

一类纯反馈非线性系统的反推控制

刘勇华

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 研究了一类纯反馈非线性系统的输出跟踪问题. 通过引入一个新的坐标变换, 提出了一种基于反推设计的状态反馈控制算法. 所得控制算法不仅保证了系统跟踪误差全局渐近稳定, 同时使得闭环系统所有信号有界. 最后, 一个仿真实例验证了本文控制算法的有效性.

关键词: 非线性系统; 纯反馈系统; 反推设计

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Backstepping control for a class of pure-feedback nonlinear systems

LIU Yong-hua

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The output tracking problem for a class of pure-feedback nonlinear systems is discussed. By introducing a novel coordinate transformation, we develop a state feedback controller via backstepping approach. The proposed control algorithm not only ensures the global asymptotic tracking, but also guarantees the boundedness of all the closed loop signals. Finally, a simulation example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed control scheme.

Key words: nonlinear systems; pure-feedback systems; backstepping

1 引言(Introduction)

与严格反馈非线性系统相比, 纯反馈非线性系统是一类更一般且更能真实描述客观系统(如化学反应^[1])的非线性系统, 一般表示为^[2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(\bar{x}_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = g_n(\bar{x}_n, u), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\bar{x}_i = [x_1 \cdots x_i]^T \in \mathbb{R}^i, i = 1, \dots, n; \bar{x}_n = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, u 为系统的输入; $g_i(\cdot)$ 为光滑非线性函数, $i = 1, \dots, n$.

近年来, 纯反馈非线性系统控制受到了越来越多的关注^[3-4]. 文[5]较早提出并研究了一类纯反馈非线性系统控制问题, 按照反推设计思想, 通过坐标变换, 给出了严格反馈条件下系统全局调节和全局跟踪的自适应控制器设计方法. 然而, 在非仿射性条件下, 传统适合于严格反馈非线性系统的控制方法很难直接用于纯反馈非线性系统控制器设计. 在文[5]基础上, 文[6]从纯反馈非线性系统本身出发, 在无须进行任何坐标变换情况下, 给出了系统全局调节和全局跟踪的自适应控制器设计方法, 然而, 该方法无法保证闭环

系统所有信号全局有界, 且其相关假设可能产生系统能控性问题. 文[7]讨论了一类高阶非线性系统(特殊的纯反馈非线性系统)的控制问题, 通过引入增加幂次积分器技术, 得到了一个全局镇定光滑状态反馈控制器. 针对未知纯反馈非线性系统, 文[8-12]提出了一种智能控制方法, 该方法通过运用隐函数定理和中值定理, 将纯反馈非线性系统转化为严格反馈非线性系统, 然后对转化后的严格反馈非线性系统进行控制器设计. 为避免使用中值定理而产生的代数环问题^[13], 文[13-14]运用模糊逻辑系统通用逼近器和反推设计法, 直接对纯反馈非线性系统进行控制器设计, 所得控制器能够保证闭环系统半全局稳定. 然而, 基于通用逼近器的控制算法往往无法确保系统跟踪误差全局稳定.

不同于上述方法, 本文根据反推设计思想, 引入一个新的坐标变换, 直接给出了一个纯反馈非线性系统的状态反馈控制器. 所得控制器能够保证系统跟踪误差全局渐近稳定, 且闭环系统所有信号全局有界. 最后, 通过一个数值例子对本文所提出方法的有效性进行了验证.

收稿日期: 2013-06-28; 录用日期: 2014-03-11.

通信作者: E-mail: yonghua.liu@outlook.com; Tel.: +86 13560483241.

基金项目: 教育部创新团队发展计划资助项目(IRT1242).

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下一类纯反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + l_n(\bar{x}_n)u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\bar{x}_i = [x_1 \cdots x_i]^T \in \mathbb{R}^i, i = 1, \dots, n; \bar{x}_n = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, u 和 y 分别为系统的输入和输出; $f_i(\cdot)$ 和 $l_n(\cdot)$ 为已知光滑函数, 且 $l_n(\cdot) \neq 0, i = 1, \dots, n$.

控制目标: 设计控制器 u , 使系统(2)输出 y 全局渐近跟踪一个给定的光滑参考轨迹 y_d , 且保证闭环系统所有信号有界.

