

DOI: 10.7641/CTA.2014.30689

## 不确定离散线性系统的鲁棒单调反馈-前馈迭代学习控制

李致富<sup>1,2†</sup>, 胡跃明<sup>2</sup>, 郭琪伟<sup>2</sup>, 马 鸽<sup>2</sup>

(1. 华南理工大学 机械与汽车工程学院, 广东 广州 510640;

2. 华南理工大学 精密电子制造装备教育部工程研究中心, 广东 广州 510640)

**摘要:** 针对一类不确定离散线性系统, 提出一种沿迭代方向鲁棒单调收敛和沿时间方向有界输入有界输出(bounded-input bounded-output, BIBO)稳定的反馈-前馈迭代学习控制策略. 首先, 将不确定反馈-前馈迭代学习系统表示为不确定二维Roesser模型系统; 然后, 把二维系统沿迭代方向的鲁棒单调收敛问题转化成一维系统的 $H_\infty$ 干扰抑制控制问题, 并给出系统的稳定性证明和用线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)表示的沿迭代方向鲁棒单调收敛的充分条件, 该LMI充分条件不仅可以用于确定反馈-前馈控制器的增益矩阵, 而且还可以保证系统沿时间轴方向是BIBO稳定的; 最后, 仿真结果证明了该反馈-前馈迭代学习控制策略的有效性.

**关键词:** 迭代学习控制; 不确定系统; 鲁棒单调收敛; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Robust monotonically convergent feedback-forward iterative learning control for uncertain linear discrete systems

LI Zhi-fu<sup>1,2†</sup>, HU Yue-ming<sup>2</sup>, GUO Qi-wei<sup>2</sup>, MA Ge<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. Engineering Research Center for Precision Electronic Manufacturing Equipments of Ministry of Education, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** For a class of uncertain linear discrete systems, a feedback feed-forward iterative learning control (ILC) scheme is proposed, which can ensure the system to be robust monotonically convergent along the iteration direction and bounded-input bounded-output (BIBO) stable along the time direction. First, the uncertain feedback feed-forward iterative learning system is presented by an uncertain two dimensional Roesser model system. Then, the robust monotonic convergence problem along the iteration direction is converted to a  $H_\infty$  disturbance attenuation problem of a one-dimensional system. Furthermore, the stability analysis is presented and the robust monotonically convergent conditions are given by linear matrix inequality (LMI). The LMI conditions can not only determine gain matrix of the feedback feed-forward iterative learning controller, but also guarantee the system is BIBO stable along the time direction. Finally, the simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

**Key words:** iterative learning control; uncertain systems; robust monotonic convergence; linear matrix inequalities

### 1 引言(Introduction)

对于不断重复工序任务的控制系统, 迭代学习控制(iterative learning control, ILC)是一种有效的改进系统性能的方法. 这种方法由Arimoto教授在1984年首先提出, 并应用于机器人控制系统<sup>[1]</sup>. 在迭代学习控制领域, 如专著<sup>[2]</sup>所述, 单调收敛性和鲁棒性一直是研究的热点问题.

单调收敛性通常是指沿迭代方向的误差单调收敛性. 在经典ILC算法的收敛性证明过程中, 通常构造一个压缩映射来证明误差在 $\lambda$ -范数意义下的单调收敛

性. 但Lee和Bien<sup>[3]</sup>指出这在最大范数或无穷范数意义下并不一定能达到单调收敛的效果, 经常会在迭代域上出现很大的超调现象, 引发迭代域上的暂态问题. 因此, 众多学者开始研究在最大范数<sup>[4]</sup>、Lebesgue-2范数<sup>[5]</sup>或Lebesgue- $p$ 范数<sup>[6]</sup>意义下的误差单调收敛性能, 并成为近年来一个热点研究问题. 然而, 以上的这些算法都是针对标称系统而设计的, 在系统带有不确定性或扰动, 则没有给出相应的分析. 为了处理模型(参数)不确定性或扰动, 鲁棒控制方法<sup>[7]</sup>、最优方法<sup>[8]</sup>等被用于迭代学习控制器的设计中.

收稿日期: 2013-07-08; 录用日期: 2013-11-18.

†通信作者. E-mail: sundylzf@gmail.com; Tel.: +86 20-87114489.

基金项目: 国家“863”计划资助项目(2012AA041312); 广东省自然科学基金资助项目(S2013040016854); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2013ZM0098); 国家自然科学基金青年基金资助项目(61105081).

然而, 这些迭代学习控制方法都只能达到渐近稳定的收敛条件, 而不能实现鲁棒单调收敛. 近年来, 对于带有不确定性或扰动的系统的鲁棒单调性问题引起极大的关注<sup>[9-11]</sup>. 虽然这些研究工作有效的处理了系统的不确定性问题, 但是该领域的学者却很少关注把反馈引入到迭代学习控制器的设计中, 所以其研究工作也仅仅集中于沿迭代方向的鲁棒单调收敛性问题.

ILC从本质上来说是一种前馈控制技术, 在实际应用中往往不能单独使用. 而且, ILC作为一种开环控制方法, 在单个迭代域内对沿时间方向的跟踪性能的改进无能为力. 为此, 反馈控制器和相应的设计方法被引入到迭代学习控制器的设计中<sup>[12-13]</sup>, 组成所谓的反馈-前馈迭代学习控制器. 然而, 以上这些工作都聚焦于沿迭代方向的稳定性或收敛性问题的研究, 而很少关注沿时间方向的跟踪性能. 在实际工程应用中, 沿迭代和时间两个方向的收敛性(或稳定性)问题都非常的重要. Shi等人<sup>[14]</sup>采用二维系统理论的方法, 讨论了沿迭代和沿时间两个方向的渐近稳定问题. Gopinath等人<sup>[15]</sup>同样采用二维系统理论的方法给出了沿迭代和时间方向均为BIBO稳定的设计方法. 但是, 上述研究工作均没有讨论沿迭代方向的单调收敛性问题.

