第 31 卷第 5 期 控 制 理 论 与 应 用 Vol. 31 No. 5
2014 年 5 月 Control Theory & Applications May 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.30666

受控正系统的弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制

宋世君, 冯俊娥†, 孟 敏

(山东大学 数学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 首先, 利用线性矩阵不等式(LMI)及有界实引理, 借助一个小的标量, 得到了受控正系统弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制的一个充分条件, 使得控制器参数与未知参数分开, 从而更有利于弹性静态输出反馈控制器的设计. 然后, 基于此条件, 针对控制矩阵的一种特殊情形给出了一个推论, 并得到了更一般的受控正系统弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制的充分条件, 其中的控制器增益矩阵均可根据锥补线性化技巧来进行求解. 最后, 利用数值仿真表明了结论的有效性.

关键词: 正系统; 鲁棒H_∞控制; 弹性静态输出反馈; 锥补线性化; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Resilient static output feedback robust H_∞ control for controlled positive systems

SONG Shi-jun, FENG Jun-e†, MENG Min

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan Shandong 250100, China)

Abstract: Firstly, by means of a small scalar, a sufficient condition of resilient static output feedback robust H_∞ control for controlled positive systems is obtained via linear matrix inequality (LMI) and bounded real lemma, which is useful for the design of resilient static output feedback controller because the controller parameter is separated from the unknown parameter. Then, based on the above condition, an inference for the special case of the control matrix is given and a sufficient condition of resilient static output feedback robust H_∞ control for more general controlled positive systems is established. Furthermore, the desired controller gain matrix can be derived via the cone complementarity linearization techniques directly. Finally, a numerical simulation to show the validity of the results is presented.

Key words: positive systems; robust H_∞ control; resilient static output feedback; cone complementarity linearization; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

正系统是一类几乎在所有领域中都经常见到的系统, 如经济学、生态学、人口模型、社会科学及生物医学等[1–3]. 近些年来, 正系统受到了许多控制理论学者的亲睐并取得了较大进展[4–8]. 但是, 因为正系统是定义在锥体上而不是线性空间上, 所以很多一般线性系统的结论无法直接用于正系统, 这也使得对于正系统控制综合问题的研究更有挑战性.

H_∞控制理论一直在鲁棒控制理论中处于十分重要的地位, 它的研究方法是基于控制系统的最优化设计. 由于其丰富的应用背景, 近些年已成为控制领域中的热点课题. 文献[9]的发表和有界实引理[10]的提出, 使H_∞控制取得突破性的进展[11–13]. 目前, 关于正系统H_∞控制问题的相关文献也得到相对应的结论[14–15].

考虑到实际中系统参数多存在不确定性, 而且系统的状态往往很难直接测量, 所以学者们开始对输出反馈控制展开研究[16–17]. 另一方面, 由于控制器的不确定性也会影响系统的稳定性, 因此对弹性控制器的研究也引起了广泛讨论[18–19], 但针对正系统的弹性输出反馈控制的文献却不多见.

本文研究了受控正系统的弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制问题. 这里, 控制器要保证闭环系统的正性, 即得到的闭环系统不仅要满足H_∞鲁棒性能准则, 还应为正系统. 本文针对受控正系统的几种不同情形, 分别给出了弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制的充分条件, 所得条件均由矩阵等式约束及线性矩阵不等式构成, 其中的控制器可利用锥补线性化技巧设计求解.

收稿日期: 2013–07–04; 录用日期: 2014–01–15.

†通信作者. E-mail: fengjune@sdu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174141, 61374025); 山东省杰出青年基金资助项目(JQ201219); 山东省优秀中青年科学家科研奖励基金资助项目(BS2011SF009, BS2011DX019).

本文使用如下记号: $\mathbb{R}^n$表示实数域上的n维欧式空间, $\mathbb{R}^{m\times n}$表示$m\times n$的实矩阵构成的集合, I表示单位矩阵, $L_2[0,\infty)$表示$[0,\infty)$上的所有平方可积向量值函数构成的空间; $[A]_{ij}$表示矩阵A第i行第j列元素, 称矩阵A为Metzler矩阵, 如果矩阵A非对角线上的所有元素均为非负的, $A\succeq 0(A\preceq 0)$表示矩阵A中每个元素均为非负(非正)的, $A\succeq B$表示矩阵$A-B\succeq 0$, $A\in[A_{\rm m},A_{\rm M}]$表示$A_{\rm m}\preceq A\preceq A_{\rm M}$, $A>0(A<0)$表示矩阵A为对称正定(负定)矩阵; 符号$\mu(A)$表示矩阵A的谱坐标, 即$\mu(A)=\max\{\operatorname{Re}\lambda:\lambda\in\sigma(A)\}$, 其中$\sigma(A)$表示矩阵$A$的谱.