为了达到控制目标, 对上述系统作如下假设:

假设 1 存在正数 ϵ , 使得

$$\left| \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| \geq \epsilon, i = 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

注 1 与假设 1 相比, 文献 [6] 中的假设条件 $\left| \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| > 0$ 更弱, 然而, 可以发现, 该假设条件无法确保系统(2)充分可控. 例如, 考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + e^{x_2}, \\ \dot{x}_2 = u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (4)$$

显然, $\left| \frac{\partial(x_1^2 + e^{x_2})}{\partial x_2} \right| = e^{x_2} > 0$ 满足文 [6] 中的假设条件(不满足假设 1), 然而, 由 $\dot{x}_1 > 0$ 易知系统(4)为不可控系统, 即不存在任何控制器使系统达到全局调节或全局跟踪, 这说明了文 [6] 中给出的控制器设计方法亦无法使系统(4)达到全局调节或全局跟踪. 为避免出现系统能控性问题, 本文将文 [6] 中假设条件 $\left| \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| > 0$ 加强为假设 1.

假设 2 光滑参考轨迹 y_d 及其 n 阶导数已知且有界.

引理 1 若光滑函数 $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 有界, 则 x_{i+1} 有界, $i = 1, \dots, n-1$.

证 由 $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 为光滑函数, 根据中值定理可知, 至少存在一点 $\zeta (\zeta \in (\min(0, x_{i+1}), \max(0, x_{i+1})))$, 使得

$$f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - f_i(\bar{x}_i, 0) = \left. \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right|_{x_{i+1}=\zeta} (x_{i+1} - 0). \quad (5)$$

由假设 1 可知, 存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$\left| \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right|_{x_{i+1}=\zeta} \geq \epsilon. \quad (6)$$

又 $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 为有界函数, 故等式(5)左边有界, 即可得 x_{i+1} 亦有界.

3 控制器设计(Controller design)

与传统反推控制器设计不同, 本文采用如下坐标变换:

$$z_1 = x_1 - y_d, \quad (7)$$

$$z_i = f_{i-1} - \alpha_{i-1}, i = 2, \dots, n. \quad (8)$$

其中 α_i 为第 i 个子系统的虚拟控制律.

注 2 在传统反推法中^[2], 常常视 x_{i+1} 为第 i 个子系统的虚拟控制变量, 因此, 其采取的坐标变换为

$$z_1 = x_1 - y_d, \quad (9)$$

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}, i = 2, \dots, n. \quad (10)$$

基于式(9)–(10)的传统反推法有效解决了严格反馈非线性系统的控制器设计问题, 然而, 由于纯反馈系统的非仿射性, 使得传统反推法很难直接用于纯反馈系统控制器设计. 与此不同, 本文所提反推设计的核心思想是视光滑函数 f_i 为第 i 个子系统的虚拟控制, 因而采用的相应坐标变换为式(7)–(8).

步骤 1 由式(2)(7)–(8)可得

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_d = f_1 - \dot{y}_d = z_2 + \alpha_1 - \dot{y}_d. \quad (11)$$

选择虚拟控制律 α_1 为

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 + \dot{y}_d, \quad (12)$$

其中 c_1 为正的设计常数.

根据式(11)–(12)可得

$$z_1 \dot{z}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2. \quad (13)$$

步骤 2 由式(2)(8)可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 - \dot{\alpha}_1 = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} (z_3 + \alpha_2) - \dot{\alpha}_1. \end{aligned} \quad (14)$$

选择虚拟控制律 α_2 为

$$\alpha_2 = \frac{-c_2 z_2 - z_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \dot{\alpha}_1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}}, \quad (15)$$

其中 c_2 为正的设计常数.

根据式(14)–(15)可得

$$z_2 \dot{z}_2 = -c_2 z_2^2 - z_1 z_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} z_2 z_3. \quad (16)$$

步骤 i ($3 \leq i \leq n-1$) 对 $z_i = f_{i-1} - \alpha_{i-1}$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i} f_i - \dot{\alpha}_{i-1} = \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i} (z_{i+1} + \alpha_i) - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (17)$$

选择虚拟控制律 α_i 为

$$\alpha_i = \frac{-c_i z_i - \frac{\partial f_{i-2}}{\partial x_{i-1}} z_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_j} f_j + \dot{\alpha}_{i-1}}{\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i}}, \quad (18)$$

其中 c_i 为正的设计常数, $i = 3, \dots, n-1$.