本文针对一类带参数不确定性的离散线性系统, 重点研究反馈-前馈迭代学习控制算法沿迭代方向的鲁棒单调收敛和沿时间方向的稳定性问题. 首先, 将不确定反馈-前馈迭代学习系统表示为不确定二维Roesser系统. 然后, 把二维系统沿迭代方向的鲁棒单调收敛问题转化成一维系统的 $H_\infty$ 干扰抑制控制问题, 并给出用LMI表示的在2-范数意义下沿迭代方向鲁棒单调收敛的充分条件. 该充分条件不仅可以保证系统沿时间轴方向是BIBO稳定的, 而且还可方便确定反馈-前馈控制器的增益矩阵, 且计算简单.

为了简便起见, 本文中:  $I$ 和 $0$ 分别表示适当维数的单位矩阵和零矩阵,  $X > 0$ 和 $X < 0$ 分别表示矩阵 $X$ 为正定和负定, 符号“\*”表示对称矩阵中的对称部分, 上标“T”表示矩阵的转置.

## 2 应用环境(Environment)

考虑如下带有参数扰动的不确定离散线性系统:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = (A + \Delta_A(t))x_k(t) + (B + \Delta_B(t))u_k(t), \\ y_k(t) = Cx_k(t), \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $t=0, 1, 2, \dots, N$ 为离散时间变量;  $x_k(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k(t) \in \mathbb{R}^m$ 和 $y_k(t) \in \mathbb{R}^p$ 分别为系统在第 $k$ 次迭代运动中的状态、输入和输出向量;  $A, B$ 和 $C$ 是合适维的标称系统实矩阵;  $\Delta_A(t)$ 和 $\Delta_B(t)$ 为 $t$ 时刻矩阵 $A, B$ 对应的不确定性扰动, 满足

$$\begin{cases} \Delta_A(t) = E_1 \Delta(t) F_1, \\ \Delta_B(t) = E_2 \Delta(t) F_2, \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $E_1, E_2$ 和 $F_1, F_2$ 为已知的合适维实常数矩阵,  $\Delta(t)$ 为未知的不确定系统扰动, 不失一般性, 假定满足 $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I$ .

在系统(1)的迭代过程中, 设其期望输出为 $y_d(t)$ , 对应的期望状态为 $x_d(t)$ , 输出误差定义为 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ , 且作如下假设:

**假设 1** 对于预先给定的期望输出 $y_d(t)$ , 存在唯一的输入序列 $u_d(t), t \in [1, N]$ 使得系统(1)成立;

**假设 2** 在迭代控制过程中, 迭代初始状态满足 $x_k(0) = x_d(0), \forall k = 0, 1, \dots$ .

本文研究的反馈-前馈迭代学习控制系统如图1所示, 由以下4个部分组成:

- 1) 由系统(1)所描述的不确定系统.
- 2) 状态反馈控制器: 用于增强系统的稳定性, 在第 $k$ 次迭代时, 其表达式为

$$u_k^{fbs}(t) = K_1 x_k(t), \quad (3)$$

式中:  $u_k^{fbs}(t)$ 为控制器的输出,  $K_1$ 是待设计的状态反馈增益.

3) 误差补偿控制器: 用于改进沿时间方向的跟踪性能, 其状态空间模型表示为

$$\begin{cases} \tilde{x}_k(t+1) = A_c \tilde{x}_k(t) + B_c e_k(t+1), \\ u_k^{fbc}(t) = K_2 \tilde{x}_k(t), \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $\tilde{x}_k(t)$ 是补偿的状态向量, 不失一般性, 假定在第1次迭代(即 $k=0$ )时其值为零, 即 $\tilde{x}_0(t)=0, u_k^{fbc}(t)$ 为补偿器的输出,  $K_2$ 是待设计的补偿控制器增益矩阵.  $\{A_c, B_c\}$ 为补偿控制器的结构参数, 其维数和取值决定补偿控制器的结构<sup>[14]</sup>.

4) 前馈迭代学习控制器: 用于改进沿迭代方向的性能, 由图1可知, 迭代控制器表达式如下:

$$\begin{cases} u_k(t) = u_k^{ff}(t) + u_k^{fbs}(t) + u_k^{fbc}(t), \\ u_{k+1}^{ff}(t) = u_k^{ff}(t) + u_k^{fbc}(t) + L e_k(t+1), \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $L$ 为学习增益,  $u_k^{ff}$ 为学习控制器的输出; 本文中, 假定第一次迭代时学习控制器输出为0, 即 $u_0^{ff} = 0$ .

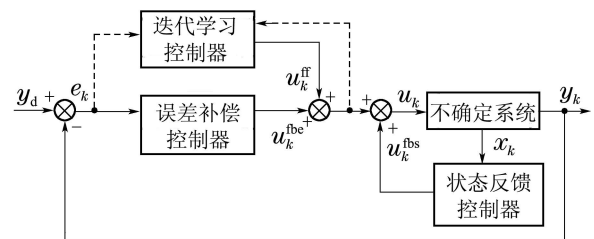


图1 前馈-反馈迭代学习控制系统结构图

Fig. 1 Architecture of a feedback feed-forward ILC system

把式(3)-(4)代入到式(5), 可得反馈-前馈迭代学习控制器的学习律为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + K_1(x_{k+1}(t) - x_k(t)) +$$

$$K_2 \tilde{x}_{k+1}(t) + L e_k(t+1). \quad (6)$$

控制目标: 对于系统(1)-(2), 在假设1和假设2成立的情况下, 设计了反馈-前馈迭代学习控制律(6), 使得: i) 反馈-前馈迭代学习控制系统是鲁棒稳定的; ii) 系统的跟踪误差的2-范数沿迭代方向是单调收敛的; iii) 在每一次迭代内, 系统沿时间方向是BIBO稳定的.

