ \frac{k_1 k_2}{(k_1 k_2 - 1)m + n} \mathbf{1}_m^T, \frac{k_2}{(k_1 k_2 - 1)m + n} \mathbf{1}_m^T, \frac{1}{(k_1 k_2 - 1)m + n} \mathbf{1}_{n-m}^T \right].$$

系统(4)状态方程的解为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(t) \\ \mathbf{v}_s(t) \\ \mathbf{x}_f(t) \end{bmatrix} = e^{\Gamma t} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(0) \\ \mathbf{v}_s(0) \\ \mathbf{x}_f(0) \end{bmatrix},$$

$$e^{\Gamma t} = P e^{Jt} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{J' t} \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\Gamma t} = P \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (n+m-1)} \\ 0_{(n+m-1) \times 1} & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{J' t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

若矩阵  $\Gamma$  非零特征值均具有负实部, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{J' t} = [\mathbf{0}]_{(m+n-1) \times (m+n-1)}$ , 可以得出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(t) \\ \mathbf{v}_s(t) \\ \mathbf{x}_f(t) \end{bmatrix} \rightarrow w_1 \mathbf{v}_1^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(0) \\ \mathbf{v}_s(0) \\ \mathbf{x}_f(0) \end{bmatrix},$$

$$w_1 \mathbf{v}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_2 \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T}{(k_1 k_2 - 1)m + n} & \frac{k_2 \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T}{(k_1 k_2 - 1)m + n} & \frac{\mathbf{1}_m \mathbf{1}_{n-m}^T}{(k_1 k_2 - 1)m + n} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \\ \frac{k_1 k_2 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{1}_m^T}{(k_1 k_2 - 1)m + n} & \frac{k_2 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{1}_m^T}{(k_1 k_2 - 1)m + n} & \frac{\mathbf{1}_{n-m} \mathbf{1}_{n-m}^T}{(k_1 k_2 - 1)m + n} \end{bmatrix}.$$

最后得出

$$\begin{cases} x_i(t) \rightarrow \frac{k_1 k_2 \sum_{j=1}^m x_j(0) + k_2 \sum_{j=1}^m v_j(0) + \sum_{l=m+1}^n x_l(0)}{(k_1 k_2 - 1)m + n}, \\ i = 1, \dots, n, \\ v_i(t) \rightarrow 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

通过分析发现协议(3)使得所有智能体位置状态一致收敛到式(5), 且二阶智能体的速度状态收敛到0. 定理得证.

通过以上分析得出了异构多智能体系统一致性收敛值的表达式, 可以看出最终收敛值与初始值和系统参数有关.

#### 4 系统参数优化(Parameter optimization)

以上分析得出了系统最终收敛值的表达式, 可以看出在网络拓扑和系统初始状态信息确定的条件下, 式(5)为一个以控制参数  $k_1, k_2$  为自变量的二元函数. 对于参数  $k_1, k_2$  的取值范围, 本文从负反馈的角度并结合工程实际, 设为  $0 < k_1 \leq K_1, 0 < k_2 \leq K_2, K_1, K_2$  为常值, 且为较大正实数.

$$\text{令 } \sum_{j=1}^m x_j(0) = a, \sum_{j=1}^m v_j(0) = b, \sum_{l=m+1}^n x_l(0) = c,$$

则函数可以表示为

$$f(k_1, k_2) = \frac{a k_1 k_2 + b k_2 + c}{m k_1 k_2 + n - m}. \quad (6)$$

在函数的定义域  $D = \{(k_1, k_2) | 0 < k_1 \leq K_1, 0 < k_2 \leq K_2\}$  内可以确定出函数的值域. 当  $b > 0$  时, 函数值域为  $(\min\{c/(n-m), (K_1 K_2 a + K_2 b + c)/(m K_1 K_2 + n - m)\}, (b K_2 + c)/(n - m))$ ; 当  $b < 0$  时, 函数值域为  $((b K_2 + c)/(n - m), \max\{c/(n - m), (K_1 K_2 a + K_2 b + c)/(m K_1 K_2 + n - m)\})$ . 因为函数在定义域内是连续的, 则通过参数优化就可以使系统收敛到该区间内任意给定的期望值.

