

# 平方根容积卡尔曼滤波概率假设密度算法 在移动机器人同时定位与地图构建中的应用

闫德立<sup>1,2</sup>, 宋永端<sup>1†</sup>, 宋宇<sup>1</sup>, 康轶非<sup>1</sup>

(1. 北京交通大学 电子信息工程学院, 北京 100044; 2. 石家庄铁道大学 电气与电子工程学院, 河北 石家庄 050043)

**摘要:** 针对杂波环境或数据关联模糊环境下移动机器人同时定位与地图构建(SLAM)的问题, 本文提出平方根容积卡尔曼滤波概率假设密度(SRCKF-PHD)SLAM算法, 该算法的主要特点在于: 1) 采用容积规则方法计算非线性函数高斯权重积分以及机器人位姿粒子权重, 达到改善位姿估计性能的目的; 2) 在高斯混合概率假设密度更新过程中, 将平方根容积卡尔曼滤波应用于高斯项权重更新及观测似然计算中, 保证了协方差矩阵的对称性和半正定性, 提高了地图估计的精度和稳定性. 通过仿真实验及Car Park数据集, 将提出算法与RB-PHD-SLAM算法进行对比, 结果表明该算法对机器人位姿估计精度及地图估计精度的提高是有效的.

**关键词:** 移动机器人; 同时定位与地图构建; 平方根容积卡尔曼滤波; 概率假设密度

中图分类号: TP242 文献标识码: A

## The application of square-root cubature Kalman filter and probability hypothesis density in simultaneous localization and mapping for mobile robots

YAN De-li<sup>1,2</sup>, SONG Yong-duan<sup>1†</sup>, SONG Yu<sup>1</sup>, KANG Yi-fei<sup>1</sup>

(1. College of Electronic and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. College of Electric and Electronic Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang Hebei 050043, China)

**Abstract:** A simultaneous localization and mapping (SLAM) algorithm based on square-root cubature Kalman filter and probability hypothesis density (SRCKF-PHD) is proposed, which is applied to situations of high clutter or ambiguous data association. The main contributions are: 1) to improve the performance of robot pose estimation, the cubature rule is utilized to calculate Gaussian weighted integral of the nonlinear function and robot pose particle's weight; 2) in the process of GM-PHD update, SRCKF is utilized for calculating measurement likelihood and Gaussian component's weight, which guarantees the symmetry and positive semi-definiteness of the covariance matrix and improves the numerical stability and accuracy. The proposed algorithm is compared with the RB-PHD-SLAM algorithm in simulation and Car Park data set. The results show that the proposed algorithm outperforms RB-PHD-SLAM algorithm.

**Key words:** mobile robot; simultaneous localization and mapping; square-root cubature Kalman filter; probability hypothesis density

### 1 引言(Introduction)

同时定位与地图创建(simultaneous localization and mapping, SLAM)通常描述为: 移动机器人在未知环境中, 通过自载传感器感知未知环境, 增量地构建环境地图, 同时利用环境地图实现自身定位. 近年来, SLAM问题一直是机器人自主导航领域的研究热点之一<sup>[1]</sup>, 并被称为是实现机器人真正自主的圣杯<sup>[2-3]</sup>.

概率的假设密度(probability hypothesis density,

PHD)SLAM算法是一种不依赖数据关联的SLAM算法, 适用于数据关联模糊或高杂波干扰的环境(杂波可以理解为静态环境中动态或暂态干扰). 该算法主要基于随机有限集(random finite sets, RFS)理论<sup>[4-5]</sup>. Mahler R等通过引入有限集统计特性(finite set statistics, FISST)理论和广义FISST理论, 提出了基于随机有限集的Bayesian递推公式<sup>[6-7]</sup>, 并在后续的研究中提出了概率假设密度<sup>[8]</sup>及势概率假设密度(cardinalized

收稿日期: 2013-07-17; 录用日期: 2014-03-13.

†通信作者. E-mail: ydsong@bjtu.edu.cn; Tel.: +86 18911330596.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61134001, 60905055, 51274144); 国家“973”计划资助项目(2012CB215202); 国家“863”计划资助项目(SS2012AA052302); 河北省自然科学基金资助项目(F2012210031); 博士后科学基金资助项目(2013T60197); 中央高校基本业务费资助项目(2014JBM014).

PHD, CPHD)<sup>[9]</sup>, 使得基于RFS的滤波算法可通过数值计算实现. Vo B N等给出了PHD滤波器的两种实现方法, 即序贯蒙特卡洛PHD(SMC-PHD)<sup>[10]</sup>以及高斯混合PHD(GM-PHD)<sup>[11]</sup>. 周承兴等提出了一种改进的高斯粒子PHD算法<sup>[12]</sup>. Mullane J等将RFS理论应用于SLAM领域的研究中<sup>[13-15]</sup>, 提出了RB-PHD-SLAM算法, 同时将该算法应用于水下SLAM研究中<sup>[16]</sup>. Lee C S等将单聚类PHD滤波器应用于SLAM问题研究中<sup>[17]</sup>, 同时应用于动态目标的SLAM研究中<sup>[18]</sup>.

PHD-SLAM算法的优势主要体现在: 首先, 地图特征及观测值均采用集合的形式表示, 而不是传统的向量序列形式, 因此在Bayesian更新之前不需要数据关联的过程; 其次, 该算法中的不确定性不仅包含运动噪声、观测噪声及错误数据关联产生的不确定性, 同时包含由于杂波影响造成的误观测, 及环境特征漏检等因素. 但由于算法采用序贯蒙特卡洛或者高斯混合的方法描述传递的概率假设密度, 算法在估计精度及稳定性方面存在不足, 这也是近年来基于有限集SLAM研究的一个重要方向.

为此, 文章提出平方根容积卡尔曼滤波概率假设密度SLAM算法(SRCKF-PHD-SLAM). 该算法的主要特点: 1) 在位姿粒子权重计算中, 利用容积规则计算转移概率密度, 避免了复杂的雅可比矩阵计算, 其计算精度可以达到三阶, 从而使粒子分布更好地描述机器人的位姿后验分布, 从而达到提高机器人位姿估计的目的; 2) 将SRCKF应用于PHD更新过程中, 提高计算精度的同时保证了协方差矩阵的对称性和半正定性, 使得后验PHD能够更好地描述路标特征的分布, 达到提高地图估计精度的目的.

文章在第2节中介绍了RFS框架下SLAM问题的描述、PHD-SLAM算法流程及容积变换基本内容; 第3节着重分析了影响机器人位姿估计及地图估计精度的因素, 并在计算中采用了容积变换及平方根容积卡尔曼滤波器, 提出了SRCKF-PHD-SLAM算法; 第4节及第5节分别通过仿真实验和Car Park数据集, 验证了该算法在提高估计精度方面的有效性.