### 3 迭代过程的二维系统描述(2D representation of ILC process)

迭代控制过程是一个典型的二维系统, 其沿时间方向和迭代方向是两个相互独立的指标轴, 每一个变量都可以表示为时间和迭代次数的函数. 定义

$$\begin{cases} e(t, k) = e_k(t), \\ \eta(t, k) = x_k(t) - x_{k-1}(t), \\ u_\Delta(t, k) = u_k(t) - u_{k-1}(t), \\ \tilde{x}(t, k) = \tilde{x}_k(t), \end{cases} \quad (7)$$

然后, 由式(1)-(7), 可得

$$\begin{cases} \eta(t+1, k) = \tilde{A}\eta(t, k) + \tilde{B}u_\Delta(t, k), \\ \tilde{x}(t+1, k) = A_c \tilde{x}(t, k) - B_c C \tilde{A} \eta(t, k) + B_c \times \\ \quad e(t+1, k-1) - B_c C \tilde{B} u_\Delta(t, k), \\ e(t+1, k) = e(t+1, k-1) - C \tilde{A} \eta(t, k) - \\ \quad C \tilde{B} u_\Delta(t, k), \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\tilde{A} = A + \Delta_A(t)$ ,  $\tilde{B} = B + \Delta_B(t)$ .

定义

$$X_h(t, k) = \begin{bmatrix} \eta(t, k) \\ \tilde{x}(t, k) \end{bmatrix}, \quad X_v(t, k) = e(t+1, k-1), \quad (9)$$

然后, 式(8)可以改写为典型的二维Roesser模型系统:

$$\begin{bmatrix} X_h(t+1, k) \\ X_v(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \Delta_{A11} & \tilde{A}_{12} + \Delta_{A12} \\ \tilde{A}_{21} + \Delta_{A21} & \tilde{A}_{22} + \Delta_{A22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h(t, k) \\ X_v(t, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 + \Delta_{B1} \\ \tilde{B}_2 + \Delta_{B2} \end{bmatrix} u_\Delta(t, k), \quad (10)$$

式中:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_c C A & A_c \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{21} &= [-C A \ 0], \quad \bar{A}_{22} = I, \\ \begin{bmatrix} \Delta_{A11} & \Delta_{A12} \\ \Delta_{A21} & \Delta_{A22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} \Delta(t) \bar{F}_1 & \bar{E}_{11} \Delta(t) \bar{F}_2 \\ \bar{E}_{12} \Delta(t) \bar{F}_1 & \bar{E}_{12} \Delta(t) \bar{F}_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{E}_{11} &= \begin{bmatrix} E_1 \\ -B_c C E_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ -B_c C B \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{12} &= -C E_1, \quad \bar{B}_2 = -C B, \quad \bar{F}_1 = [F_1 \ 0], \quad \bar{F}_2 = 0, \\ \begin{bmatrix} \Delta_{B1} \\ \Delta_{B2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{E}_{21} \Delta(t) F_2 \\ \bar{E}_{22} \Delta(t) F_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_{21} = \begin{bmatrix} E_2 \\ -B_c C E_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{E}_{22} &= -C E_2. \end{aligned}$$

由式(7)和式(9), 反馈-前馈迭代学习控制律(6)可改写为

$$u_\Delta(t, k) = \bar{K} \begin{bmatrix} X_h(t, k) \\ X_v(t, k) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中  $\bar{K} = [K_1 \ K_2 \ L]$  为反馈-前馈迭代学习控制律的增益矩阵. 由式(11)可知, 设计反馈-前馈迭代学习控制律(6)等价于设计二维系统(10)的状态反馈增益矩阵  $\bar{K}$ .

下面介绍两个引理, 将在后面的稳定性分析和控制器设计中用到.

#### 引理 1<sup>[16]</sup> 二维Roesser模型系统

$$\begin{bmatrix} X_h(t+1, k) \\ X_v(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h(t, k) \\ X_v(t, k) \end{bmatrix}$$

是BIBO稳定的充分必要条件为

- i)  $A_{11}$  是稳定的;
- ii)  $A_{22} + A_{21}(zI - A_{11})^{-1}A_{12} (|z|=1)$  是稳定的.

引理 2<sup>[17]</sup> 考虑离散传递函数  $T(z)$  的实现(不必为最小实现)为  $T(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$ . 以下表述是等价的:

- i)  $\|D + C(zI - A)^{-1}B\|_\infty < 1$ , 且  $A$  在离散意义下是稳定的, 即  $(|\lambda_i| < 1)$ ;
- ii) 存在正定矩阵  $X = X^T > 0$  使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} -X^{-1} & A & B & 0 \\ * & -X & 0 & C^T \\ * & * & -I & D^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0.$$

### 4 二维不确定系统的鲁棒控制(Robust control of uncertain 2D systems)

在本节中, 首先, 给出没有参数扰动时二维系统的控制器设计方法, 即  $\Delta_A(t) = \Delta_B(t) = 0$ . 在此基础上, 再给出带有参数不确定性的二维系统的鲁棒控制设计.