2 问题描述和预备知识(Problem formulation and preliminaries)

考虑如下形式的连续时间线性系统:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{w}(t),\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+D\boldsymbol{w}(t),\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases}\tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$为状态向量, $\boldsymbol{w}(t)\in\mathbb{R}^p$为干扰输入, 并且$\boldsymbol{w}(t)\in L_2[0,\infty)$, $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbb{R}^s$为受控输出, A, B, C, D为已知适维常矩阵.

首先, 给出几个相关的定义和引理.

定义 1[2] 如果对所有的$\boldsymbol{x}_0\succeq 0$, $\boldsymbol{w}(t)\succeq 0$, 都有$\boldsymbol{x}(t)\succeq 0$, $\boldsymbol{z}(t)\succeq 0$, $\forall t>0$, 则系统(1)称为正系统.

引理 1[2] 系统(1)为正系统的充分必要条件为A为Metzler矩阵, $B\succeq 0$, $C\succeq 0$, $D\succeq 0$.

引理 2[3] 对于Metzler矩阵$M,N\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 如果$M\succeq N$, 则$\mu(M)\geqslant\mu(N)$.

引理 3[10] 给定一个常量$\gamma>0$, 系统(1)内稳定并且其传递函数$T(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$满足$\|T(s)\|_\infty<\gamma$, 当且仅当存在一个矩阵$P>0$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}PA+A^{\rm T}P & PB & C^{\rm T}\\ B^{\rm T}P & -\gamma I & D^{\rm T}\\ C & D & -\gamma I\end{bmatrix}<0.\tag{2}$$

引理 4 如果矩阵X为对角正定矩阵, $C\succeq 0$, A为Metzler矩阵, 则$XC\succeq 0$, XA为Metzler矩阵.

证 设矩阵

$$X=\begin{bmatrix}x_1&&&\\&x_2&&\\&&\ddots&\\&&&x_n\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix},$$

其中: $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, $c_{ij}\geqslant 0$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$且均为常数, 于是有

$$XC=\begin{bmatrix}x_1c_{11}&x_1c_{12}&\cdots&x_1c_{1n}\\x_2c_{21}&x_2c_{22}&\cdots&x_2c_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ x_nc_{n1}&x_nc_{n2}&\cdots&x_nc_{nn}\end{bmatrix},$$

显然, XC中的每个元素都是非负的, 即$XC\succeq 0$. 同理可以得到XA为Metzler矩阵. 证毕.

下面考虑含有控制的连续时间区间不确定系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{w}(t)+B_1\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+D_1\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=C_1\boldsymbol{x}(t),\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases}\tag{3}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$为状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^m$为控制输入, $\boldsymbol{w}(t)\in\mathbb{R}^p$为干扰输入, 并且满足$\boldsymbol{w}(t)\in L_2[0,\infty)$, $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbb{R}^s$为受控输出, $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^q$为量测输出, $A\in[A_{\rm m},A_{\rm M}]$为未知适维常矩阵, $A_{\rm m}, A_{\rm M}, B_1, C_1, D_1, B, C$为已知适维常矩阵.

对系统(3)设计的弹性静态输出反馈控制器有如下形式:

$$\boldsymbol{u}(t)=(K+\Delta K)\boldsymbol{y}(t),\tag{4}$$

其中: K为控制器增益矩阵, $\Delta K\in[K_{\rm m},K_{\rm M}]$为加性控制器增益摄动, 且$K_{\rm m}$与$K_{\rm M}$均为已知常矩阵.

结合控制器(4)的形式, 得到闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_{\rm c}\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{w}(t),\\ \boldsymbol{z}(t)=C_{\rm c}\boldsymbol{x}(t),\end{cases}\tag{5}$$

其中:

$$A_{\rm c}=A+B_1KC_1+B_1\Delta KC_1,$$
$$C_{\rm c}=C+D_1KC_1+D_1\Delta KC_1.$$

本文的目的是设计一个弹性静态输出反馈控制器(4), 使得闭环系统(5)为正系统、内稳定且其传递函数$T_{\rm zw}(s)=C_{\rm c}(sI-A_{\rm c})^{-1}B$满足

$$\|T_{\rm zw}(s)\|_\infty<\gamma,\tag{6}$$

其中$\gamma>0$给定.

