

空间体热分形扩散的控制

乔威^{1,2}, 刘树堂¹, 孙洁^{2†}

(1. 山东大学控制科学与工程学院, 山东 济南 250061; 2. 山东大学(威海)机电与信息工程学院, 山东 威海 264209)

摘要: 对空间有源热扩散物体, 本文给出了热扩散分形生长的非线性动力学系统, 研究了空间体热扩散分形生长的预测和热扩散分形生长的控制. 通过分析生长概率与干扰项之间的数量关系, 得到了不同源项对分形生长的影响. 通过构造指数函数形式的非线性干扰项和内热源项, 验证了空间体热扩散分形生长控制的有效性, 为合理选择控制参数和控制区域提供了有效的方法.

关键词: 空间体; 热扩散; 分形生长; 控制

中图分类号: T B114.20231 文献标识码: A

Control of thermal fractal diffusion of space body

QIAO Wei^{1,2}, LIU Shu-tang¹, SUN Jie^{2†}

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;

2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Shandong University at Weihai, Weihai Shandong 264209, China)

Abstract: We investigate the nonlinear dynamic system of the thermal diffusion fractal growth for the space body, and predict and control this thermal diffusion fractal growth. The influence of distant source items on fractal growth is obtained by analyzing the quantitative relationship between the growth probability and the disturbance item. The control of the thermal diffusion fractal growth of space body is tested by using a nonlinear exponential interference item and an internal thermal source item with adjustable control parameters and regions.

Key words: space body; thermal diffusion; fractal growth; control

1 引言(Introduction)

分形是当前非常活跃的非线性科学研究前沿^[1-6]. 1981年美国密捷安大学Witten和Sander开创性地提出了一个扩散限制凝聚(diffusion limited aggregation, DLA)的分形生长模型^[7], 成功模拟一个远离平衡态的分形生长过程, 在一定程度上解释了诸如热扩散、薄膜生长、流体驱替等非平衡现象, 并已广泛应用于一些远离平衡的不可逆生长过程中, 取得了大量的理论和应用成果^[8-9].

自然分形生长都是在三维空间中进行的, 注意到对三维分形生长及其维数问题研究的文献并不多. 比如P. Meakin^[10]通过计算机模拟研究了三维分形生长并对其维数进行了计算, 但受当时计算机资源的限制, 并没有完全按照DLA模型进行模拟. 另一方面, 在现实而复杂的环境中, 磁场变化、导热系数随温度的变化、电流变化^[11-12]等许多外界因素都会影响分形扩散凝聚的过程, 从而使分形生长的形态复杂多变并难于预测. 从而对于空间中分形生长的预测和控制是亟待解决的重要问题.

本文针对某空间物体, 将热扩散中的有源扩散方程引入分形系统, 充分利用数学模型, 根据边界条件的调整变化, 分析外界复杂干扰项和内热源干扰项对分形生长过程的影响, 并通过构造指数函数形式的非线性干扰项和内热源干扰项, 实现了空间体热扩散分形生长形态的预测和控制.

2 空间体热源扩散系统(Space body thermal diffusion system)

从分形生长的动力学角度, 某空间物体 W 的热扩散过程的生长概率可看作符合边界条件的分布参数系统:

$$\frac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial V^2(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right], \quad (1)$$

其中: $V(x, y, z, t)$ 表示空间体 W 在位置 (x, y, z) 处 t 时刻的温度(热扩散概率)^[13]. 为研究解的方便, 引入

符合客观环境的分形生长参数系统:

$$\nabla^2 V(x, y, z) = u(x, y, z) + f(V(x, y, z)). \quad (2)$$

通常函数 $f(V(x, y, z))$ 是一个非线性函数, 在物理上称为强迫项; $u(x, y, z)$ 是数量化的初始条件, 称为源项; 非线性干扰项 $f(V(x, y, z))$ 和源项 $u(x, y, z)$ 可视为环境干扰项. 一般利用七点差分格式法分析它的数值解, 提出三维空间非线性分形生长系统(2)的离散动力系统为

$$\begin{aligned} &V_{i+1,j,k} + V_{i,j+1,k} + V_{i,j,k+1} + \\ &V_{i-1,j,k} + V_{i,j-1,k} + V_{i,j,k-1} - 6V_{i,j,k} = \\ &u_{i,j,k} + f(V_{i,j,k}). \end{aligned} \quad (3)$$