在期望值给定的条件下, 设定合适步长, 通过调整参数  $k_1, k_2$ , 可以使收敛值以一定的精度向期望值逼近. 当二者误差小于一个较小的给定值时, 输出参数  $k_1, k_2$  值. 最后将其反馈到控制协议(3). 这样就可以使系统收敛到该期望值. 基本流程如图2所示.

优化过程中的初始值与搜索步长、精度可以根据实际情况选取.

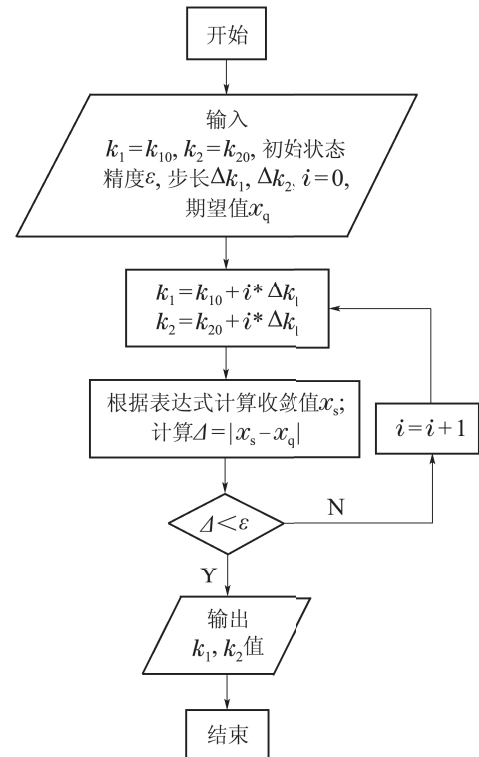


图 2 系统参数优化流程

Fig. 2 The flow chart of parameter optimization

#### 5 仿真研究(Simulation study)

本部分主要对本文获得的理论结果进行仿真验证. 通过采用所得出的结论, 实现异构多机器人系统在指定位置的聚集.

考虑一个4个机器人组成的多机器人系统, 通信拓扑如图3所示.  $\mathcal{G}$  为无向连通图, 节点1, 2为二阶模型, 3, 4为一阶模型, 如果  $(e_j, e_i) \in \mathcal{E}$ , 则  $a_{ij} = 1, i, j \in \{1,$

2, 3, 4}, 机器人 $R_i$ 的位置为 $\mathbf{x}_i = [x_{ix} \ y_{iy} \ \theta_i]^T, i = 1, 2, 3, 4$ , 二阶机器人的速度表示 $\mathbf{v}_i = [v_{ix} \ v_{iy} \ \omega_i]^T, i = 1, 2$ , 其中 $x_{ix}, x_{iy}, \theta_i$ 表示机器人 $x, y$ 方向上的位移和方向角,  $v_{ix}, v_{iy}, \omega_i$ 为二阶个体 $x, y$ 方向上的速度和转动速度. 设

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(0) &= [1 \ 2 \ 1]^T, \mathbf{x}_2(0) = [1 \ -1 \ 3]^T, \\ \mathbf{x}_3(0) &= [1 \ 2 \ -1]^T, \mathbf{x}_4(0) = [2 \ 1 \ -1]^T, \\ \mathbf{v}_1(0) &= [1 \ 1 \ 2]^T, \mathbf{v}_2(0) = [1 \ 1 \ -1]^T.\end{aligned}$$

取 $K_1 = K_2 = 100$ , 可以得出 $x$ 方向上位移收敛区间为 $(1.01, 101.5)$ ,  $y$ 方向上位移收敛区间为 $(0.5, 101.5)$ , 方向角的收敛区间为 $(-1.01, 49)$ . 选取该机器人系统聚集到点 $(1.2, 1, 0.5)$ .  $k_{10} = k_{20} = 0, \Delta k_1 = \Delta k_2 = 0.0001, \varepsilon = 0.0001$ , 根据图2的参数优化流程得出参值为

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= [5.2813 \ 2.4138 \ 0.8417]^T, \\ \mathbf{k}_2 &= [5.2813 \ 2.4138 \ 0.8417]^T.\end{aligned}$$