为了设计控制器, 本文做出以下假设.

假设 1 假设$K_{\rm m}=-K_{\rm M}$, 且$K_{\rm M}\succeq 0$.

注 1 事实上, 假设1不失一般性. 对于任意矩阵$K_{\rm m}$, $K_{\rm M}$, 且$K_{\rm m}\preceq K_{\rm M}$, 取

$$K'=\frac{K_{\rm M}+K_{\rm m}}{2},\ k'=\frac{K_{\rm M}-K_{\rm m}}{2},$$

则弹性静态输出反馈控制器(4)可写为

$$\boldsymbol{u}(t)=(K+K'+\Delta K-K')\boldsymbol{y}(t)=(F+\Delta F)\boldsymbol{y}(t),\tag{7}$$

其中: $F=K+K'$为控制器增益矩阵, $\Delta F=\Delta K-K'$为加性控制器增益摄动, 且$\Delta F\in[-k',k']$, 因此, 笔者可以把设计控制器(4)的问题转化为设计控制器(7)的问题.

3 主要结论(Main results)

首先, 考虑矩阵B_1, D_1无符号限制的情形. 对于任

意的矩阵B_1, D_1, 存在矩阵$B_2 \succeq 0, B_3 \preceq 0, D_2 \succeq 0, D_3 \preceq 0$使得$B_1 = B_2 + B_3, D_1 = D_2 + D_3$, 于是本文得到下面的定理.

定理 1　给定常量$\gamma > 0, \varepsilon > 0$和连续时间区间不确定系统(3), 其中$A \in [A_{\mathrm{m}}, A_{\mathrm{M}}], B \succeq 0, C \succeq 0, C_1 \succeq 0$, 如果存在矩阵$K$及对角矩阵$P > 0, Q > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon^{-1}P & I + \varepsilon A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & PB & C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon Q & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

$$PQ = I, \tag{9}$$

$$[A_{\mathrm{f}}]_{ij} \succeq 0,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \tag{10}$$

$$[C_{\mathrm{f}}]_{ij} \succeq 0,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n, \tag{11}$$

其中:

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{d}} &= A_{\mathrm{M}} + B_1KC_1 + B_2K_{\mathrm{M}}C_1 + B_3K_{\mathrm{m}}C_1, \\ C_{\mathrm{d}} &= C + D_1KC_1 + D_2K_{\mathrm{M}}C_1 + D_3K_{\mathrm{m}}C_1, \\ A_{\mathrm{f}} &= A_{\mathrm{m}} + B_1KC_1 + B_2K_{\mathrm{m}}C_1 + B_3K_{\mathrm{M}}C_1, \\ C_{\mathrm{f}} &= C + D_1KC_1 + D_2K_{\mathrm{m}}C_1 + D_3K_{\mathrm{M}}C_1, \end{aligned}$$

那么存在弹性静态输出反馈控制器(4), 使得闭环系统(5)为正系统、内稳定且其传递函数$T_{\mathrm{zw}}(s)$满足式(6).

证　由$A \in [A_{\mathrm{m}}, A_{\mathrm{M}}], \Delta K \in [K_{\mathrm{m}}, K_{\mathrm{M}}], B_2 \succeq 0, B_3 \preceq 0, D_2 \succeq 0, D_3 \preceq 0, C_1 \succeq 0$可得

$$A_{\mathrm{d}} \succeq A_{\mathrm{c}} \succeq A_{\mathrm{f}}, \tag{12}$$

$$C_{\mathrm{d}} \succeq C_{\mathrm{c}} \succeq C_{\mathrm{f}}. \tag{13}$$

再由式(10)–(11), 可知矩阵A_{f}为Metzler矩阵, $C_{\mathrm{f}} \succeq 0$, 因此可得矩阵$A_{\mathrm{c}}, A_{\mathrm{d}}$为Metzler矩阵, $C_{\mathrm{c}}, C_{\mathrm{d}} \succeq 0$, 利用引理1, 得到闭环系统(5)为正系统.