系统(3)的边界条件满足: 在热扩散凝聚集团 H 上各点的 $V(x, y, z)$ 为 0, 无穷远边界 $\bar{\Gamma}$ 向热扩散凝聚表面提供一个稳定的总粒子流 $V(x, y, z) \equiv 1$. 通过系统(3)定出空间网格上所有点的热扩散概率, 显然热扩散最近邻待生长凝聚区域 T 内的点满足

$$0 < V(x, y, z) \ll 1$$

成立.

在空间体的热扩散生长, 由空间内各可能扩散点的生长概率函数来决定, 各可能扩散点的生长概率函数 p_i 与其温度梯度更多的呈现非线性函数关系^[14]:

$$p_i = \frac{|\nabla V_i(x, y, z)|}{\sum_{i=1}^n |\nabla V_i(x, y, z)|}, \quad (4)$$

n 代表待生长点个数, 分母项表示粒子向各方向生长的总概率及归一化系数. 在式(4)的基础上, 采用轮盘赌选择算法^[15]从所有可能的待生长点选取新的热扩散点. 空间体热量凝聚表面成核粒子选择可能的生长点为: 与成核点距离是 1 的最近邻 6 个点, 如图 1 所示. 则含源项和非线性项干扰的空间体热扩散问题已由离散动力系统(2)、边界条件式(3)、生长概率式(4)和赌轮盘选择算法所描述, 图 2 是环境干扰项 $f = 0, u = 0$ 时热扩散分形凝聚集团图形.

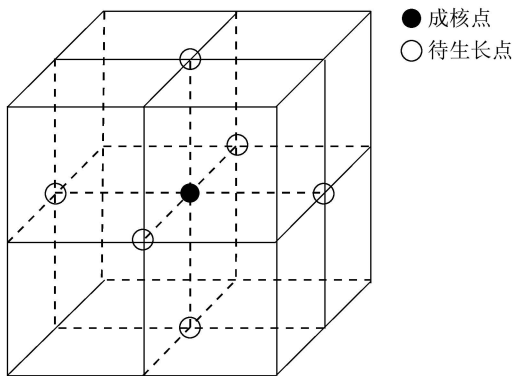


图 1 成核点与最近邻待生长点

Fig. 1 Nucleating point and possible growth points

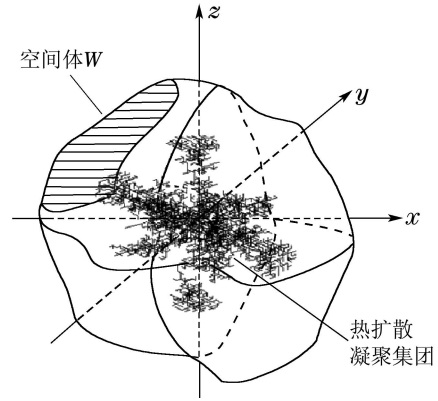


图 2 $f = 0, u = 0$ 时空间物体 W 上的热扩散
Fig. 2 Thermal diffusion of W at $f = 0, u = 0$

3 空间体热源分形的扩散控制(Control of space body thermal fractal diffusion system)

注意到, 指数函数不仅在 Schrödinger 方程, Spherical Harmonics 函数中有广泛应用, 并且在静电火花放电, 离子电化学等诸多现实物理系统中也时常出现. 因此, 假设系统(2)中的非线性函数项为

$$f(V_{i,j,k}) = \xi 6V_{i,j,k} e^{-6V_{i,j,k}}. \quad (5)$$

为了处理解的方便引入符号:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_{i,j,k}(r) = \\ &V_{i+r,j,k} + V_{i,j+r,k} + V_{i,j,k+r} + \\ &V_{i-r,j,k} + V_{i,j-r,k} + V_{i,j,k-r}, \end{aligned} \quad (6)$$