## 2 背景知识(Background knowledge)

### 2.1 特征地图的RFS模型(RFS model of feature-based map)

文章中, 采用特征地图描述机器人所处环境. 与传统算法不同的是, 特征地图不再以向量序列的形式表示, 而是表示为一个随机集. 在 $k$ 时刻, 地图路标特征的RFS表示为 $\mathcal{M}_k = \{m_k^1, \dots, m_k^{n_k}\}$ , 其中:  $m_k^1$ 表示在 $k$ 时刻地图中第1个路标特征,  $n_k$ 表示路标特征的数目. 在SLAM问题中, 随着机器人运动, 路标特征在机器人“视域”内出现、存在、消失, 同时路标特征数目单调增加(将机器人自载传感器扫描范围称为视域

(field of view, FoV). 用 $\mathcal{M}$ 表示整个地图路标特征的RFS;  $\mathcal{M}_{k-1}$ 表示截止到 $k-1$ 时刻, 机器人已探索区域内的路标特征集合;  $\text{FoV}(X_{k-1})$ 表示在 $k-1$ 时刻, 位姿为 $X_{k-1}$ 的机器人, 其视域范围内路标特征的集合. 路标特征的变化过程, 可由式(1)–(3)表示:

$$\mathcal{M}_{k-1} = \mathcal{M} \cap \text{FoV}(X_{0:k-1}), \quad (1)$$

$$\text{FoV}(X_{0:k-1}) = \text{FoV}(X_0) \cup \dots \cup \text{FoV}(X_{k-1}), \quad (2)$$

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k-1} \cup (\text{FoV}(X_k) \cap \bar{\mathcal{M}}_{k-1}), \quad (3)$$

其中:  $\bar{\mathcal{M}}_{k-1} = \mathcal{M} - \mathcal{M}_{k-1}$ 表示不包含于集合 $\mathcal{M}_{k-1}$ 中的特征, 因此 $\text{FoV}(X_k) \cap \bar{\mathcal{M}}_{k-1}$ 表示的是在 $k$ 时刻新进入传感器视域内的特征集合, 用 $\mathcal{B}(X_k)$ 表示.

### 2.2 观测的RFS模型(RFS model of measures)

在 $k$ 时刻, 位姿为 $X_k$ 的机器人获得的观测集合表示为 $\mathcal{Z}_k$ , 其RFS模型为

$$\mathcal{Z}_k = \bigcup_{m \in \mathcal{M}_k} \mathcal{D}(m, X_k) \cup \mathcal{C}_k(X_k), \quad (4)$$

其中:  $\mathcal{D}_k(m, X_k)$ 表示位于 $m$ 处的路标特征产生的量测RFS;  $\mathcal{C}_k(X_k)$ 表示由杂波产生的量测RFS. 在观测集合 $\mathcal{Z}_k$ 中, 量测值没有顺序性, 并且量测数目是个随机变量, 因此RFS-SLAM实现过程中不依赖数据关联并包含了观测不确定性.

$\mathcal{D}_k(m, X_k)$ 建模为一个Bernouli型RFS<sup>[6]</sup>, 也就是 $\mathcal{D}_k(m, X_k) = \phi$ 的概率为 $1 - P_D(m|X_k)$ ,  $P_D(m|X_k)$ 表示位姿为 $X_k$ 的机器人能够探测到位于 $m$ 处的路标特征的概率, 简写为 $P_D$ ;  $\mathcal{D}_k(m, X_k) = \{z\}$ 的概率密度为 $P_D g_k(z|m, X_k)$ , 其中 $g_k(z|m, X_k)$ 表示为观测模型.

### 2.3 RFS框架下SLAM问题描述(SLAM problem representation in RFS framework)

将地图特征及观测信息用RFS的形式表述, 则SLAM问题就转化为在 $\mathcal{Z}_k$ 条件下对 $\mathcal{M}_k$ 和 $X_{1:k}$ 联合后验概率密度的估计过程, 其形式可表示为 $p_{k|k}(\mathcal{M}_k, X_{1:k} | \mathcal{Z}_{1:k}, u_{1:k}, X_0)$ , 简写为 $p_{k|k}(\mathcal{M}_k, X_{1:k})$ .

在RFS理论框架下, SLAM问题的Bayesian递推过程表示为式(5)–(6). 在预测和更新过程中, 观测信息和地图特征用集合形式表示, 集合中元素顺序不必一一对应, 从而避免了数据关联的过程.

$$p_{k|k-1}(\mathcal{M}_k, X_{1:k} | \mathcal{Z}_{0:k-1}, u_{0:k-1}, X_0) = \int f_X(X_{0:k}, \mathcal{M}_k | X_{0:k-1}, \mathcal{M}_{k-1}, u_{k-1}) \times p_{k-1|k-1}(\mathcal{M}_{k-1}, X_{0:k-1} | \mathcal{Z}_{0:k-1}, u_{0:k-2}, X_0) dX_{k-1}, \quad (5)$$

$$p_{k|k}(\mathcal{M}_k, X_{1:k} | \mathcal{Z}_{0:k}, u_{0:k-1}, X_0) = \frac{g_k(\mathcal{Z}_k | \mathcal{M}_k, X_k) p_{k|k-1}(\mathcal{M}_k, X_{1:k})}{\int \int g_k(\mathcal{Z}_k | \mathcal{M}_k, X_k) p_{k|k-1}(X_{1:k}, \mathcal{M}_k) dX_k \sigma \mathcal{M}_k}. \quad (6)$$

在式(5)–(6)的实现过程中, 存在多个集合的积分运算, 在实际应用中是计算不可行的. 因此, 在Poisson RFS假设下, MAHLER R在文献[8]中给出了一种只传递随机集分布一阶矩, 即概率假设密度的实现方法.

## 2.4 概率假设密度SLAM(PHD SLAM)

在SLAM问题中, 假设机器人真实位姿已知的条件下, 各个特征的观测是独立的, 地图特征的估计是相互独立的过程. 然而, 实际过程中机器人真实位姿是无法得知的, 因此只能根据条件概率公式, 将联合后验估计分解为机器人位姿估计及机器人位姿已知条件下的地图特征估计问题, 表示为

$$p_k(\mathcal{M}_k, X_{1:k} | \mathcal{Z}_{0:k}, u_{0:k-1}, X_0) = p_k(X_{1:k} | \mathcal{Z}_{0:k}, u_{0:k-1}, X_0) p_k(\mathcal{M}_k | \mathcal{Z}_{0:k}, X_{0:k}). \quad (7)$$

机器人位姿估计部分采用粒子集来描述其后验概率分布, 具体实现过程在第3.1节中详述. 位姿已知条件下的地图估计采用后验概率假设密度进行描述. 在集合为Poisson型并且路标特征独立同分布条件下, 有限集的概率密度可以通过式(8)得到<sup>[8]</sup>, 其中 $v_k(m | X_{0:k}, \mathcal{Z}_{0:k})$ 表示 $k$ 时刻地图特征的条件PHD, 在后文中简写为 $v_k(m | X_{0:k})$ .

$$p_k(\mathcal{M}_k | X_{0:k}) \approx \frac{\prod_{m \in \mathcal{M}_k} v_k(m | X_{0:k})}{\exp\left(\int v_k(m | X_{0:k}) dm\right)}. \quad (8)$$

PHD实现过程主要有两种方式, 分别为Monte Carlo(SMC-PHD)<sup>[10]</sup>实现方法和高斯混合(GM-PHD)<sup>[11]</sup>实现方法. GM-PHD由于目标状态提取较简单, 因此得到研究者广泛应用. 本文PHD-SLAM算法采用GM-PHD实现方法, 具体过程在第3.2节中详述.