由式(8)–(9), 并利用Schur补引理, 有

$$\begin{aligned} &-\varepsilon^{-1}P + (I + \varepsilon A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}})\varepsilon^{-1}P(I + \varepsilon A_{\mathrm{d}}) + \\ &\gamma^{-1}PBB^{\mathrm{T}}P + \gamma^{-1}C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}C_{\mathrm{d}} < 0, \end{aligned} \tag{14}$$

也就是

$$\begin{aligned} &PA_{\mathrm{d}} + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P + \varepsilon A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}PA_{\mathrm{d}} + \gamma^{-1}PBB^{\mathrm{T}}P + \\ &\gamma^{-1}C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}C_{\mathrm{d}} < 0. \end{aligned} \tag{15}$$

由P为对角正定矩阵, 得到

$$A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}PA_{\mathrm{d}} \geqslant 0. \tag{16}$$

由$\varepsilon > 0$, 式(15)–(16), 易得

$$\begin{aligned} &PA_{\mathrm{d}} + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P + \gamma^{-1}PBB^{\mathrm{T}}P + \\ &\gamma^{-1}C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}C_{\mathrm{d}} < 0. \end{aligned} \tag{17}$$

再次利用Schur补引理, 可得

$$\begin{bmatrix} PA_{\mathrm{d}} + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & PB & C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{18}$$

因此, 得到

$$\mu\begin{pmatrix} PA_{\mathrm{d}} + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & PB & C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \tag{19}$$

另一方面, 因为$A_{\mathrm{c}}, A_{\mathrm{d}}$为Metzler矩阵, $B \succeq 0$, P为对角正定矩阵, 由引理4, 知PA_{c}与PA_{d}均为Metzler矩阵, 且$PB \succeq 0$. 而$A_{\mathrm{d}} \succeq A_{\mathrm{c}}$, 所以$PA_{\mathrm{d}} \succeq PA_{\mathrm{c}}$. 再结合式(11)(13), 可得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} PA_{\mathrm{c}} + A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}P & PB & C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq \\ &\begin{bmatrix} PA_{\mathrm{d}} + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & PB & C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

成立且均为Metzler矩阵. 从而由引理2得

$$\begin{aligned} &\mu\begin{pmatrix} PA_{\mathrm{c}} + A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}P & PB & C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{pmatrix} \leqslant \\ &\mu\begin{pmatrix} PA_{\mathrm{d}} + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & PB & C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{21}$$

所以有

$$\mu\begin{pmatrix} PA_{\mathrm{c}} + A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}P & PB & C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \tag{22}$$

于是

$$\begin{bmatrix} PA_{\mathrm{c}} + A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}P & PB & C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{23}$$

再利用引理3, 得到闭环系统(5)内稳定并且其传递函数$T_{\mathrm{zw}}(s)$满足式(6).　　证毕.

注 2　定理1给出了受控正系统(3)弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制的一个充分条件. 可以看出, 由于定理1中引入了一个等式约束, 使得结果无法直接由LMI得出. 但是, 在定理1中, 控制器参数K与未知参数P得以分开, 这样将更有利于弹性静态输出反馈控制器的设计.

基于定理1, 如果在系统(3)中, 矩阵B_1, D_1有符号限制, 例如当$B_1 \succeq 0,\ D_1 \succeq 0$时, 则可以得到如下的推论.

推论 1　给定常量$\gamma > 0, \varepsilon > 0$和连续时间区间不确定系统(3), 其中$A \in [A_{\mathrm{m}}, A_{\mathrm{M}}], B \succeq 0, B_1 \succeq 0, C \succeq 0, D_1 \succeq 0, C_1 \succeq 0$, 如果存在矩阵$K$及对角矩阵

$P > 0, Q > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon^{-1}P & I+\varepsilon A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & PB & C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon Q & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{24}$$

$$PQ = I, \tag{25}$$

$$[A_{\mathrm{f}}]_{ij} \succeq 0,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \tag{26}$$

$$[C_{\mathrm{f}}]_{ij} \succeq 0,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n, \tag{27}$$

其中:

$$A_{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{M}} + B_1KC_1 + B_1K_{\mathrm{M}}C_1,$$
$$C_{\mathrm{d}} = C + D_1KC_1 + D_1K_{\mathrm{M}}C_1,$$
$$A_{\mathrm{f}} = A_{\mathrm{m}} + B_1KC_1 + B_1K_{\mathrm{m}}C_1,$$
$$C_{\mathrm{f}} = C + D_1KC_1 + D_1K_{\mathrm{m}}C_1,$$

那么存在弹性静态输出反馈控制器(4), 使得闭环系统(5)为正系统、内稳定且其传递函数$T_{\mathrm{zw}}(s)$满足式(6).