则系统(3)化为

$$E(1) = u_{i,j,k} + \xi E(0) e^{-E(0)} + E(0),$$

考虑到处理问题的方便, 通常考虑下列系统:

$$\begin{aligned} E(r) &= u(x, y, z) + E(r-1) e^{-E(r-1)} + \\ &E(r-1), \quad r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

对式(7)进行简单迭代, 可以得到

$$\begin{aligned} E(r) &= ru(x, y, z) + \xi E(r-1) e^{-E(r-1)} + \\ &E(r-2) e^{-E(r-2)} + \dots + E(0) e^{-E(0)} + \\ &E(0), \quad r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

假设热扩散有限凝聚区域 Γ , 则凝聚集团 H 及最近邻待生长凝聚区域 T , 符合 $(H \cup T) \subset \Gamma$. 由系统(3)的边界条件知, $(x, y, z) \in (H \cup T)$ 内的点符合 $0 \leq V(x, y, z) < \varepsilon \ll 1$, 则 $0 < 6\varepsilon \ll 1$, 从而 $0 \leq 6V(x, y, z) < 6\varepsilon \ll 1$, 即 $0 \leq E(0) \ll 1$, 因此令系统(8)中的 $u(x, y, z)$ 和 ξ 在热扩散空间区域内的取值充分小, 使得

$$\begin{aligned} 0 &\leq V_{i+r,j,k} + V_{i,j+r,k} + V_{i,j,k+r} + V_{i-r,j,k} + \\ &V_{i,j-r,k} + V_{i,j,k-r} < 1, \end{aligned}$$

保证控制项远远小于系统本身的输入量.

3.1 环境干扰项对热分形扩散的控制 (Control of environmental disturbance term for the thermal fractal diffusion)

对于系统(8), 取非线性函数 $f(t) = \xi te^{-t}$, 则 $f(t)$ 为连续函数, 从而可以得到 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处的 Taylor 展开为

$$f(t) = \xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} t^k,$$

从而系统(8)化为

$$E(r) = u(x, y, z) + \xi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} [E(r-1)]^k + E(r-1).$$

由系统(3)的边界条件可知

$$\begin{aligned} 0 < \xi < 1, \quad 0 \leq E(r) < 1, \\ 0 < u(x, y, z) < 1, \quad 0 \leq V(x, y, z) < 1, \end{aligned}$$

从而有

$$\left\{ \begin{aligned} E(1) &= \\ \xi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} [E(0)]^k + E(0) + u(x, y, z) &\leq \\ (\xi + 1)E(0) + u(x, y, z), & \\ \vdots & \\ E(r) &= \\ \xi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} [E(r-1)]^k + u(x, y, z) &\leq \\ (1 + \xi)^r E(0) + ((1 + \xi)^{r-1} + (1 + \xi)^{r-2} + & \\ (1 + \xi) + 1)u(x, y, z). & \end{aligned} \right. \quad (9)$$

令不等式(9)的右边项为

$$F(\xi, u(x, y, z), r) = (\xi + 1)^r E(0) + \left(\sum_{k=0}^{r-1} (\xi + 1)^k \right) u(x, y, z),$$

注意到 $0 < \xi \ll 1, 0 < u(x, y, z) \ll 1, 0 \leq E(r) < 1$, 从而有

$$\frac{F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial \xi} = r(\xi + 1)^{r+1} E(0) + \left(\sum_{k=1}^{r-1} k(\xi + 1)^{k-1} \right) u(x, y, z), \quad (10)$$

则

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial \xi} &> 0, \\ \frac{\partial F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial u(x, y, z)} &= \sum_{k=0}^{r-1} (\xi + 1)^k, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

从而

$$\frac{\partial F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial u(x, y, z)} > 0. \quad (12)$$

由数学分析中关于函数增减性判定方法, 从式(11)–(12)可得 $E(r)$ 关于 ξ 及 $u(x, y, z)$ 分别单调递增的.