## 2.5 容积变换(Cubature transformation)

Cubature卡尔曼滤波根据球面径向数值积分准则, 采用容积变换的方法计算条件转移密度. 基于高斯假设的Bayesian滤波核心是计算高斯权重积分(Gaussian weighted integral, GWI)问题, 即

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} f(x) \mathcal{N}(x, P_x) dx, \quad (9)$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ;  $n_x$ 表示变量 $x$ 的维数;  $f(x)$ 表示非线性函数;  $\mathcal{N}(x, P_x)$ 表示 $n_x$ 维高斯分布. 在文献[19]中, 学者Arasaratnam等针对该问题, 提出了容积规则的解决方法, 利用 $2n_x$ 个等权重的容积点计算积分 $I(f)$ :

$$I(f) \approx \frac{1}{2n_x} \sum_{j=1}^{2n_x} f(\sqrt{P_x} \xi_j + x), \quad (10)$$

上式中, 容积点集为 $\sqrt{P_x} \xi_j + x$ , 点集 $\xi_j$ 表示为

$$\{\xi_j\} = \sqrt{n_x} \{[1]_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n_x, \quad (11)$$

其中 $\{[1]_j\}$ 代表 $n_x$ 维笛卡尔坐标系的坐标轴与维单位超球面的交点坐标.

## 3 SRCKF-PHD-SLAM 算法(SRCKF-PHD-SLAM algorithm)

算法实现过程采用Rao-Blackwellised粒子滤波器实现机器人位姿后验估计, 即每一个粒子表示一个机器人位姿; 在机器人位姿已知条件下, 采用PHD滤波器描述地图特征分布, 并随着时间不断更新. 在 $k-1$ 时刻, PHD-SLAM的强度函数表示为

$$\{\eta_{k-1}^{(i)}, X_{k-1}^{(i)}, v_{k-1}^{(i)}(m | X_{k-1}^{(i)})\}_{i=1}^N, \quad (12)$$

其中:  $N$ 为采样粒子数;  $\eta_{k-1}^{(i)}$ 表示机器人位姿粒子权重;  $X_{k-1}^{(i)}$ 表示第 $i$ 个机器人位姿;  $v_{k-1}^{(i)}(m | X_{k-1}^{(i)})$ 表示在第 $i$ 个机器人位姿条件下的地图概率假设密度, 其描述的是地图特征的分布情况.

PHD滤波器采用混合高斯项的方法实现, 即PHD的分布由一系列的加权高斯项表示, 每一个高斯项的峰值表示路标可能存在的位置, 可能性的大小由权重体现.

$$v_{k-1}^{(i)}(m | X_{k-1}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}} \omega_{k-1}^{(i,j)} \mathcal{N}(m; \mu_{k-1}^{(i,j)}, P_{k-1,m}^{(i,j)}), \quad (13)$$

其中:  $J_{k-1}^{(i)}$ 为PHD函数的高斯项的个数;  $\omega_{k-1}^{(i,j)}$ ,  $\mu_{k-1}^{(i,j)}$ ,  $P_{k-1,m}^{(i,j)}$ 分别为 $k-1$ 时刻, 第 $i$ 个位姿粒子条件下, 第 $j$ 个高斯项对应的权重、均值和方差.

从结构上看, PHD-SLAM同FastSLAM有一些类似, 均采用RB粒子滤波器表示机器人位姿分布, 每一个粒子维护一个地图. 不同的是, FastSLAM中, 特征地图采用向量序列的形式表示, 而PHD-SLAM则采用高斯和的形式描述其分布, 其更新过程也是不同的.

### 3.1 机器人位姿估计(Estimation of robot pose)

采用RB粒子滤波器实现机器人位姿估计, 实现过程主要包括: 粒子重要性采样, 粒子重采样及特征提取3部分. 其中粒子权重的分布对机器人位姿估计有重要影响, 因此在本节中将着重阐述采用容积变换计算权重的方法.

#### 1) 粒子重要性采样.

已知 $k-1$ 时刻, 机器人位姿样本集为 $\{X_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ , 通过机器人的运动模型 $f_X(\tilde{X}_k^{(i)} | X_{k-1}^{(i)}, u_{k-1})$ , 可以得到 $k$ 时刻粒子集为 $\{\tilde{X}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ . 机器人位姿的后验分布由不同权重的粒子集表示, 即 $\{\tilde{\eta}_k^{(i)}, X_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ .  $\tilde{\eta}_k^{(i)}$ 表示 $k$ 时刻第 $i$ 个采样粒子的权重. 权重递推公式为<sup>[20]</sup>

$$\tilde{\eta}_k^{(i)} = g_k(\mathcal{Z}_k | \mathcal{Z}_{0:k-1}, \tilde{X}_{0:k}^{(i)}) \eta_{k-1}^{(i)}. \quad (14)$$

由式(14)可知, 权重计算的关键是计算 $g_k(\mathcal{Z}_k | \mathcal{Z}_{0:k-1}, X_{0:k}^{(i)})$ . 与FastSLAM不同的是, 式(14)中 $\mathcal{Z}_k$ 与 $\mathcal{Z}_{0:k-1}$ 分别是 $k$ 时刻观测集合及观测历史集合, 观测似然函数不是定义在Euclidean空间, 而是定义在有限集空间. 在选择单特征策略的情况下 $g_k(\mathcal{Z}_k | \mathcal{Z}_{0:k-1},$

$X_{0:k}$ )的计算公式<sup>[13]</sup>为

$$g_k(\mathcal{Z}_k | \mathcal{Z}_{0:k-1}, X_{0:k}) \approx \frac{1}{\Gamma} [(1 - P_D)c_k(z)^{\mathcal{Z}_k} + P_D \times \sum_{z \in \mathcal{Z}_k} c_k(z)^{\mathcal{Z}_k - \{z\}} g_k(z | \bar{m}, X_k)] v_{k|k-1}(\bar{m} | X_{0:k}). \quad (15)$$

其中  $\Gamma = \exp(\hat{n}_{k|k-1} - \hat{n}_k + \int c_k(z) dz) v_k(\bar{m} | X_{0:k})$ . 式中:  $\hat{n}_{k|k-1}$  表示预测地图特征数目;  $\hat{n}_k$  表示更新后地图特征数目;  $c_k(z)$  表示  $k$  时刻杂波PHD. 单特征策略条件下, 取  $\mathcal{M}_k = \{\bar{m}\}$ ,  $\bar{m}$  可以根据最大似然确定.

由式(15)可知,  $g_k(z | \bar{m}, X_k)$  的计算是影响权重计算精度的一个重要因素, 通过容积变换方法计算第  $i$  个采样粒子权重的过程如下:

a) 预测  $k$  时刻机器人位姿的状态.

在  $k-1$  时刻, 已知第  $i$  个位姿采样粒子为  $X_{k-1}^{(i)}$ , 控制输入为  $u_{k-1}$ , 为采用容积变换计算状态转移向量, 首先进行向量增广:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} X_{k-1}^{(i)} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, G_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varsigma_{k-1}^{(i)} & 0 \\ 0 & S_Q \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中:  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon}$ ,  $G_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon \times n_\varepsilon}$  ( $n_\varepsilon = n_X + n_u$ ) 分别为增广机器人状态和增广协方差因子,  $\varsigma_{k-1}^{(i)}$  为机器人状态协方差平方根因子,  $S_Q$  为控制噪声的协方差平方根因子, 满足  $S_Q S_Q^T = Q$ ,  $Q$  为控制噪声方差.