证 在定理1中, 令$B_2 = B_1, B_3 = 0, D_2 = D_1$, $D_3 = 0$, 即可得证. 证毕.

注 3 对情形$B_1 \preceq 0, D_1 \preceq 0$, 情形$B_1 \preceq 0, D_1 \succeq 0$, 及情形$B_1 \succeq 0, D_1 \preceq 0$, 均可类似得出相应的充分性条件, 此处省略.

对于更一般的情形, 如果在系统(3)中, 矩阵B_1, C_1, D_1均为不确定矩阵, 并且满足$B_1 \in [B_{\mathrm{m}}, B_{\mathrm{M}}]$, $C_1 \in [C_{\mathrm{m}}, C_{\mathrm{M}}]$, $D_1 \in [D_{\mathrm{m}}, D_{\mathrm{M}}]$, $B_{\mathrm{m}} \succeq 0$, $C_{\mathrm{m}} \succeq 0$, $D_{\mathrm{m}} \succeq 0$, 同样可以得到系统(3)弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制的一个充分条件.

由于K任意, 不失一般性, 可设$K = K_1 + K_2$, 其中$K_1 \succeq 0, K_2 \preceq 0$, 则式(4)可以重写为

$$\boldsymbol{u}(t) = K_1\boldsymbol{y}(t) + K_2\boldsymbol{y}(t) + \Delta K\boldsymbol{y}(t), \tag{28}$$

于是, 有

定理 2 给定常量$\gamma > 0, \varepsilon > 0$和连续时间区间不确定系统(3), 其中$A \in [A_{\mathrm{m}}, A_{\mathrm{M}}]$, $B_1 \in [B_{\mathrm{m}}, B_{\mathrm{M}}]$, $C_1 \in [C_{\mathrm{m}}, C_{\mathrm{M}}]$, $D_1 \in [D_{\mathrm{m}}, D_{\mathrm{M}}]$, $B_{\mathrm{m}} \succeq 0$, $C_{\mathrm{m}} \succeq 0$, $D_{\mathrm{m}} \succeq 0, B \succeq 0, C \succeq 0$, 如果存在矩阵$K_1 \succeq 0, K_2 \preceq 0$, 及对角矩阵$P > 0, Q > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon^{-1}P & I+\varepsilon A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & PB & C_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon Q & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{29}$$

$$PQ = I, \tag{30}$$

$$[A_{\mathrm{f}}]_{ij} \succeq 0, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \tag{31}$$

$$[C_{\mathrm{f}}]_{ij} \succeq 0,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n, \tag{32}$$

其中:

$$A_{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{M}} + B_{\mathrm{M}}K_1C_{\mathrm{M}} + B_{\mathrm{m}}K_2C_{\mathrm{m}} + B_{\mathrm{M}}K_{\mathrm{M}}C_{\mathrm{M}},$$
$$C_{\mathrm{d}} = C + D_{\mathrm{M}}K_1C_{\mathrm{M}} + D_{\mathrm{m}}K_2C_{\mathrm{m}} + D_{\mathrm{M}}K_{\mathrm{M}}C_{\mathrm{M}},$$
$$A_{\mathrm{f}} = A_{\mathrm{m}} + B_{\mathrm{m}}K_1C_{\mathrm{m}} + B_{\mathrm{M}}K_2C_{\mathrm{M}} + B_{\mathrm{M}}K_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{M}},$$
$$C_{\mathrm{f}} = C + D_{\mathrm{m}}K_1C_{\mathrm{m}} + D_{\mathrm{M}}K_2C_{\mathrm{M}} + D_{\mathrm{M}}K_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{M}},$$

那么存在弹性静态输出反馈控制器(28), 使得闭环系统(5)为正系统、内稳定且其传递函数$T_{\mathrm{zw}}(s)$满足式(6).

证 由$A \in [A_{\mathrm{m}}, A_{\mathrm{M}}]$, $\Delta K \in [K_{\mathrm{m}}, K_{\mathrm{M}}]$, $B_1 \in [B_{\mathrm{m}}, B_{\mathrm{M}}]$, $C_1 \in [C_{\mathrm{m}}, C_{\mathrm{M}}]$, $D_1 \in [D_{\mathrm{m}}, D_{\mathrm{M}}]$, $K = K_1 + K_2, K_1 \succeq 0, K_2 \preceq 0, B_{\mathrm{m}} \succeq 0, C_{\mathrm{m}} \succeq 0, D_{\mathrm{m}} \succeq 0$, 可得

$$A_{\mathrm{d}} \succeq A_{\mathrm{c}} \succeq A_{\mathrm{f}}, \tag{33}$$

$$C_{\mathrm{d}} \succeq C_{\mathrm{c}} \succeq C_{\mathrm{f}}, \tag{34}$$

余下证明类似于定理1, 此处省略. 证毕.