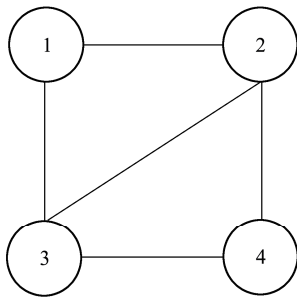


图3 通信拓扑

Fig. 3 Communication topology

下面根据得出的参数, 对系统(4)进行仿真, 结果如图4—6所示. 图4显示了所有机器人位置信息一致收敛情况; 图5显示了二阶机器人速度信息一致收敛情况; 从图4中可以看出系统中所有机器人在 $x, y$ 方向上的位移和方向角上都一致收敛到了期望值. 而二阶机器人的所有速度信息则一致收敛到0, 与本文得出的结果一致. 图6显示了所有机器人运动轨迹, 可以看出所有机器人最终聚集到了期望位置.

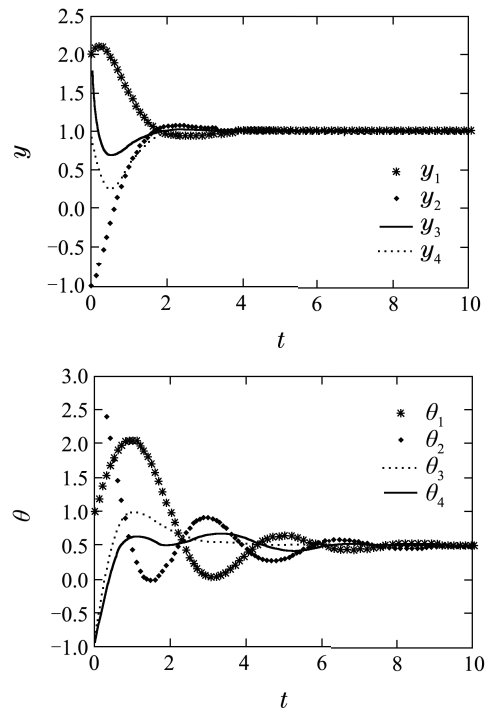
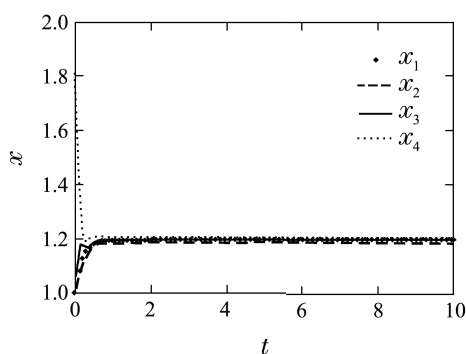