容积点集为

$$\chi_{l,k-1}^{(i)} = G_\varepsilon \xi_l + \varepsilon, l = 1, 2, \dots, 2n_\varepsilon. \quad (17)$$

将容积点  $\chi_{l,k-1}^{(i)}$  通过运动方程进行传递, 得到传播后的容积点  $\chi_{l,k|k-1}^{(i)*} = f(\chi_{l,k-1}^{(i)})$ , 则在  $k$  时刻, 机器人的预测状态为

$$X_{k|k-1}^{(i)} \approx \frac{1}{2n_\varepsilon} \sum_{l=1}^{2n_\varepsilon} \chi_{l,k|k-1}^{(i)*}. \quad (18)$$

为预测机器人状态协方差平方根因子  $\varsigma_{k|k-1}^{(i)}$ , 定义误差矩阵为

$$[q, r] = qr(\text{Err}_X^T), \varsigma_{k|k-1}^{(i)} = r^T, \quad (19)$$

其中  $qr(\cdot)$  为QR分解操作符.

b) 确定  $\bar{m}$ . 已知第  $i$  个位姿粒子对应的预测PHD为  $v_{k|k-1}^{(i)}(m | X_{k|k-1}^{(i)})$ , 选择其中权重最大的高斯项的均值作为  $\bar{m}$ , 记为  $m^{(i,j)}$ ,  $j$  为该高斯项索引, 对应的方差为  $P_{k|k-1,m}^{(i,j)}$ .

c) 通过容积变换计算观测预测.

为计算位姿为  $X_{k|k-1}^{(i)}$  条件下, 路标特征为  $m^{(i,j)}$  的预测观测均值和方差, 首先进行向量增广:

$$\delta = \begin{bmatrix} X_{k|k-1}^{(i)} \\ m^{(i,j)} \end{bmatrix}, G_\delta = \begin{bmatrix} \varsigma_{k|k-1}^{(i)} & 0 \\ 0 & S_{k|k-1}^{(i,j)} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中:  $\delta \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ ,  $G_\delta \in \mathbb{R}^{n_\delta \times n_\delta}$  ( $n_\delta = n_X + n_m$ );  $S_{k|k-1}^{(i,j)}$

为路标特征  $m^{(i,j)}$  的协方差平方根因子, 满足  $P_{k|k-1,m}^{(i,j)} = S_{k|k-1}^{(i,j)} S_{k|k-1}^{(i,j)T}$ .

容积点集为

$$M_{l,k|k-1}^{(i,j)} = G_\delta \xi_l + \delta, l = 1, 2, \dots, 2n_\delta. \quad (21)$$

将容积点  $M_{l,k|k-1}^{(i,j)}$  通过观测方程进行传递, 得到传播后的容积点  $Z_{l,k|k-1}^{(i,j)} = g(M_{l,k|k-1}^{(i,j)})$ , 则在  $k$  时刻的观测预测为

$$z_{k|k-1}^{(i,j)} \approx \frac{1}{2n_\delta} \sum_{l=1}^{2n_\delta} Z_{l,k|k-1}^{(i,j)}. \quad (22)$$

为计算预测观测方差的平方根因子  $W_{k|k-1}^{(i,j)}$ , 定义误差矩阵  $\text{Err}_Z \in \mathbb{R}^{2n_\delta}$ ,

$$\text{Err}_Z = \frac{1}{\sqrt{2n_\delta}} [\dots, Z_{l,k|k-1}^{(i,j)} - z_{k|k-1}^{(i,j)}, \dots]. \quad (23)$$

通过对  $\text{Err}_Z^T$  进行QR分解, 则观测方差的平方根因子  $W_{k|k-1}^{(i,j)}$  为上三角阵的转置, 表示为

$$[q, r] = qr(\text{Err}_Z^T), W_{k|k-1}^{(i,j)} = r^T. \quad (24)$$

观测方差为  $P_{k|k-1,z}^{(i,j)} = W_{k|k-1}^{(i,j)} W_{k|k-1}^{(i,j)T}$ .

d) 权重计算.

根据式(17)计算第  $i$  个粒子的权重, 其中传感器探测概率  $P_D$  设为0.95,  $c_k(z)$  已知条件下,  $\hat{n}_{k|k-1}$  和  $\hat{n}_k$  可以通过预测PHD和后验PHD得到. 具体的计算过程见下式:

$$A = (1 - P_D)c_k(z)^{|\mathcal{Z}_k|} + P_D \omega_{k|k-1}^{(i,j)} \times \left( \sum_{z \in \mathcal{Z}_k} (c_k(z)^{|\mathcal{Z}_k| - 1}) \mathcal{N}(z; z_{k|k-1}^{(i,j)}, P_{k|k-1,z}^{(i,j)}) \right), \quad (25)$$

$$B = \exp(\hat{n}_{k|k-1} - \hat{n}_k + \lambda_c) \omega_k^{(i,j)}, \quad (26)$$

$$\tilde{\eta}_k^{(i)} = \frac{A}{B} \tilde{\eta}_{k|k-1}^{(i)}, \quad (27)$$

其中  $\omega_{k|k-1}^{(i,j)}$  为索引为  $j$  的高斯项的权重.

2) 位姿提取及重采样.

状态更新后, 机器人状态可以表征为一系列不同权重的粒子集  $\{\tilde{\eta}_k^{(i)}, X_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ ,  $k$  时刻机器人的位置通过采样粒子加权平均确定.

为了解决样本退化, 根据权重  $\tilde{\eta}_k^{(i)}$ , 对粒子集进行重采样. 进行重采样后, PHD-SLAM的强度函数可以表示为  $\{\eta_k^{(i)}, X_k^{(i)}, v_k^{(i)}(m | X_k^{(i)})\}_{i=1}^N$ .

### 3.2 概率假设密度地图估计(Estimation of map using PHD)

采用高斯混合概率假设密度实现地图的估计, 是指地图特征数目和位置分布通过后验的GM-PHD进行描述, 高斯项的均值表示路标特征可能存在的位置. 地图估计需要对每个机器人位姿条件下的PHD进行预测和更新. 本节中, 将分析PHD更新的过程, 分析影

响PHD分布的因素,在此基础上将SRCKF应用于更新过程中,达到改善算法估计性能的目的,具体的实现过程如下。

### 1) 预测PHD.

新生特征的PHD用混合高斯项的形式表示:

$$b(m|\mathcal{Z}_{k-1}, X_{k|k-1}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{J_{b,k}^{(i)}} \omega_{b,k}^{(i,j)} \mathcal{N}(m; \mu_{b,k}^{(i,j)}, P_{b,k}^{(i,j)}), \quad (28)$$

$J_{b,k}^{(i)}$ 为新生路标特征PHD函数的高斯项的个数;  $\omega_{b,k}^{(i,j)}$ ,  $\mu_{b,k}^{(i,j)}$ ,  $P_{b,k}^{(i,j)}$ 分别为 $k$ 时刻,第 $j$ 个新生高斯项对应的权重、均值和方差。

地图的预测PHD,其高斯混合表示为式(29):

$$\begin{aligned} v_{k|k-1}^{(i)}(m|X_{k|k-1}^{(i)}) &= \\ v_{k-1}^{(i)}(m|X_{k-1}^{(i)}) + b(m|\mathcal{Z}_{k-1}, X_{k|k-1}^{(i)}) &= \\ \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}} \omega_{k|k-1}^{(i,j)} \mathcal{N}(m; \mu_{k|k-1}^{(i,j)}, P_{k|k-1,m}^{(i,j)}) &. \end{aligned} \quad (29)$$