注 4 定理2给出了更一般情形下的受控正系统(3)弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制的一个充分条件. 尽管定理中包含一个矩阵等式约束, 但是可以通过锥补线性化技巧[20]来解决.

根据锥补线性化技巧, 本文可以设计如下算法(针对定理2)来获得反馈增益矩阵K.

算法 1

步骤 1 找到不等式组(29)(31)–(32)的一组可行解, 并且记这组可行解为$(\hat{P}_0, \hat{Q}_0, \hat{K}_{10}, \hat{K}_{20})$. 令$i = 0$, 取$\hat{P}_0, \hat{Q}_0$为迭代初值.

步骤 2 利用$(\hat{P}_i, \hat{Q}_i)$, 解凸的最小化问题

$$\min_{\hat{P},\hat{Q},\hat{K}_1,\hat{K}_2} \{\mathrm{tr}(\hat{P}\hat{Q}_i + \hat{P}_i\hat{Q})\},$$

满足式(29)(31)–(32).

记最小解为$(\hat{P}, \hat{Q}, \hat{K}_1, \hat{K}_2)$.

步骤 3 如果式(31)–(32)与矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \hat{P}A_{\mathrm{s}} + A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\hat{P} & \hat{P}B & C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

成立, 其中:

$$A_{\mathrm{s}} = A_{\mathrm{M}} + B_{\mathrm{M}}\hat{K}_1C_{\mathrm{M}} + B_{\mathrm{m}}\hat{K}_2C_{\mathrm{m}} + B_{\mathrm{M}}K_{\mathrm{M}}C_{\mathrm{M}},$$
$$C_{\mathrm{s}} = C + D_{\mathrm{M}}\hat{K}_1C_{\mathrm{M}} + D_{\mathrm{m}}\hat{K}_2C_{\mathrm{m}} + D_{\mathrm{M}}K_{\mathrm{M}}C_{\mathrm{M}},$$

那么控制器为$\boldsymbol{u}(t) = \hat{K}_1\boldsymbol{y}(t) + \hat{K}_2\boldsymbol{y}(t) + \Delta K\boldsymbol{y}(t)$, 退出.

步骤 4 若$i > N_0$, 其中N_0为允许迭代的最大数, 退出. 否则, 令$i = i + 1$, $(\hat{P}_i, \hat{Q}_i) = (\hat{P}, \hat{Q})$, 再转到步骤2.

注 5 在算法1中, 由于选取的$\varepsilon > 0$不一定使得不等式组(29)–(32)有可行解, 所以在选取过程中, 可以先确定一个区间, 采用试探法选取可行的ε, 若在此区间中均不能使不等式组(29)–(32)有可行解, 则需对区间稍作扩大直至有可行解为止.

由于弹性静态输出反馈控制器(28)中的ΔK可能有界, 因此可以进一步求出ΔK的边界, 即K_m的最小值和K_M的最大值, 具体算法设计如下.

算法 2

步骤 1　找到满足算法1的一组可行的$K_\mathrm{m}, K_\mathrm{M}$.

步骤 2　取矩阵$X\in\mathbb{R}^{m\times q}$, 其中, X中的每个元素均为充分小的正数, 令$K_\mathrm{m}=K_\mathrm{m}-X, K_\mathrm{M}=K_\mathrm{M}+X$, 验证此时的$K_\mathrm{m}, K_\mathrm{M}$是否使得定理2中的式(29)–(32)有可行解.

步骤 3　若无可行解, 则$K_\mathrm{m}+X, K_\mathrm{M}-X$即为$\Delta K$的边界, 且$K_\mathrm{m}+X$为$\Delta K$的近似最小值, $K_\mathrm{M}-X$为ΔK的近似最大值, 退出. 否则, 再转到步骤2.

注 6　算法2确定了ΔK的边界, 但这种方法只能得出ΔK边界的逼近值, 而不是最优值.