3.2 源项与非线性项不同的控制作用 (Different control effect of source term and nonlinear interference term)

虽然非线性项 $\xi 6V(x, y, z)e^{-6V(x, y, z)}$ 和源项 $u(x, y, z)$ 增大都可以控制热扩散的凝聚, 但是为了达到更好的控制分形生长及预测的目的, 需要进一步的讨论参数对于热扩散凝聚影响程度的差异.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial \xi} - \frac{\partial F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial u(x, y, z)} &= \\ r(\xi + 1)^{r+1} E(0) + \sum_{k=1}^{r-1} k(\xi + 1)^{k-1} u(x, y, z) - & \\ \sum_{k=0}^{r-1} (\xi + 1)^k = & \\ (\xi + 1)^{r-1} (rE(0) - 1) + & \\ \sum_{k=0}^{r-2} (\xi + 1)^k [(k + 1)u(x, y, z) - 1]. & \end{aligned}$$

由 $0 \leq rE(0) < 1, 0 < (r + 1)u(x, y, z) < 1$, 可得

$$\frac{\partial F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial \xi} - \frac{\partial F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial u(x, y, z)} < 0,$$

即

$$\frac{\partial F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial \xi} < \frac{\partial F(\xi, u(x, y, z), r)}{\partial u(x, y, z)},$$

从而非线性项 $\xi 6V(x, y, z)e^{-6V(x, y, z)}$ 对生长凝聚的影响效应要小于 $u(x, y, z)$. 即在源项作用区域内, 非线性项的存在不改变传导表面凝聚到作用区域内的热扩散分形趋势. 源项与非线性项都是环境干扰项, 源项为与热扩散概率 $V(x, y, z)$ 无关的函数项, 非线性项为与热扩散概率 $V(x, y, z)$ 有关的函数项.

上述研究是空间体热扩散中对于热量扩散数学物理形式的数量分析, 随后的计算机仿真模拟验证环境干扰控制项对于热量凝聚效果是明显有效的.

4 空间体热分形扩散的数值分析 (Numerical analysis of thermal fractal diffusion)

采用空间体 W 内 $51 \times 51 \times 51$ 规格的三维正立方网格, 热源在网格中心(26, 26, 26)处, 模拟了 10000 个热粒子的分形扩散凝聚. 通过设置不同的参数 $\xi, u(x, y, z)$ 及源项作用球域半径 R . 模拟环境干扰项对热扩散分形生长形态的控制作用.

4.1 环境干扰的控制 (Control of environmental disturbance)

图3–6是参数 $\xi, u(x, y, z)$ 及源项作用球域半径 R 不同情况下的分形热扩散形态图. 根据式(6)给出的 $E(r)$ 与 $V_{i,j,k}$ 的关系, 以及根据数学分析原理得到

$E(r)$ 关于 ξ 及 $u(x, y, z)$ 分别单调递增可知, 空间体热扩散凝聚概率 $V(x, y, z)$ 会分别随着非线性项 $\xi 6V(x, y, z)e^{-6V(x, y, z)}$ 和源项 $u(x, y, z)$ 的增大而增大. 图3-6与无环境干扰的图2相比较, 清楚的验证了环境干扰项以及作用区域的增大, 对热扩散凝聚表面比无环境干扰情况显现出越来越凝聚的控制效应. 图3-6热扩散形态图的变化形象的体现了环境干扰项控制方法的有效性.