### 2) 更新PHD.

更新后,地图的后验PHD同样具有高斯混合的形式,更新过程及权重计算见式(30)–(32)。

$$\begin{aligned} v_k^{(i)}(m|X_k^{(i)}) &= \\ v_{k|k-1}^{(i)}(m|X_{k|k-1}^{(i)})[1 - P_D(m|X_k^{(i)})] + & \\ \sum_{z \in \mathcal{Z}_k} \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}} v_{G,k}^{(i,j)}(z, m|X_k^{(i)}), & \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} v_{G,k}^{(i,j)}(z, m|X_k^{(i)}) &= \\ \omega_k^{(i,j)}(z|X_k^{(i)}) \mathcal{N}(m; u_{k|k}^{(i,j)}, P_{k|k,m}^{(i,j)}), & \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \omega_k^{(i,j)} &= \\ \frac{P_D \omega_{k|k-1}^{(i,j)} \mathcal{N}(z; z_{k|k-1}^{(i,j)}, P_{k|k-1,z}^{(i,j)})}{c(z) + \sum_{l=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}} P_D \omega_{k|k-1}^{(i,l)} \mathcal{N}(z; z_{k|k-1}^{(i,l)}, P_{k|k-1,z}^{(i,l)})} &. \end{aligned} \quad (32)$$

由式(30)可知,更新后的PHD由两部分组成:  $v_{k|k-1}^{(i)}(m|X_{k|k-1}^{(i)})[1 - P_D(m|X_k^{(i)})]$ 表示在传感器视域内,位于 $m$ 处特征未能被传感器观测到的PHD,体现的是传感器测量漏检的情况;第2部分表示由观测更新后的PHD,体现的是更新后地图特征的分布,表示为加权的高斯和的形式。由式(30)–(32)可知,更新的核心是计算观测预测分布 $\mathcal{N}(z; z_{k|k-1}^{(i,j)}, P_{k|k-1,z}^{(i,j)})$ 以及观测更新后的路标特征分布 $\mathcal{N}(m; u_{k|k}^{(i,j)}, P_{k|k,m}^{(i,j)})$ 。由于在PHD-SLAM中,高斯项的均值表示可能的路标特征,因此 $z_{k|k-1}^{(i,j)}$ 和 $P_{k|k-1,z}^{(i,j)}$ 为第 $i$ 个机器人位姿条件下,索引为 $j$ 的路标特征的观测预测及方差,  $u_{k|k}^{(i,j)}$ 和 $P_{k|k,m}^{(i,j)}$ 表示观测更新后该路标的均值及方差。已知预测概率假设密度 $v_{k|k-1}^{(i)}(m|X_{k|k-1}^{(i)})$ 的条件下,基于平方

根容积卡尔曼滤波的更新过程如下:

### a) 向量增广.

已知索引为 $i$ 的机器人位姿 $X_{k|k-1}^{(i)}$ 条件下,为预测 $k$ 时刻索引为 $j$ 的路标特征的观测,首先需要向量增广,见下式:

$$\alpha = \begin{bmatrix} X_{k|k-1}^{(i)} \\ \mu_{k|k-1}^{(i,j)} \end{bmatrix} G_\alpha = \begin{bmatrix} \varsigma_{k|k-1}^{(i)} & 0 \\ 0 & S_{k|k-1,m}^{(i,j)} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

其中:  $\alpha \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ,  $G_\alpha \in \mathbb{R}^{n_\alpha \times n_\alpha}$  ( $n_\alpha = n_X + n_m$ ),  $\varsigma_{k|k-1}^{(i)}$ 为索引为 $i$ 的机器人位姿的预测协方差平方根因子,  $S_{k|k-1,m}^{(i,j)}$ 为索引为 $j$ 的路标特征的预测协方差平方根因子,满足 $P_{k|k-1,m}^{(i,j)} = S_{k|k-1,m}^{(i,j)} S_{k|k-1,m}^{(i,j)T}$ 。

### b) 计算容积点.

$$C_{l,k|k-1}^{(i,j)} = G_\alpha \xi_l + \alpha, \quad l = 1, 2, \dots, 2n_\alpha. \quad (34)$$

每个容积点 $C_{l,k|k-1}^{(i,j)}$ 表述为机器人状态和环境路标特征的组合形式 $C_{l,k|k-1}^{(i,j)} = [C_{l,k|k-1}^{X(i)} \quad C_{l,k|k-1}^{m(i,j)}]$ 。

### c) 传播容积点.

将容积点 $C_{l,k|k-1}^{(i,j)}$ 通过观测模型 $g(\cdot)$ 进行传递,得到传播后的容积点为

$$Z_{l,k|k-1}^{(i,j)} = g(C_{l,k|k-1}^{(i,j)}), \quad l = 1, 2, \dots, 2n_\alpha. \quad (35)$$

### d) 计算预测观测及方差.

$k$ 时刻的观测预测为

$$z_{k|k-1}^{(i,j)} \approx \frac{1}{2n_\alpha} \sum_{l=1}^{2n_\alpha} Z_{l,k|k-1}^{(i,j)}. \quad (36)$$

为了计算预测观测的方差,首先定义观测误差矩阵 $\text{Err}_{zp}$ 为

$$\text{Err}_{zp} = \frac{1}{\sqrt{2n_\alpha}} [\dots \quad Z_{l,k|k-1}^{(i,j)} - z_{k|k-1}^{(i,j)} \quad \dots]. \quad (37)$$

观测新息协方差平方根因子 $d_{z,k|k-1}^{(i,j)}$ 由误差矩阵的QR分解获得

$$[q, r] = qr([\text{Err}_{zp}, S_R]^T) \quad d_{z,k|k-1}^{(i,j)} = r^T. \quad (38)$$

观测预测协方差为

$$P_{k|k-1,z}^{(i,j)} = d_{z,k|k-1}^{(i,j)} d_{z,k|k-1}^{(i,j)T}. \quad (39)$$

### e) 计算更新后的路标特征.

定义索引为 $j$ 的路标特征的误差矩阵为

$$\text{Err}_m = \frac{1}{\sqrt{2n_\alpha}} [\dots \quad C_{l,k|k-1}^{m(i,j)} - \mu_{k|k-1}^{(i,j)} \quad \dots]. \quad (40)$$

索引为 $i$ 的机器人位姿和索引为 $j$ 的路标观测交互协方差矩阵为

$$P_{mz}^{(i,j)} = \text{Err}_m \text{Err}_z^T. \quad (41)$$

基于卡尔曼滤波,由观测 $z$ 更新的索引为 $j$ 的路标特征为

$$K_m = P_{mz}^{(i,j)} (d_{z,k|k-1}^{(i,j)} d_{z,k|k-1}^{(i,j)T})^{-1}, \quad (42)$$

$$u_{k|k}^{(i,j)} = u_{k|k-1}^{(i,j)} + K_m(z - z_{k|k-1}^{(i,j)}). \quad (43)$$

路标特征的协方差平方根因子 $d_{k,m}^{(i,j)}$ 是由对误差矩阵 $[\text{Err}_m - K_m \text{Err}_z, K_m S_R]^T$ QR分解得到

$$\begin{cases} [q, r] = qr([\text{Err}_m - K_m \text{Err}_z, K_m S_R]^T), \\ d_{k,m}^{(i,j)} = r^T. \end{cases} \quad (44)$$

更新后的索引为 $j$ 的路标方差为

$$P_{k|k,m}^{(i,j)} = d_{k,m}^{(i,j)} d_{k,m}^{(i,j)T}. \quad (45)$$

将上述计算结果代入式(30)–(32)中,得到更新后的PHD.