#### 4.1 标称系统的反馈前馈迭代学习控制(Feedback feed-forward ILC control of the nominal system)

当  $\Delta_A(t) = \Delta_B(t) = 0$  时, 并定义  $\bar{K}_1 = [K_1 \ K_2]$ ,  $\bar{K}_2 = L$ , 根据式(11), 则二维系统(10)可改写为

$$\begin{bmatrix} X_h(t+1, k) \\ X_v(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{K}_1 & \bar{A}_{12} + \bar{B}_1 \bar{K}_2 \\ \bar{A}_{21} + \bar{B}_2 \bar{K}_1 & \bar{A}_{22} + \bar{B}_2 \bar{K}_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} X_h(t, k) \\ X_v(t, k) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

然后,从传统的一维系统输入-输出角度,在式(12)中,以 $t$ 为离散时间,把 $X_h(t, k)$ 视为状态向量,  $X_v(t, k)$ 视为扰动输入,  $X_v(t, k+1)$ 视为输出向量. 系统

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{K}_1 & \bar{A}_{12} + \bar{B}_1 \bar{K}_2 \\ \bar{A}_{21} + \bar{B}_2 \bar{K}_1 & \bar{A}_{22} + \bar{B}_2 \bar{K}_2 \end{bmatrix}$$

从 $X_v(t, k)$ 到 $X_v(t, k+1)$ 的传递函数记为 $G_v(z)$ ,由无穷范数定义,可得

$$\|X_v(t, k+1)\|_2 \leq \|G_v(z)\|_\infty \|X_v(t, k)\|_2. \quad (13)$$

由假设2可知,  $X_v(0, k) = 0$ . 再由假设1以及引理2可知,系统对于扰动输入具有 $H_\infty$ 干扰抑制度 $\gamma$ ,即 $\|G_v(z)\|_\infty < \gamma$ ,且 $\bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{K}_1$ 稳定的充要条件是:存在正定矩阵 $P_1 = P_1^T > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} -P_1^{-1} & \mathcal{M} & \mathcal{N} & 0 \\ * & -P_1 & 0 & (\bar{A}_{21} + \bar{B}_2 \bar{K}_1)^T \\ * & * & -\gamma I & (\bar{A}_{22} + \bar{B}_2 \bar{K}_2)^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

成立. 其中:  $\mathcal{M} = \bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{K}_1$ ,  $\mathcal{N} = \bar{A}_{12} + \bar{B}_1 \bar{K}_2$ . 对式(14)分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{P_1, I, I, I\}$ ,可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & P_1 \mathcal{M} & P_1 \mathcal{N} & 0 \\ * & -P_1 & 0 & (\bar{A}_{21} + \bar{B}_2 \bar{K}_1)^T \\ * & * & -\gamma I & (\bar{A}_{22} + \bar{B}_2 \bar{K}_2)^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

记 $P_1 = P^{-1}$ ,  $X_1 = \bar{K}_1 P$ ,并对式(15)分别左乘和右乘 $\text{diag}\{P, P, I, I\}$ ,可得

$$\begin{bmatrix} -P & \bar{A}_{11} P + \bar{B}_1 X_1 & \mathcal{N} & 0 \\ * & -P & 0 & (\bar{A}_{21} P + \bar{B}_2 X_1)^T \\ * & * & -\gamma I & (\bar{A}_{22} + \bar{B}_2 \bar{K}_2)^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

因此,由式(16)成立可得

$$\|G_v(z)\|_\infty < \gamma. \quad (17)$$

然后,由式(13)(17)可知

$$\|X_v(t, k+1)\|_2 < \gamma \|X_v(t, k)\|_2, \quad (18)$$

$$\|X_v(t, k)\|_2 < \gamma^k \|X_v(t, 0)\|_2. \quad (19)$$

注意到系统在第1次迭代运行时,系统的初始控制输入 $u_0(t)$ 是有界的,因此,  $\|X_v(t, 0)\|_2$ 也是有界的. 假定 $0 < \gamma \leq 1$ ,则由式(19)可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_v(t, k)\|_2 = 0$ . 因此,由式(9),易知当 $k \rightarrow \infty$ 时,输出误差 $e(t, k)$ ,  $t \in [1, N]$ 趋于0.

另一方面,由式(17)成立可知

$$\rho(G_v(z)) \leq \|G_v(z)\|_\infty < \gamma, \quad (20)$$

式中 $\rho(\cdot)$ 表示谱半径. 由式(20)可得

$$(\bar{A}_{22} + \bar{B}_2 \bar{K}_2) + (\bar{A}_{21} + \bar{B}_2 \bar{K}_1) \times [zI - (\bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{K}_1)]^{-1} (\bar{A}_{12} + \bar{B}_1 \bar{K}_2),$$

在 $|z| = 1$ 时是稳定的. 因此,由引理1可知, LMI(16)成立,则二维系统(12)是BIBO稳定的. 结合式(4)(9)可知,系统沿时间方向是BIBO稳定的.

因此,由式(16)–(17)(20),可得到以下定理:

**定理1** 系统(1)在不带参数扰动时,即 $\Delta_A(t) = 0$ ,  $\Delta_B(t) = 0$ ,采用如式(6)所示的反馈-前馈迭代学习控制律,在假设1和假设2条件下,存在标量 $0 < \gamma \leq 1$ 、正定矩阵 $P = P^T$ 和矩阵 $X_1$ 使得LMI(16)成立. 那么

i) 系统输出误差的2-范数 $\|e(t, k)\|_2$ 沿迭代方向是单调收敛的,且当 $k \rightarrow \infty$ 时,输出误差 $e(t, k)$ ,  $t \in$ 趋于0;

ii) 系统沿时间方向是BIBO稳定的;

iii) 控制增益 $\bar{K}$ 可以通过如下方法来获取:首先解LMI(16),得到 $X_1, P, \bar{K}_2$ ,而 $\bar{K}_1 = X_1 P^{-1}$ .