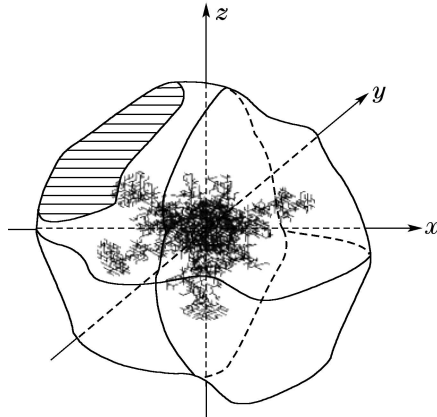


图3 $\xi = 10^{-5}, u = 10^{-2}, R = 6$ 时的热扩散

Fig. 3 Thermal diffusion at $\xi = 10^{-5}, u = 10^{-2}, R = 6$

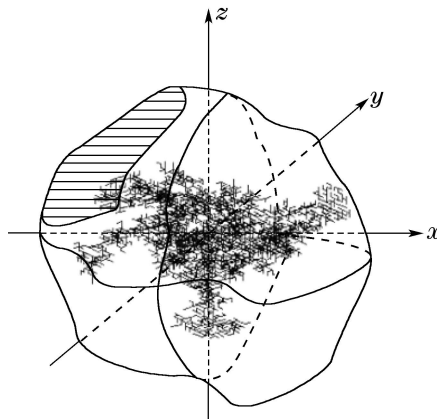


图4 $\xi = 10^{-5}, u = \text{rand} \times 10^{-3}, R = 12$ 的热扩散

Fig. 4 Thermal diffusion at $\xi = 10^{-5}, u = \text{rand} \times 10^{-3}, R = 12$

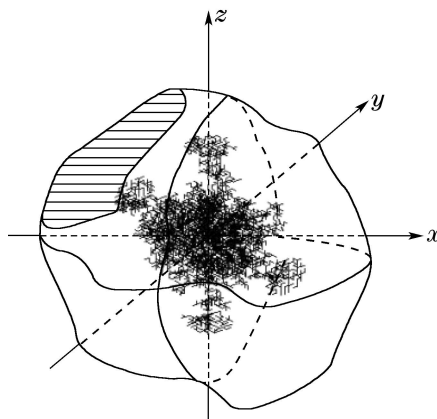


图5 $\xi = 10^{-5}, u = 5 \times 10^{-3}, R = 12$ 的热扩散

Fig. 5 Thermal diffusion at $\xi = 10^{-5}, u = 5 \times 10^{-3}, R = 12$

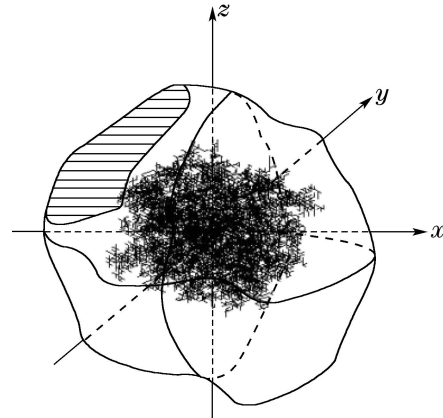


图6 $\xi = 10^{-6}, u = 10^{-2}, R = 20$ 的热扩散

Fig. 6 Thermal diffusion at $\xi = 10^{-6}, u = 10^{-2}, R = 20$

分形维数度量了系统填充空间的能力, 它从测度论和对称理论方面刻画了系统的无序性, 是衡量分形特征的重要参数^[9]. 空间点源热分形扩散具有明显的中心生长点, 故采用Sandbox法^[14]计算出不同球域干扰作用下的分形维数(D), 如表1所示. 随着环境干扰项的作用范围和强度的扩大, 对应得分形维数有不同程度的增大. 这表明环境干扰项不仅控制球状物体热分形扩散表面形态变化, 而且还增大了热分形扩散生长的复杂度.

表1 不同环境干扰下热扩散凝聚图形分形维数

Table 1 fractal dimension of thermal diffusion under different environmental disturbance

本文中图形的编号	环境干扰项参数			图形的分形维数
	ξ	u	R	
2	0	0	0	2.3832
3	10^{-5}	10^{-2}	6	2.3915
4	10^{-5}	$\text{rand} * 10^{-3}$	12	2.4896
5	10^{-5}	$5 * 10^{-3}$	12	2.6096
6	10^{-6}	10^{-2}	20	2.8849

4.2 源项与非线性项不同程度的控制作用(Different degree control of source terms and nonlinear terms)

图4与图5对比, 在源项作用区域内, 非线性项的存在不改变扩散凝聚表面到作用区域内的热分形扩散趋势. 这意味着 $\xi 6V(x, y, z)e^{-6V(x, y, z)}$ 对生长凝聚的控制作用要小于 $u(x, y, z)$ 的作用. 空间体热扩散中, 当源项 $u(x, y, z)$ 在球状作用区域内取值分别是常数与 $0 \sim 1$ 间的随机数时, 所得的图4与图5显示: $u(x, y, z)$ 取值为随机数时的凝聚不如取值为常数时使热分形扩散的凝聚更紧密, 原因是随机数的取值造成作用区域内生长概率的减少, 导致凝聚的疏散.