### 3) PHD修剪、合并及地图特征提取.

将更新后的高斯分量进行修剪、合并,主要目的是为了降低算法的计算量.高斯分量的修剪主要是将权重小于舍弃门限 $P_{th}$ 的分量丢弃,本文中 $P_{th} = 10^{-5}$ ;合并主要是指将距离小于合并门限的高斯分量进行合并,达到减少更新高斯项数目的目的.

地图特征的估计主要包括两个方面:一方面是估计路标特征数目,另一个方面是对路标特征位置的估计.首先根据更新后的机器人位姿采样粒子的权重,选取权重最大的粒子,从而确定 $i$ 值;第2步,设定特征门限 $T_{\text{feature}}$ ,在 $X_k^{(i)}$ 的条件下,高斯项权重 $\omega_k^{(i,j)} \geq T_{\text{feature}}$ 的高斯项的均值为特征的位置.符合该条件的高斯项的数目为地图特征的数目,文中 $T_{\text{feature}}$ 取值为0.6.

### 3.3 方法小结(Summary of the method)

在本节中,通过分析路径估计过程,可知影响其估计精度的因素主要包括单特征 $m$ 的确定和观测似然 $g_k(z|\bar{m}, X_k)$ 的计算.容积变换方法的引进,避免了EKF方法中由于泰勒展开线性化导致的截断误差的累积,其计算精度可提高到3阶;同时该方法避免了雅可比矩阵的求导,平方根容积变换可以保证协方差计算的正当性和对称性,从而提高了算法整体的稳定性.在路标估计过程中,通过分析更新过程可知,观测预测 $\mathcal{N}(z; z_{k|k-1}^{(i,l)}, P_{k|k-1,z}^{(i,l)})$ 对高斯项权重的分布有重要影响,更新后的高斯项 $\mathcal{N}(m; u_{k|k}^{(i,j)}, P_{k|k,m}^{(i,j)})$ 对路标可能存在的位置分布有重要影响,容积变换和平方根容积卡尔曼滤波的引进通过改善这两个量的计算精度达到改善路标估计精度的目的.

## 4 仿真结果及分析(Simulation results and analysis)

### 4.1 仿真环境及参数(Simulation environment and parameter)

仿真实验在MATLAB平台下运行,地图为120 m × 120 m区域,共有39个路标,仿真环境和结果如图1所示.图中五角星表示实际路标特征,黑色的点表示杂波,实线表示机器人实际运行轨迹,虚线表示机

器人的估计运行轨迹,圆圈表示估计路标.仿真中,移动机器人运动模型采用前轮驱动转向小车模型<sup>[21]</sup>,车载传感器为激光雷达,仿真中噪声均假设为高斯噪声,具体运动模型参数如表1.

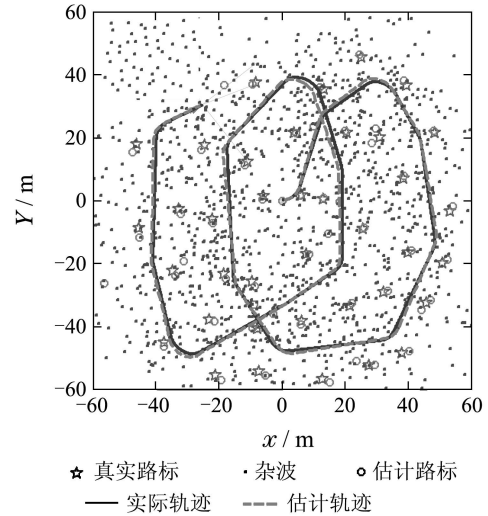


图1 仿真环境及运行结果

Fig. 1 Simulation environment and results

表1 运动模型参数

Table 1 Parameters of motion model

参数	数值	参数	数值
机器人航向速度	3 m/s	传感器扫描视角	180°
控制最大角速度	20 (°)/s	传感器观测距离	30 m
控制速度噪声	0.3 m/s	控制角度噪声	3°
观测距离噪声	0.1 m	观测角度噪声	1°

FoV范围内,杂波服从均值的Poisson分布,特征的检测概率 $P_D = 95\%$ .可以看出在杂波环境下,路径估计及地图特征估计均有良好的效果.

### 4.2 仿真结果及性能评价(Simulation results and performance evaluation)

仿真实验中,将提出算法同文献[13]中提出的RB-PHD-SLAM算法进行对比,从机器人定位误差及地图特征估计两个方面,验证文中算法的有效性.

#### 1) 机器人定位性能评价.

机器人定位性能采用位置均方根误差(root mean squared error, RMSE)<sup>[22]</sup>作为定量评价指标.通过计算各个时间步的机器人位置RMSE,评价两种算法估计性能. RMSE的计算公式为

$$\text{RMSE}_k(x_k, \hat{x}_k) = \sqrt{\frac{1}{\text{MC}} \sum_{i=1}^{\text{MC}} (\|x_k - \hat{x}_k\|_2)^2}, \quad (46)$$

其中: MC表示Monte Carlo仿真次数,  $x_k$ 表示机器人实际位置,  $\hat{x}_k$ 表示滤波器估计机器人的位置.仿真实验中,机器人位姿采样粒子数为5,每种算法执行10次仿真实验,对比结果见图2.

图2中, 通过对比, 提出算法在各时间步的RMSE值小于对比算法, 并且变化幅度更小, 说明提出算法在提高位姿估计精度方面是有效的.

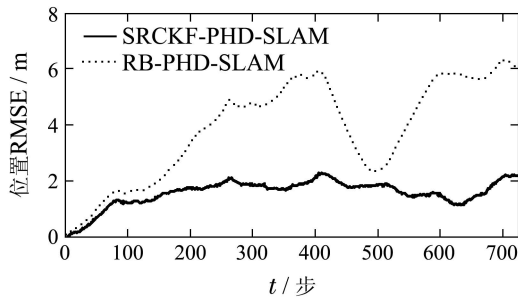


图2 机器人位置RMSE对比

Fig. 2 Comparison of robot path RMSE

## 2) 地图特征估计结果及评价.

在PHD-SLAM算法中, 存在杂波干扰的地图估计效果主要通过两个方面来评价: 一是各个时间步估计地图特征的数目; 二是地图特征的误差.

图3所示的是两种算法情况下, 各时间步地图特征数目与实际数目的对比情况, 短虚线表示随着机器人运动, 在各个时间步探测到的地图特征的实际数目. 通过对比发现, 在开始阶段, 两种算法估计效果相差不多, 随着扫描范围的不断扩大, 提出算法的地图特征估计数目更接近实际数目.