从前面的推导过程和定理1,容易得到如下推论:

**推论1** 存在标量 $0 < \gamma \leq 1$ 、正定矩阵 $P = P^T$ 和矩阵 $X_1$ 使得LMI(16)成立,则形如式(10)标称二维Roesser模型系统,即

$$\begin{aligned} \Delta_{A11} &= 0, \Delta_{A12} = 0, \Delta_{A21} = 0, \\ \Delta_{A22} &= 0, \Delta_{B1} = 0, \Delta_{B2} = 0, \end{aligned}$$

在形如式(11)的状态反馈控制器作用下,是BIBO稳定的,且 $\|X_v(t, k+1)\|_2$ 沿 $k$ 的方向是单调收敛的,状态反馈控制器的增益矩阵可以通过解LMI(16)得到.

## 4.2 不确定系统的鲁棒控制(Robust control of the uncertain system)

在本小节中,将讨论系统(1)带有参数不确定性(2)的情况. 首先,介绍一个引理,将在分析过程中用到.

**引理3**<sup>[18]</sup> 给定合适维数矩阵 $Q = Q^T, H, R$ 对任意满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的 $\Delta$ 使

$$Q + H \Delta R + R^T \Delta^T H^T < 0$$

成立的充分必要条件是存在 $\varepsilon > 0$ ,使得

$$Q + \varepsilon^2 H H^T + \varepsilon^{-2} R^T R < 0.$$

联立式(10)和式(11)可得

$$\begin{bmatrix} X_h(t+1, k) \\ X_v(t, k+1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11\Delta} + \bar{B}_{1\Delta}\bar{K}_1 & \bar{A}_{12\Delta} + \bar{B}_{1\Delta}\bar{K}_2 \\ \bar{A}_{21\Delta} + \bar{B}_{2\Delta}\bar{K}_1 & \bar{A}_{22\Delta} + \bar{B}_{2\Delta}\bar{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h(t, k) \\ X_v(t, k) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

式中:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11\Delta} & \bar{A}_{12\Delta} \\ \bar{A}_{21\Delta} & \bar{A}_{22\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + \Delta_{A11} & \bar{A}_{12} + \Delta_{A12} \\ \bar{A}_{21} + \Delta_{A21} & \bar{A}_{22} + \Delta_{A22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_{1\Delta} \\ \bar{B}_{2\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 + \Delta_{B1} \\ \bar{B}_2 + \Delta_{B2} \end{bmatrix}.$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -P & \bar{A}_{11\Delta}P + \bar{B}_{1\Delta}X_1 & \bar{A}_{12\Delta} + \bar{B}_{1\Delta}\bar{K}_2 & 0 \\ * & -P & 0 & (\bar{A}_{21\Delta}P + \bar{B}_{2\Delta}X_1)^T \\ * & * & -\gamma I & (\bar{A}_{22\Delta} + \bar{B}_{2\Delta}\bar{K}_2)^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

注意到,  $\Psi$ 可改写为

$$\Psi = \Pi + H\Delta R + R^T \Delta^T H^T, \quad (23)$$

式中, 矩阵  $\Pi, H, R$  给定如下:

$$\Pi = \begin{bmatrix} -P & \bar{A}_{11}P + \bar{B}_1X_1 & \mathcal{N} & 0 \\ * & -P & 0 & (\bar{A}_{21}P + \bar{B}_2X_1)^T \\ * & * & -\gamma I & (\bar{A}_{22} + \bar{B}_2\bar{K}_2)^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$H^T = [(\bar{E}_{11} + \bar{E}_{21})^T \quad 0 \quad 0 \quad (\bar{E}_{12} + \bar{E}_{22})^T],$$

$$R = \begin{bmatrix} \varepsilon H^T \\ \frac{1}{\varepsilon} R \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(\bar{E}_{11} + \bar{E}_{21})^T & 0 & 0 & \varepsilon(\bar{E}_{12} + \bar{E}_{22})^T \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}(\bar{F}_1P + F_2X_1) & \frac{1}{\varepsilon}(\bar{F}_2 + F_2\bar{K}_2) & 0 \end{bmatrix}.$$

应用Schur补引理到式(25), 可得

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & \varepsilon(\bar{E}_{11} + \bar{E}_{21})^T & 0 & 0 & \varepsilon(\bar{E}_{12} + \bar{E}_{22})^T \\ * & -I & 0 & \frac{1}{\varepsilon}(\bar{F}_1P + F_2X_1) & \frac{1}{\varepsilon}(\bar{F}_2 + F_2\bar{K}_2) & 0 \\ * & * & -P & \bar{A}_{11}P + \bar{B}_1X_1 & \bar{A}_{12} + \bar{B}_1\bar{K}_2 & 0 \\ * & * & * & -P & 0 & (\bar{A}_{21}P + \bar{B}_2X_1)^T \\ * & * & * & * & -\gamma I & (\bar{A}_{22} + \bar{B}_2\bar{K}_2)^T \\ * & * & * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (26)$$

其余过程同第4.1节相似, 同理, 得到如下定理:

**定理 2** 系统(1)在带有参数扰动(2)时, 采用如式(6)所示的反馈-前馈迭代学习控制律, 在假设1和假设2条件下, 存在标量  $0 < \gamma \leq 1, \varepsilon > 0$ , 正定矩阵  $P = P^T$  和矩阵  $X_1$  使得LMI(26)成立. 那么

i) 输出误差的2-范数  $\|e(t, k)\|_2$  沿迭代方向是鲁棒单调收敛的, 且当  $k \rightarrow \infty$  时, 输出误差  $e(t, k), t \in [1, N]$  趋于0.

ii) 系统沿时间方向是BIBO稳定的.