图4 系统状态信息

Fig. 4 Positions of all robots

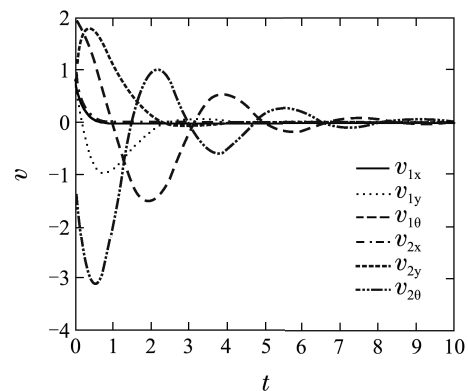


图5 机器人的速度信息

Fig. 5 Velocities of second-order robots

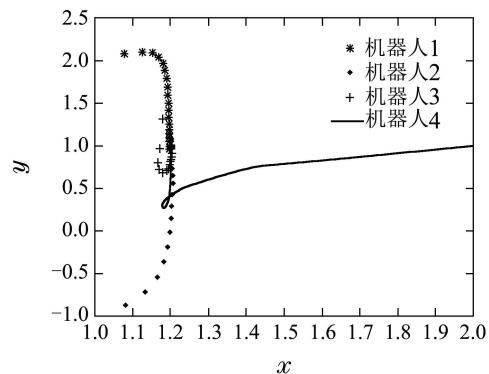


图6 机器人轨迹

Fig. 6 The trajectory of all robots

## 6 结论(Conclusions)

本文研究了由一阶和二阶模型组成的异构多智能

体系统的一致性问题. 在该异构系统一致性问题研究中解决的仅仅是状态是否一致的问题, 但实际应用中可能需要智能体状态收敛到一个期望值. 基于以上考虑, 本文采用图论和矩阵分析方法对异构系统一致性协议的收敛性进行了研究, 得出了系统最终收敛值和相应表达式, 并分析出了收敛区间. 在此基础上, 对系统参数进行优化, 就可以使系统收敛到该区间内任意给定的期望值. 最后结合多机器人的聚集问题, 对所得出的理论结果进行了验证, 通过参数优化实现了多机器人系统在期望位置上的聚集, 仿真结果与理论分析一致. 本文得出的结论是基于无向图的, 下一步将考虑在有向图的条件下进行相关研究.

## 参考文献(References):

- [1] VICSEK T, CZIROK A, BEN-JACOB E. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [2] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [3] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [4] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [5] 宋海裕, 俞立, 胡鸿翔. 牵制控制下的多智能体系统群一致性 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 765 – 772.  
(SONG Haiyu, YU Li, HU Hongxiang. Group consensus in multi-agent systems via pinning control [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 765 – 772.)
- [6] 潘欢, 年晓红, 郭凌. 高阶时滞多智能体系统一致性控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(7): 909 – 915.  
(PAN Huan, NIAN Xiaohong, GUO Ling. Consensus control of higher-order multi-agent systems with delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(7): 909 – 915.)
- [7] SUN F L, GUAN Z H, ZHAN X S, et al. Consensus of second-order and high-order discrete-time multi-agent systems with random networks [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, 13(5): 1979 – 1990.
- [8] 宋莉, 伍清河. 具有时延和不确定拓扑的二阶多智能体系统的平均一致性 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 1047 – 1052.  
(SONG Li, WU Qinghe. Average consensus of second-order multi-agent systems with time-delays and uncertain topologies [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 1047 – 1052.)
- [9] TIAN Y P, ZHANG Y. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown Communication delays [J]. *Automatica*, 2012, 48(4): 1205 – 1212.
- [10] YANG H Y, GUO L, ZHU X L, et al. Consensus of compound-order multi-agent systems with communication delays [J]. *Central European Journal of Physics*, 2013, 11(6): 806 – 812.
- [11] YIN X X, YUE D, HU S L. Consensus of fractional-order heterogeneous multi-agent systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 2(7): 314 – 322.
- [12] LI Z K, DUAN Z S, LEWIS F L. Distributed robust consensus of heterogeneous uncertain multi-agent systems [C] // *The 32nd Chinese Control Conference*. Xi'an: IEEE, 2013, 8: 7150 – 7155.
- [13] KIM J M, PARK J B, CHOI Y H. Leaderless and leader-following consensus for heterogeneous multi-agent systems with random link failures [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(1): 51 – 60.
- [14] LIU C L, LIU F. Stationary consensus of heterogeneous multi-agent systems with bounded communication delays [J]. *Automatica*, 2011, 47(6): 2130 – 2133.
- [15] ZHENG Y, ZHU Y, WANG L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(16): 1881 – 1888.
- [16] OLFATI-SABER R, SHAMMA J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion [C] // *The 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 6697 – 6703.
- [17] FENG Y Z, XU S Y, LEWIS F L, et al. Consensus of heterogeneous first-order and second-order multi-agent systems with directed communication topologies [EB/OL]. Wiley Online Library, 2013.
- [18] 胡寿松. 自动控制原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.  
(HU Shousong. *Principle of Automatic Control* [M]. Beijing: Science Press, 2001.)

## 作者简介:

**孙一杰** (1986–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为先进控制理论与应用、多机器人协同导航、控制, E-mail: syjlxh@126.com;

**张国良** (1970–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为先进控制理论与应用、机器人, E-mail: zhgl@sohu.com;

**张胜修** (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为组合导航与飞行器制导控制, E-mail: zsx1963@yahoo.com.cn;

**曾 静** (1973–), 女, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为多机器人协同导航, E-mail: moulaizj@163.com.