4　数值仿真(Numerical simulation)

考虑连续时间区间不确定系统(3), 系统参数如下:

$$A_\mathrm{m}=\begin{bmatrix}-0.342 & 1.94 & 1.45\\ -0.1 & -3.87 & 0\\ 0.1 & 0 & -2.91\end{bmatrix},$$

$$A_\mathrm{M}=\begin{bmatrix}-0.158 & 2.06 & 1.55\\ 0.142 & -3.73 & 0\\ 0.2 & 0 & -2.55\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0.22 & 0 & 0\\ 0 & 0.32 & 0\\ 0 & 0 & 0.42\end{bmatrix},\ B_\mathrm{m}=\begin{bmatrix}0.19 & 0 & 0\\ 0 & 0.18 & 0\\ 0 & 0 & 0.17\end{bmatrix},$$

$$B_\mathrm{M}=\begin{bmatrix}0.21 & 0 & 0\\ 0 & 0.22 & 0\\ 0 & 0 & 0.23\end{bmatrix},\ C=[1\ 0\ 0],$$

$$C_\mathrm{m}=[0.9\ 0\ 0],\ C_\mathrm{M}=[1.1\ 0\ 0],\ D_\mathrm{m}=[0\ 0.5\ 0],$$

$$D_\mathrm{M}=[0\ 1\ 0],\ K_\mathrm{M}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\\ 0.1\end{bmatrix},\ K_\mathrm{m}=\begin{bmatrix}-0.1\\ -0.1\\ -0.1\end{bmatrix}.$$

在本例中, 假定H_∞范数指标$\gamma=0.2, \varepsilon=0.1$. 从系统的参数矩阵来看, A_M为Metzler矩阵, 但A_m不是Metzler矩阵, 这说明系统(3)对所有不确定矩阵来说不总是正的. 计算A_M的特征值为0.0393, -2.6616, -3.8157, 所以系统(3)也不总是稳定的. 根据定理2, 利用MATLAB LMI工具箱求出结果如下:

$$P=\begin{bmatrix}2.0155 & 0 & 0\\ 0 & 2.0155 & 0\\ 0 & 0 & 2.0155\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}0.4962 & 0 & 0\\ 0 & 0.4962 & 0\\ 0 & 0 & 0.4962\end{bmatrix},$$

$$K_1=\begin{bmatrix}3.7406\\ 0.7670\\ 0.1418\end{bmatrix},\ K_2=\begin{bmatrix}-63.8913\\ -0.0001\\ -0.0689\end{bmatrix},$$

因此, 此时控制器增益矩阵为

$$K=\begin{bmatrix}-60.1507\\ 0.7669\\ 0.0729\end{bmatrix}.$$

取$\boldsymbol{x}(0)=[1\ 2\ 3]^\mathrm{T}$, 开环系统的状态轨线如图1所示, 闭环系统的状态轨线如图2所示, 从图中也可以看出, 开环系统是不稳定的, 但闭环系统是稳定的.

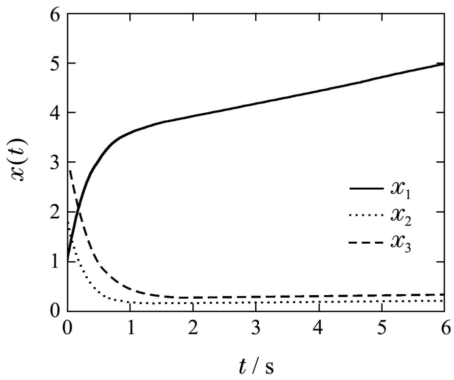

图 1　开环系统状态轨线

Fig. 1　State variables of open-loop system

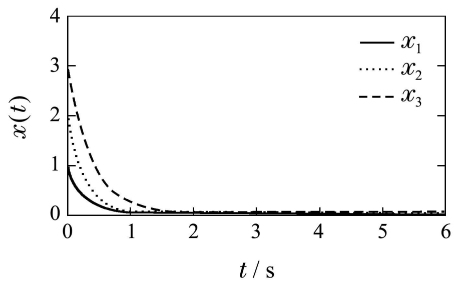

图 2　闭环系统状态轨线

Fig. 2　State variables of close-loop system

下面进一步考虑该系统对弹性的容忍情况, 取矩阵$X=\begin{bmatrix}0.001\\ 0.001\\ 0.001\end{bmatrix}$, 按照算法2的方法依次进行迭代, 最后求得当迭代到第315次时, 定理2无可行解, 所以, 经过314次迭代后所得到的$K_\mathrm{m}, K_\mathrm{M}$为$\Delta K$的边界, 此时$K_\mathrm{m}=\begin{bmatrix}-0.414\\ -0.414\\ -0.414\end{bmatrix}, K_\mathrm{M}=\begin{bmatrix}0.414\\ 0.414\\ 0.414\end{bmatrix}$.