5 结论(Conclusion)

三维空间非平衡生长现象广泛存在自然界中, 它的预测与控制具有重要的现实意义. 本文通过引入源项将有限扩散凝聚扩展为有源扩散系统, 给出了空间体热分形扩散系统干扰控制数学模型, 根据模型分析了扩散概率和干扰项之间的数量关系, 预测扩散分形生长表面的形态变化, 通过改变干扰项和源项的大小以及作用区域实现了对热分形扩散形态的有效控制. 上述研究将有助于理解三维空间中非平衡生长的物理机制以及对物理、生物、材料等学科的应用有重要借鉴意义.

参考文献(References):

- [1] 孙霞, 吴自勤, 黄韵. 分形原理及其应用 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2003.
(SUN Xia, WU Ziqin, HUANG Yun. *Fractal Theory and Its Application* [M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 2003.)
- [2] 张永平, 范玉军. Julia 集的广义同步 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(4): 463 – 467.
(ZHANG Yongping, FAN Yujun. Generalized synchronization of Julia sets [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(4): 463 – 467.)
- [3] 王凌, 郑大钟. 一种基于退火策略的混沌神经网络优化算法 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(1): 139 – 142.
(WANG Ling, ZHENG Dazhong. A kind of chaotic neural network optimization algorithm based on annealing strategy [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1): 139 – 142.)
- [4] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.
(WANG Xingyuan. *Complex Chaos in Nonlinear System* [M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2003.)
- [5] LIU P, LIU S T. Control and synchronization of Julia sets in coupled map lattice [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(8): 3344 – 3355.
- [6] WANG X Y, YU X J. Julia sets for the standard Newton's method, Halley's method, and Schroder's method [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 189(2): 1186 – 1195.
- [7] WITTEN T A, SANDER L M. Diffusion-limited aggregation [J]. *Physical Review B*, 1983, 27(9): 5686 – 5688.
- [8] 张丽, 刘树堂. 薄板热扩散分形生长的环境干扰控制 [J]. 物理学报, 2010, 59 (11): 7708 – 7712.
(ZHANG Li, LIU Shutang. Control of thermal diffusion fractal growth of thin plate under environmental disturbance [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(11): 7708 – 7712.)
- [9] HANAN W G, HEFFERNAN D M. Multifractal analysis of the branch structure of diffusion-limited aggregates [J]. *Physical Review E*, 2012, 85(2): 021407.
- [10] MEAKIN P. Diffusion-controlled cluster formation in 2-6 dimensional space [J]. *Physical Review Letters*, 1983, 27(3): 1495 – 1507.
- [11] KOLESNIKOV N N, BORISENKO E B, BORISENKO D N, et al. Fractal structures of dendrites in GaSe crystals [J]. *Journal of Crystal Growth*, 2008, 310(14): 3287 – 3289.
- [12] CRONEMBERGER C, SAMPAIOL L C, GUIMARAES A P, et al. Model for the growth of electrodeposited ferromagnetic aggregates under an in-plane magnetic field [J]. *Physical Review E*, 2010, 81(2): 021403.
- [13] 张洪济. 热传导 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
(ZHANG Hongji. *Heat Conduction* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1992.)
- [14] 申舒兰. 扩散限制凝聚生长的分析与控制 [D]. 济南: 山东大学, 2008.
(SHEN Shulan. *Analysis and Control of diffusion limited aggregation growth* [D]. Jinan: Shandong University, 2008.)
- [15] 王凌. 车间调度及其遗传算法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
(WANG Ling. *Shop Scheduling with Genetic Algorithms* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.)

作者简介:

乔威 (1978–), 男, 高级工程师, 博士研究生, 目前研究方向为分形理论的应用与控制, E-mail: qiaowei@sdu.edu.cn;

刘树堂 (1957–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统的混沌、分岔控制、分形理论的应用与控制, E-mail: stliu@sdu.edu.cn;

孙洁 (1978–), 女, 讲师, 目前研究方向为非线性系统的混沌、分形理论的应用与控制, E-mail: sunj@sdu.edu.cn.