根据式(17)–(18)可得

$$z_i \dot{z}_i = -c_i z_i^2 - \frac{\partial f_{i-2}}{\partial x_{i-1}} z_i z_{i-1} + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i} z_i z_{i+1}. \quad (19)$$

步骤 n 这一步将得到实际控制 u . 对 $z_n = f_{n-1} - \alpha_{n-1}$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} f_n + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} l_n u - \dot{\alpha}_{n-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

选择实际控制律 u 为

$$u = \frac{-c_n z_n - \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} z_{n-1} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j} f_j + \dot{\alpha}_{n-1}}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} l_n} \quad (21)$$

其中 c_n 为正的设计常数.

根据式(20)–(21)可得

$$z_n \dot{z}_n = -c_n z_n^2 - \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} z_n z_{n-1}. \quad (22)$$

定理 1 对满足假设1和2的一类纯反馈非线性系统(2), 采用控制律(21), 则系统跟踪误差全局渐近稳定, 且闭环系统所有信号全局有界.

证 选取如下Lyapunov函数

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} z_i^2. \quad (23)$$

结合式(13), (16), (19)–(22), 对 V 求导

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n z_i \dot{z}_i = -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 \leq -\rho V, \quad (24)$$

其中 $\rho = \min\{2c_1, \dots, 2c_n\}$.

对式(24)两边沿 $[0, t]$ 积分, 可得

$$V \leq V(0)e^{-\rho t}, \quad (25)$$

因此, $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_i = 0$, 且 z_i 有界, $i = 1, \dots, n$. 同时, 由(2)(7)和(8), z_1 有界可得 x_1, α_1, f_1 有界, 由引理1可得 x_2 亦有界, 随之 f_1 的各个偏导数亦有界; 结合 z_2 有界

可得到 α_2 有界, 从而 f_2 亦有界, 由引理1可推得 x_3 有界, 进而 f_2 的各个偏导数亦有界. 以此类推, 可得 $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, u$ 均有界.

注 3 不同于传统反推法, 本文将光滑非仿射函数 f_i 视为第 i 个子系统的虚拟控制, 采用坐标变换(7)和(8), 有效克服了纯反馈系统中非仿射结构引起的控制器设计困难.

注 4 与文[6]中方法比较, 本文所得控制器不仅可使系统输出误差全局渐近收敛到零, 且可保证闭环系统所有信号有界. 而文[6]中方法仅讨论了系统输出误差渐近跟踪问题, 没有考虑闭环系统信号的有界性.

注 5 当

$$f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = h_i(\bar{x}_i) + l_i(\bar{x}_i)x_{i+1},$$

其中 $h_i(\bar{x}_i)$ 和 $l_i(\bar{x}_i)$ 均为光滑函数, $i = 1, \dots, n-1$, 系统(2)变为一般严格反馈非线性系统, 可见上述方法亦适合于严格反馈非线性系统.

4 仿真实例(Simulation example)

考虑如下一个二阶非仿射纯反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.1x_1^2 - e^{-x_2} + 0.1x_2, \\ \dot{x}_2 = 0.5x_1x_2 - 2x_1 + u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, x_2) &= 0.1x_1^2 - e^{-x_2} + 0.1x_2, \\ f_2(\bar{x}_2) &= 0.5x_1x_2 - 2x_1. \end{aligned}$$

显然, $f_1(\bar{x}_1, x_2)$ 满足假设1. 期望参考轨线 $y_d = 1.5 \sin(2t)$. 系统初始条件为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.2$. 控制器参数选择为 $c_1 = 1, c_2 = 1$.

仿真结果如图1–3所示, 图1为基于反推控制器的系统跟踪性能曲线, 图2为系统实际控制输入 u , 图3为系统状态 x_2 . 从仿真结果可以看出, 本文所提出控制器保证了系统跟踪误差全局渐近稳定, 且闭环系统所有信号全局有界.