iii) 控制增益  $\bar{K}$  可以通过如下方法来获取: 首先

如第4.1节, 把式(21)视为一维离散不确定系统, 由定理1和文献[18]的定义4.1可知, 系统

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11\Delta} + \bar{B}_{1\Delta}\bar{K}_1 & \bar{A}_{12\Delta} + \bar{B}_{1\Delta}\bar{K}_2 \\ \bar{A}_{21\Delta} + \bar{B}_{2\Delta}\bar{K}_1 & \bar{A}_{22\Delta} + \bar{B}_{2\Delta}\bar{K}_2 \end{bmatrix}$$

是二次稳定的, 对于不确定性具有  $H_\infty$  干扰抑制度  $\gamma$  的充要条件是存在正定矩阵

$$P = P^T$$

和矩阵  $X_1$  使得

$$R = [0 \quad \bar{F}_1P + F_2X_1 \quad \bar{F}_2 + F_2\bar{K}_2 \quad 0].$$

由引理3可知,  $\Psi < 0$  成立的充要条件是: 存在  $\varepsilon > 0$  使得下式成立:

$$\Pi + \varepsilon^2 HH^T + \varepsilon^{-2} R^T R < 0. \quad (24)$$

不等式(24)可以改写为

$$Y^T I Y - (-\Pi) < 0. \quad (25)$$

式中的  $Y$  可由下式给出

解LMI(26), 得到  $X_1, P, \bar{K}_2$ , 而  $\bar{K}_1 = X_1 P^{-1}$ .

从前面的推导过程以及定理2, 很容易得到如下推论:

**推论 2** 存在标量  $0 < \gamma \leq 1, \varepsilon > 0$ , 正定矩阵  $P = P^T$  和矩阵  $X_1$  使得LMI(26)成立, 则形如式(10)的不确定二维Roesser模型系统, 在形如式(11)的状态反馈控制器作用下, 是BIBO稳定的, 且  $\|X_v(t, k+1)\|_2$  沿  $k$  的方向是鲁棒单调收敛的, 状态反馈控制器的增益矩阵可以通过解LMI(26)得到.

**注 1** 文献[14-15]也都讨论了反馈-前馈迭代学习控

制系统沿迭代和时间两个方向的收敛性(或稳定性)问题,但是它们分别得到的是渐进稳定和BIBO稳定条件,而没有得到输出误差的单调收敛条件.此外,与文献[15]需要满足两个条件相比,定理1只需满足一个LMI条件就可以得到沿迭代方向单调收敛且沿时间方向BIBO稳定的充分条件,且增益矩阵可通过解LMI得到,控制器的设计变得更加简单.

## 5 仿真实例(Simulation example)

考虑文献[14]中形如式(1)的一个线性离散系统,其状态方程的常矩阵给定如下:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1.582 & -0.5916 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C = [1.69 \ 1.419]. \end{cases} \quad (27)$$

不确定性矩阵则为

$$\begin{cases} \Delta(t) = \begin{bmatrix} \sin(2t) & 0 \\ 0 & 1 - e^{-t} \end{bmatrix}, \\ E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ F_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (28)$$

期望轨迹定义为

$$y_d(t) = \begin{cases} \sin(0.01\pi t), & 0 \leq t < 200, \\ 1, & 200 \leq t < 300, \\ 4 - 0.01t, & 300 \leq t < 400. \end{cases} \quad (29)$$

初始状态值设置为 $x(0, k) = [0 \ 0]^T, \forall k \geq 0$ ,显然满足假设2. 采样时间设置为 $T_s = 0.5$ .

如文献[14]所介绍的,误差补偿控制器可以采用不同的类型,如PI型, PID型, PI<sup>2</sup>D型等. 本文采用典型的PID型误差补偿控制器,有

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} e_k(t) \\ \sum_{i=1}^t e_k(i) \\ e_k(t) - e_k(t-1) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

在本文中,分别对标称系统和带有参数不确定性的系统进行仿真. 首先,使用MATLAB的LMI工具箱,对LMI(16)求解,取 $\gamma=1$ ,此时, $t_{\min} = -0.16$  ( $t_{\min}$ 为 $t$ 的上界值, LMI有解的充要条件是 $t_{\min} < 0$ ),说明LMI(16)可解,解得

$$\bar{K}_1 = [-2.3552 \ 0.5953 \ -0.0557 \ 0.1108 \ 0.0022],$$

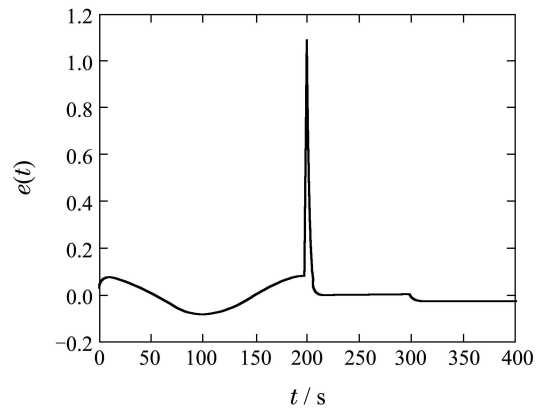
$$\bar{K}_2 = 0.5377.$$

同理,对于LMI(26)取 $\gamma = 1, \varepsilon = 0.25$ ,此时, $t_{\min} = -0.031$ ,解得

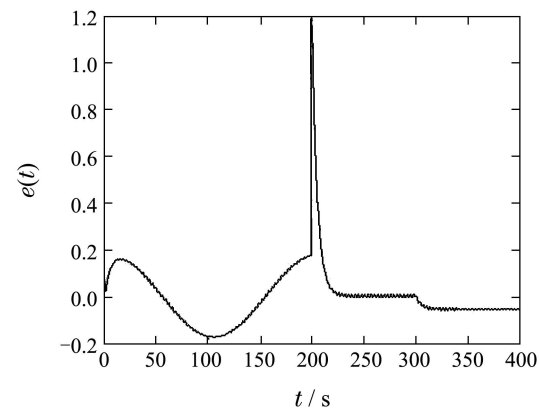
$$\bar{K}_1 = [-2.2867 \ 0.5899 \ -0.0278 \ 0.0481 \ 0],$$