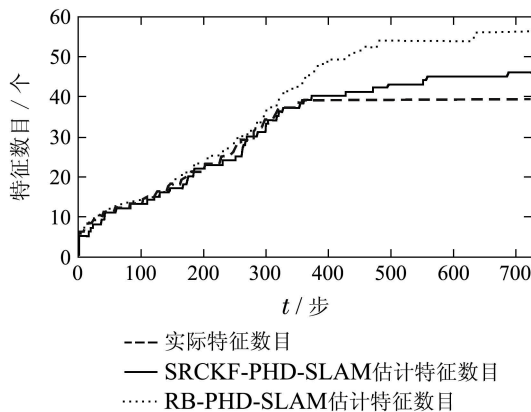


图3 机器人位置RMSE对比

Fig. 3 Comparison of average estimated number of features in the map for each approach

由于在PHD-SLAM算法中, 地图表示为有限集的形式, 地图误差的大小采用最优子模型分配距离(optimal subpattern assignment, OSPA)进行评价. OSPA是用来衡量集合之间差异程度的误差距离, 具体阐述可参考文献[23]. 本实验中, 两种算法各运行10次, 求取各个时间步OSPA误差均值进行对比, 其中截断距离取值为10, 阶数为二阶, 结果如图4所示. 通过对比发现, 随着运行时间增长, 提出算法的估计地图误差要小于对比算法, 算法整体估计性能更为稳定.

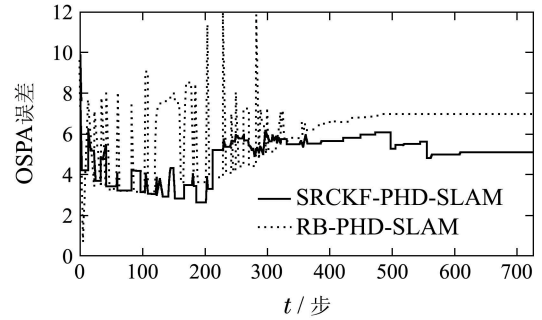


图4 OSPA误差对比

Fig. 4 Comparison of OSPA error

## 3) 计算复杂度分析.

计算复杂度同样是GM-PHD-SLAM算法需要着重考虑的内容之一. 在 $k$ 时刻, RB-PHD-SLAM算法的计算复杂度为 $O(\zeta_k N M_k)$ , 其中:  $\zeta_k$ 为 $k$ 时刻观测数目,  $N$ 为采样粒子数目,  $M_k$ 为视域内路标特征数. 其计算复杂度同MH-FastSLAM相似, 计算的负担要小于JCB-B-EKF-SLAM. 本文提出算法中, 每次更新采用CKF计算更新高斯项, 其计算复杂度为 $O(n_x^2)$ , 其中 $n_x$ 为传递向量的维数. 整体的算法运行过程中, 文中所提算法的负担并不会增加很多, 首先因为 $n_x$ 的维数比较低, 其次整个SLAM算法计算负担主要由杂波强度、位姿采样粒子数等决定. 因此降低算法计算负担的主要研究工作是如何在较少采样粒子条件下获得较好的估计效果; 另一个方面是有效剪切、合并, 降低不必要的高斯项的更新; 或者提高杂波强度在线估计方法, 更准确地估计杂波强度. 不同杂波强度下的实验结果在表2中列出.

表2 运算时间比较

Table 2 Comparison of the computational time

$\lambda_c$	SRCKF-PHD-SLAM/s	RB-PHD-SLAM/s	总运行时间/步
1	69.7603	59.6959	726
2	84.2715	71.0705	726
3	100.4406	85.4459	726

仿真实验中, 计算机硬件配置为主频2.66 GHz, 双核处理器, 2G内存, 实验统计整个运行过程中726个更新步总消耗时间, 进行10次仿真求取平均值. 通过对比发现, 杂波强度越高, 运算消耗时间越多; 在相同杂波强度下, RB-PHD-SLAM算法运算时间比提出算法要短, 结果与复杂度分析基本一致.

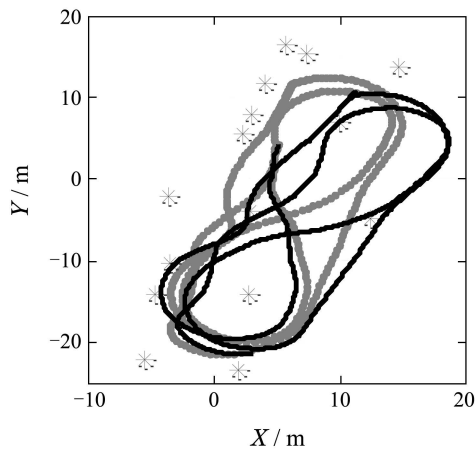
## 5 Car Park数据集及分析(Car Park data set and analysis)

本节实验基于悉尼大学Car Park数据集, 该数据集来自面积约为 $45\text{ m} \times 30\text{ m}$ 的一个停车场内, 是研究SLAM问题常用的数据集之一. 实验过程中, 用于采

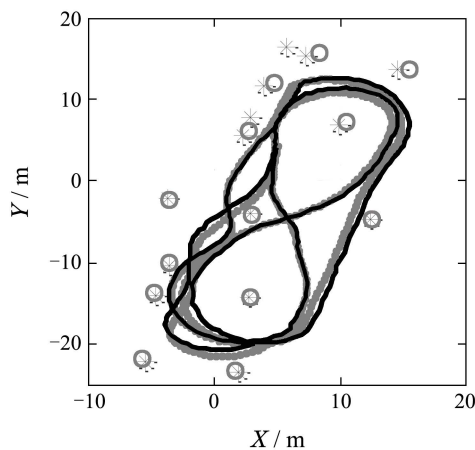


集数据的移动机器人是一辆汽车,配有视角为 $180^\circ$ ,扫描距离为80m的SICK激光雷达;以及里程计和GPS传感器,用于确定实际的运行轨迹并评价SLAM算法的效果.试验场内设置15个标杆作为被识别的特征.图5(a)中显示了机器人运行的GPS轨迹和基于里程计信息的航迹推算轨迹.由于里程计的测量噪声及运动模型不精确等因素,航迹推算轨迹发散,严重偏离GPS轨迹.

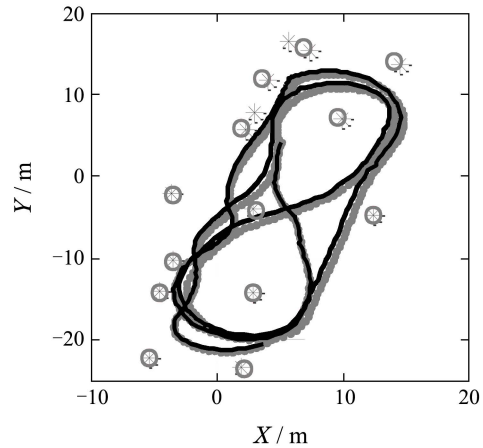
基于该数据集,本文将RB-PHD-SLAM算法同SRCKF-PHD-SLAM算法进行了比较,验证两种算法在真实环境下的运行效果,结果分别在图5(b)和图5(c)中展示.实验中:设定速度控制噪声为 $0.7\text{ m/s}$ ,驾驶角控制噪声为 $5.5^\circ$ ;路标特征测量的角度噪声为 $1^\circ$ ,测距噪声为 $1\text{ m}$ .两种SLAM滤波器均采用10个采样粒子描述机器人的行驶轨迹.从运行效果图5中可以看出,相比于RB-PHD-SLAM算法,本文提出算法得到的运行轨迹与GPS轨迹吻合度更高,说明位姿估计误差更小,其性能优于RB-PHD-SLAM算法.具体的机器人位置均方根误差在图6中进行了定量对比.在图6的RMSE计算过程中,选择GPS的数据为实际位置,同时选取GPS采样时刻或距其最近的里程计采样时刻的估计位置为估计值,每种算法仿真次数为10次.