5　结论(Conclusions)

本文研究了受控正系统的弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制问题. 基于线性矩阵不等式及有界实引理, 给出了几种不同情形下的受控正系统弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制的充分条件, 并利用锥补线性化技巧

给出了求解控制器的方法. 最后, 通过数值仿真说明了结论的有效性. 本文所给的方法对于离散时间正系统的相关问题也同样适用.

参考文献(References):

[1] BERMAN A, NEUMANN M, STERN R J. *Nonnegative Matrices in Dynamic Systems* [M]. New York: Wiley, 1989.

[2] FARINA L, RINALDI S. *Positive Linear Systems: Theory and its Applications* [M]. New York: Wiley, 2000.

[3] BERMAN A, PLEMMONS R J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[4] MASON O. Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 6 – 10.

[5] LIU X, YU W, WANG L. Stability analysis of positive systems with bounded time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* Ⅱ, 2009, 56(7): 600 – 604.

[6] GURVITS L, SHORTEN R, MASON O. On the stability of switched positive linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(6): 1099 – 1103.

[7] 李振波, 朱淑倩. 受控正时滞系统的弹性静态输出反馈镇定 [J]. 山东大学学报(工学版), 2011, 41(3): 46 – 52.
(LI Zhenbo, ZHU Shuqian. Resilient static output feedback stabilization for controlled positive time-delay systems [J]. *Journal of Shandong University (Engineering Science)*, 2011, 41(3): 46 – 52.)

[8] FENG J, LAM J, LI P, et al. Decay rate constrained stabilization of positive systems using static output feedback [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(1): 44 – 54.

[9] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P P, et al. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831 – 847.

[10] GAHINET P, APKARIAN P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421 – 448.

[11] 朱淑倩, 张承慧, 李振波, 等. 不确定奇异时滞系统的时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(4): 587 – 593.
(ZHU Shuqian, ZHANG Chenghui, LI Zhenbo, et al. Delay-dependent robust resilient H_∞ control for uncertain singular time-delay systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(4): 587 – 593.)

[12] FENG J, XU S. Robust H_∞ control with maximal decay rate for linear discrete-time stochastic systems [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, 353(1): 460 – 469.

[13] YANG G, WANG J. Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations [J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 727 – 737.

[14] TANAKA T, LANGBORT C. The bounded real lemma for internally positive systems and H_∞ structured static state feedback [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(9): 2218 – 2223.

[15] LI P, LAM J, SHU Z. H_∞ positive filtering for positive linear discrete-time systems: an augmentation approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2337 – 2342.

[16] RAMI M A. Solvability of static output-feedback stabilization for LTI positive systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(9): 704 – 708.

[17] CUI P, ZHANG C. Observer design and output feedback stabilization for linear singular time-delay systems with unknown inputs [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2008, 6(2): 177 – 183.

[18] 孙林, 郑煜, 姚娟. 不确定离散奇异系统的鲁棒非脆弱H_∞状态反馈控制 [J]. 山东大学学报(理学版), 2011, 46(1): 35 – 41.
(SUN Lin, ZHENG Yu, YAO Juan. Robust non-fragile H_∞ state feedback control for uncertainty discrete singular systems [J]. *Journal of Shandong University (Nature Science)*, 2011, 46(1): 35 – 41.)

[19] 鲁仁全, 苏宏业, 薛安克, 等. 奇异系统的鲁棒控制理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
(LU Renquan, SU Hongye, XUE Anke, et al. *Robust Control Theory of Singular Systems* [M]. Beijing: Science Press, 2008.)

[20] EI GHAOUI L, OUSTRY F, RAMI M A. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.

作者简介:

宋世君 (1988–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为正系统的稳定与镇定、鲁棒控制等, E-mail: songshijun1210@hotmail.com;

冯俊娥 (1971–), 女, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为正系统、模糊系统、奇异系统、时滞系统与Itô随机系统等, E-mail: fengjune@sdu.edu.cn;

孟 敏 (1988–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为布尔网络、半张量积理论与应用、正系统等, E-mail: mengmin52111@163.com.