$$\bar{K}_2 = 0.4714.$$

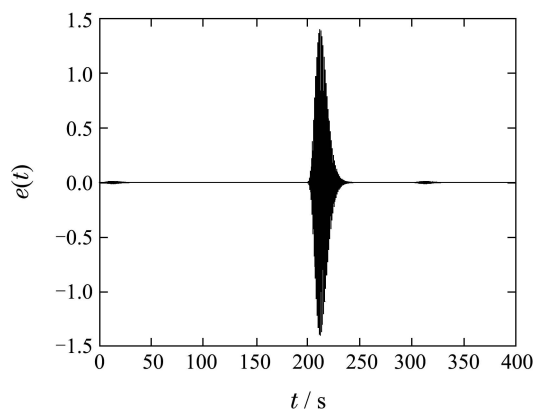
然后把解得的增益矩阵代入学习律(6)分别对标称系统(27)以及不确定系统(27)–(28)进行仿真. 图2为迭代域内的系统跟踪性能图. 从图2(a)和2(d)中可以看出,由于加入了反馈控制,虽然迭代学习控制器还没有起作用,但是跟踪性能已达到一定程度,随着迭代次数的增大,迭代学习控制器开始作用,系统的输出误差逐渐减少.



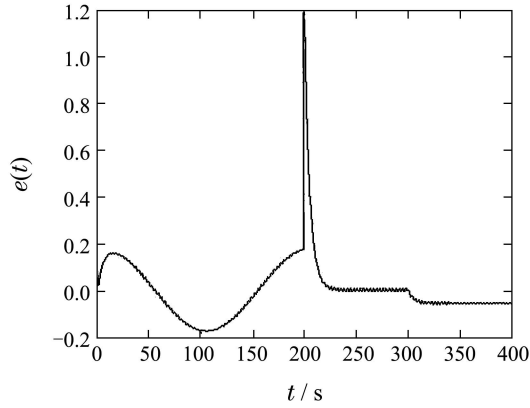
(a) 标称系统第1次迭代输出误差



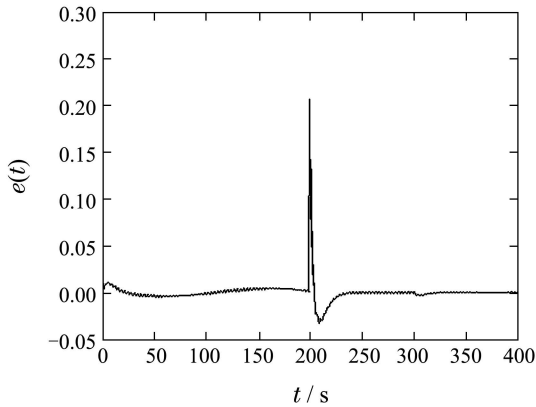
(b) 标称系统第2次迭代输出误差



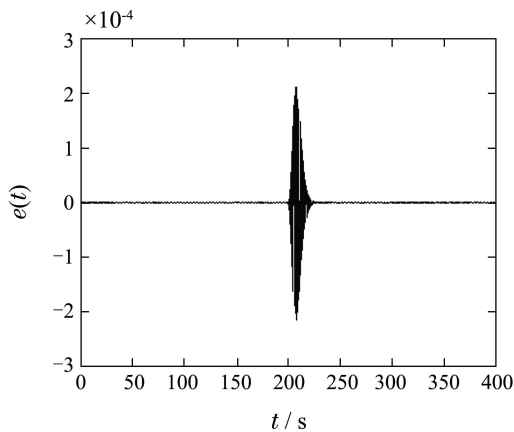
(c) 标称系统第10次迭代输出误差



(d) 不确定系统第1次迭代输出误差



(e) 不确定系统第2次迭代输出误差



(f) 不确定系统第10次迭代输出误差

图 2 前馈-反馈迭代学习控制仿真结果

Fig. 2 Simulation results of the proposed feedback feed-forward iterative controller

图3和图4分别为标称系统和不确定系统在迭代20次的输出误差2-范数. 显然, 两个系统的输出误差2-范数都是单调收敛的. 此外, 对于标称系统, 当迭代到第6次时, 输出误差的2-范数为 $4.97 \times 10^{-4}$ , 即开始趋于零. 对于不确定系统, 当迭代到第10次时, 输出误差的2-范数为 $7.913 \times 10^{-4}$ , 即开始趋于零.