(a) GPS及航迹推算运行结果



(b) RB-PHD-SLAM算法运行结果



(c) SRCKF-PHD-SLAM算法运行结果

— GPS轨迹 \* 真实路标 — 估计轨迹 ○ 估计路标

图5 Car Park数据集运行效果

Fig. 5 Results of SLAM in Car Park dataset

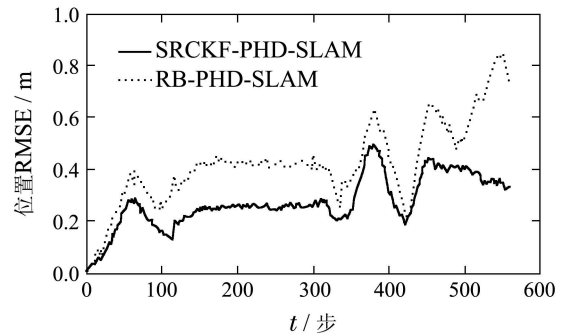


图6 Car Park数据集车辆位置RMSE对比

Fig. 6 Comparison of vehicle position RMSE in Car Park data set

从图6的实验结果可以看出,在各个时间步,提出算法的机器人位置均方根误差要小于对比算法,说明算法在改善机器人位置估计精度方面是有效的.同时,从误差的波动范围来看,开始阶段误差逐步增大,在120采样点到350采样点误差变化相对平稳,由于此阶段机器人运行在地图左侧,观测路标特征相对密集,此阶段提出算法误差要明显小于对比算法.从第350采样点到420采样点,两种算法误差均出现较大波动,误差曲线比较接近,原因是机器人运行至地图右上端,此处观测特征比较稀疏甚至某些时刻无观测特征,位置估计依靠运动模型推算.本节实验从实际环境运行效果看,算法有效地提高了机器人位姿估计性能,说明算法的改进是有实际价值的.

## 6 结论(Conclusions)

针对杂波环境或数据关联模糊环境下的SLAM问题,本文提出了SRCKF-PHD-SLAM算法,该算法将容积变换应用于位姿粒子权重计算中,并在PHD更新过程中采用了SRCKF的方法.该算法不仅避免了求雅可比矩阵的过程,提高了计算精度,并且保证了传导协方差矩阵的对称性和半正定性,从而有效地提高了



算法整体的估计性能. 文章最后通过仿真实验及Car Park数据集, 验证了提出算法在提高位姿估计精度和地图估计性能方面的有效性.

### 参考文献(References):

- [1] 王耀南, 余洪山. 未知环境下移动机器人同步地图创建与定位研究进展 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(1): 57 – 65.  
(WANG Yaonan, YU Hongshan. A review of simultaneous localization and map building algorithms for mobile robots in unknown environment [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(1): 57 – 65.)
- [2] DURRANT W H, BAILEY T. Simultaneous localization and mapping: part I [J]. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2006, 13(2): 99 – 110.
- [3] DURRANT W H, BAILEY T. Simultaneous localization and mapping: part II [J]. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2006, 13(3): 108 – 117.
- [4] MATHERON G. *Random Sets and Integral Geometry* [M]. New York: Wiley, 1975
- [5] 王晓, 韩崇昭, 连峰. 基于随机有限集的目标跟踪方法研究及最新进展 [J]. 工程数学学报, 2012, 29(4): 567 – 578.  
(WANG Xiao, HAN Chongzhao, LIAN Feng. The research and latest development of target tracking based on random finite sets [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2012, 29(4): 567 – 578.)
- [6] GOODMAN I R, MAHLER R, NGUYEN H. *Mathematics of Data Fusion* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [7] MAHLER R. *Statistical Multitarget Information Fusion* [M]. Norwood: Artech House, 2007.
- [8] MAHLER R. Multi-target Bayes filtering via first-order multi-target moments [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(4): 1152 – 1178.
- [9] MAHLER R. PHD filters of higher order in target number [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(4): 1523 – 1543.
- [10] VO B N, SINGH S, DOUCET A. Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, 41(4): 1224 – 1245.
- [11] VO B N, MA W K. The gaussian mixture probability hypothesis density filter [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4091 – 4104.
- [12] 周承兴, 刘贵喜, 侯连勇, 等. 改进的高斯粒子概率假设密度滤波算法 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(7): 1005 – 1008.  
(ZHOU Chengxing, LIU Guixi, HOU Lianyong, et al. Modified Gaussian particle probability hypothesis density filtering algorithm [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(7): 1005 – 1008.)
- [13] MULLANE J, VO B N, MARTIN D. Rao-blackwellised PHD SLAM [C] // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Anchorage: IEEE, 2010, 5: 5410 – 5416.
- [14] MULLANE J, VO B N, MARTIN D. A random-finite-set approach to bayesian SLAM [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2011, 27(2): 268 – 282.
- [15] MULLANE J, VO B N, MARTIN D. A random set formulation for bayesian SLAM [C] // *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Nice: IEEE, 2008, 9: 1043 – 1049.
- [16] MULLANE J, KELLER S, RAO A, et al. X-band radar based SLAM in Singapore's off-shore environment [C] // *International Conference on Control Automation, Robotics and Vision*. Singapore: IEEE, 2010, 12: 398 – 403.
- [17] LEE C S, CLARK D E, SALVI J. SLAM with single cluster PHD filters [C] // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Saint Paul: IEEE, 2012, 5: 2096 – 2101.
- [18] LEE C S, CLARK D E, SALVI J. A random-finite-set approach to bayesian SLAM [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2013, 7(3): 543 – 552.
- [19] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2013, 54(6): 1254 – 1269.
- [20] MONTEMERLO M, THRUN S, SICILIANO B. *FastSLAM: A Scalable Method for the Simultaneous Localization and Mapping Problem in Robotics* [M]. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [21] DISSANAYAKE G, NEWMAN P, CLARK S. A solution to the simultaneous localization and map building (SLAM) problem [J]. *IEEE Transactions on Robotic and Automation*, 2001, 17(3): 229 – 241.
- [22] BAR-SHALOM Y, LI X R. *Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software* [M]. Boston, USA.: Artech House, 1993.
- [23] SCHUHMACHER D, VO B T, VO B N. A consistent metric for performance evaluation of multi-object filters [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 3447 – 3457.

### 作者简介:

闫德立 (1981–), 男, 博士研究生, 研究方向为移动机器人定位及SLAM, E-mail: anndy.yan@gmail.com;

宋永端 (1962–), 男, 教授, 研究方向为仿生智能控制、智能机器人系统、容错控制, E-mail: ydsong@bjtu.edu.cn;

宋宇 (1979–), 男, 讲师, 研究方向为智能机器人技术、计算机视觉, E-mail: songyu@bjtu.edu.cn;

康轶非 (1987–), 男, 博士研究生, 研究方向为智能机器人技术、机器人定位, E-mail: 10111040@bjtu.edu.cn.