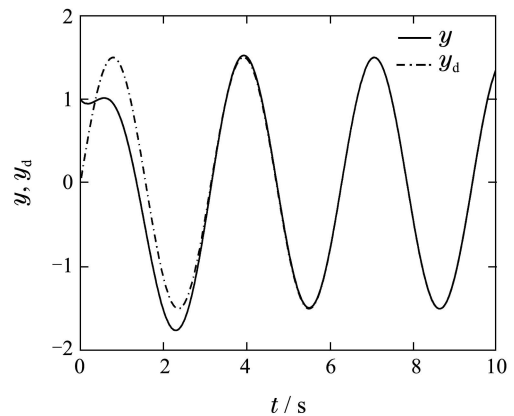
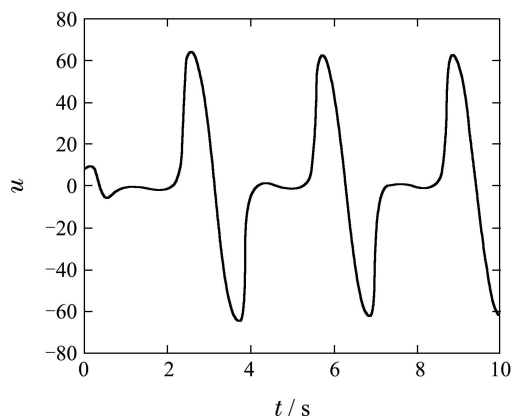
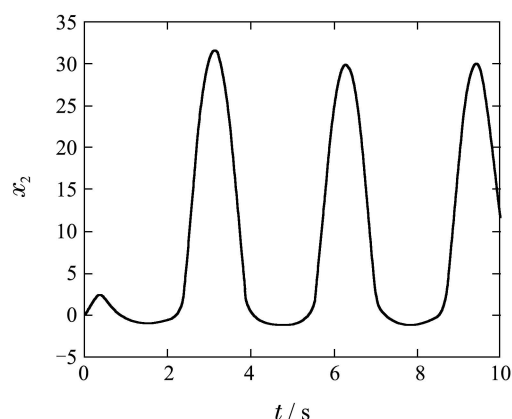


图1 跟踪性能曲线

Fig. 1 Tracking performance

图2 控制输入 u Fig. 2 Control input u 图3 状态 x_2 Fig. 3 State x_2

5 结论(Conclusion)

本文研究了一类纯反馈非线性系统输出跟踪问题,不同于传统反推法,通过引入一个新坐标变换,得到了一个基于反推法的状态反馈控制器. 所得控制器保证系统跟踪误差全局渐近稳定,使得闭环系统所有信号全局有界. 最后,一个数值实例验证了本文控制算法的有效性.

参考文献(References):

- [1] GE S S, HANG C C, ZHANG T. Nonlinear adaptive control using neural networks and its application to CSTR systems [J]. *Journal of Process Control*, 1998, 9(4): 313 – 323.
- [2] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [3] LABIOD S, GUERRA T M. Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(10): 1126 – 1137.
- [4] WANG D, HUANG J. Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form [J]. *Automatica*, 2002, 38(8): 1365 – 1372.
- [5] KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 – 1253.
- [6] SETO D, ANNASWAMY A M, BAILLIEUL J. Adaptive control of nonlinear systems with a triangular structure [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(7): 1411 – 1428.
- [7] LIN W, QIAN C. Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(5): 339 – 351.
- [8] WANG C, HILL D J, CHEN G. An ISS-modular approach for adaptive neural control of pure-feedback systems [J]. *Automatica*, 2006, 42(5): 723 – 731.
- [9] REN B, GE S S, SU C Y, et al. Adaptive neural control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form with hysteresis input [J]. *IEEE Transactions on Systems, Mans, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2009, 39(2): 431 – 443.
- [10] WANG M, GE S S, HONG K H. Approximation-based adaptive tracking control of pure-feedback nonlinear systems with multiple unknown time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(11): 1804 – 1816.
- [11] 周卫东, 廖成毅. 控制方向未知的SISO非仿射系统间接自适应模糊输出反馈控制 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(9): 1131 – 1137. (ZHOU Weidong, LIAO Chengyi. Indirect adaptive fuzzy output-feedback controller for a SISO nonaffine system with unknown control direction [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1131 – 1137.)
- [12] WANG M, LIU X, SHI P. Adaptive neural control of pure-feedback nonlinear time-delay systems via dynamic surface technique [J]. *IEEE Transactions on Systems, Mans, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2011, 41(6): 1681 – 1692.
- [13] ZOU A, HONG Z, TAN M. Adaptive control of a class of nonlinear pure-feedback systems using fuzzy backstepping approach [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(4): 886 – 897.
- [14] TONG S, LI Y, SHI P. Observer-based adaptive fuzzy backstepping output feedback control of uncertain MIMO pure-feedback nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(4): 771 – 785.

作者简介:

刘勇华 (1986–), 男, 博士研究生, 研究方向为非线性控制及其在机电系统中的应用, E-mail: yonghua.liu@outlook.com.