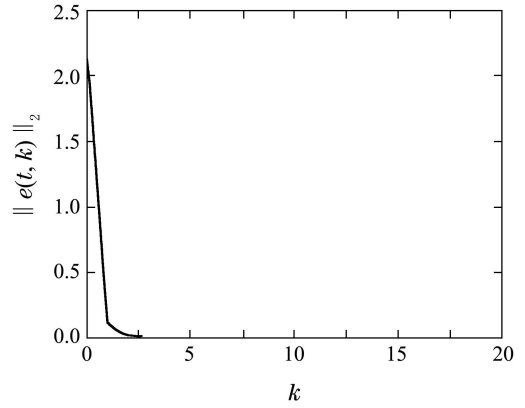


图 3 标称系统迭代过程输出误差2-范数

Fig. 3 Output error 2-norm of the nominal system versus iteration number

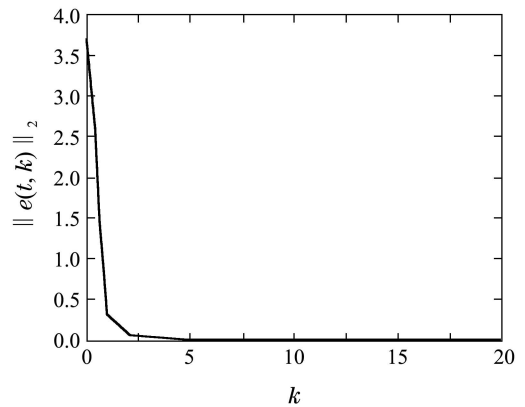


图 4 不确定系统迭代过程输出误差2-范数

Fig. 4 Output error 2-norm of the uncertain system versus iteration number

### 6 结论(Conclusions)

采用反馈-前馈迭代学习控制算法, 本文研究了带有参数不确定离散线性系统沿迭代方向鲁棒单调收敛和沿时间方向的稳定性问题. 通过把二维系统沿迭代方向的鲁棒单调收敛问题转化成一维系统的 $H_\infty$ 干扰抑制控制问题, 给出了系统沿迭代方向输出误差在2-范数意义下鲁棒单调收敛的充分条件, 同时可以证明该充分条件可以保证系统沿时间轴方向是BIBO稳定的, 此外, 该充分条件还可以用于确定反馈-前馈控制器的增益矩阵. 本文的贡献主要有以下3点:

- i) 针对带有不确定性的离散线性系统研究了其沿迭代方向的鲁棒单调收敛性问题;
- ii) 得到了用LMI表示的反馈-前馈迭代学习控制器沿迭代方向鲁棒单调收敛和沿时间方向BIBO稳定的充分条件, 同时该LMI还可用于确定控制器的增益矩阵;
- iii) 对于典型的不确定Roesser模型系统, 通过设计适当的状态反馈控制器, 得到了保证整个二维

系统是BIBO稳定的、沿水平方向是鲁棒单调收敛的充分条件,该状态反馈控制器的增益矩阵可以通过解LMI得到。

### 参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operating operation of robots by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(1): 123 – 140.
- [2] AHN H S, MOORE K L, CHEN Y Q. *Iterative Learning Control: Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems* [M]. London: Springer-Verlag, 2007.
- [3] LEE H S, BIEN Z. A note on convergence property of iterative learning controller with respect to sup norm [J]. *Automatica*, 1997, 33(8): 1591 – 1593.
- [4] 阮小娥, 朴光贤, 卞增男. 迭代学习控制技术回顾与长期学习控制展望 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 966 – 973.  
(RUAN Xiao'e, PARK Kwanghyun, BIEN Z Zennan. Retrospective review of some iterative learning control techniques with a comment on prospective long-term learning [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 966 – 973.)
- [5] MENG D Y, JIA Y M, DU J P, et al. Stability analysis of continuous-time iterative learning control systems with multiple state delays [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(5): 696 – 703.
- [6] RUAN X, BIEN Z, WANG Q. Convergence characteristics of proportional-type iterative learning control in the sense of Lebesgue- $p$  norm [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(5): 1 – 8.
- [7] TAYEBI A, ABDUL S, ZAREMBA M B. Robust iterative learning control design via  $\mu$ -synthesis [C] // *Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications*. Toronto: IEEE, 2005, 8: 416 – 421.
- [8] ROOVER D D, BOSGRA O H. Synthesis of robust multivariable iterative learning controller with application to a wafer stage motion system [J]. *International Journal of Control*, 2000, 73(10): 968 – 979.
- [9] AHN H S, MOORE K L, CHEN Y Q. Stability analysis of discrete-time iterative learning control systems with interval uncertainty [J]. *Automatica*, 2007, 43(5): 892 – 902.
- [10] BRISTOW D A, ALLEYNE A G. Monotonic convergence of iterative learning control for uncertain systems using a time-varying filter [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(2): 582 – 585.
- [11] WIJEEVEN J V D, DONKERS T, BOSGRA O. Iterative learning control for uncertain systems: robust monotonic convergence analysis [J]. *Automatica*, 2009, 45(10): 2383 – 2391.
- [12] TAYEBI A, ZAREMBA M B. Robust iterative learning control design is straightforward for uncertain LTI systems satisfying the robust performance condition [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48 (1): 101 – 106.
- [13] LIU S, WU T J. Robust Iterative learning control design based on gradient method [C] // *Proceeding of the 7th International Symposium on Advanced control of Chemical Process*. Hongkong: Elsevier, 2004, 1: 687 – 692.
- [14] SHI J, GAO F R, WU T J. Robust design of integrated feedback and iterative learning control of a batch process based on a 2D Roesser system [J]. *Journal of Process Control*, 2005, 15(8): 907 – 924.
- [15] GOPINATH S, KAR I N, BHATT R K P. Two-dimensional system theory based learning controller design [C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications Part of 2010 IEEE Multi-conference on Systems and Control*. Yokohama: IEEE, 2010, 9: 416 – 420.
- [16] LU W S, LEE E B. Stability analysis for two-dimensional systems [J]. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, 1983, 30(7): 455 – 461.
- [17] GAHINET P, APKARIAN P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421 – 448.
- [18] XIE L H. Output feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty [J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(4): 741 – 750.

### 作者简介:

**李致富** (1981–), 男, 博士, 助理研究员, 研究方向为非线性控制理论及应用、迭代学习控制、精密电子制造, E-mail: sundylzf@gmail.com;

**胡跃明** (1960–), 男, 博士生导师, 华南理工大学精密电子制造装备教育部工程研究中心主任, 目前研究方向为非线性控制、变结构控制、精密电子制造, E-mail: auymhu@scut.edu.cn;

**郭琪伟** (1983–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制、精密电子制造, E-mail: keavykwok@163.com;

**马 鸽** (1988–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制、模式识别、精密电子制造, E-mail: m.g@mail.scut.edu.cn.