

DOI: 10.7641/CTA.2014.30800

基于新型双目标模型的约束优化进化算法

董宁^{1†}, 王宇平²

(1. 西安电子科技大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710071; 2. 西安电子科技大学 计算机科学学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 利用双目标模型求解约束优化问题时, 由于它们的最优解集并不相等, 因此需要增加特殊机制确保求解双目标问题的算法收敛到原问题的最优解. 为克服这一缺点, 本文首先将约束优化问题转化为新的双目标优化模型, 并证明了新模型的最优解集与原问题的最优解集相等. 其次, 以简单的差分进化为搜索算法, 基于多目标Pareto支配关系的非支配排序为选择准则, 提出了求解新模型的差分进化算法. 最后, 用10个标准测试函数的数值试验说明了新模型及求解算法的有效性.

关键词: 约束优化; 进化算法; 差分进化; 双目标模型; Pareto支配

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

Novel bi-objective model-based evolutionary algorithm for constrained optimization problems

DONG Ning^{1†}, WANG Yu-ping²

(1. School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China;

2. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China)

Abstract: When applied to a constrained optimization problem (COP), the optimal solution set of the formulated bi-objective model is not the same as that of COP. Thus, extra mechanisms should be designed to ensure that the algorithms for bi-objective model converge to the optimal solution of COP. To overcome the drawback, a novel bi-objective model is proposed, and the optimal solution set of the novel model is shown to be the same as that of COP. Then, a simple differential evolution (DE) algorithm is presented for solving the novel bi-objective model, in which DE/rand/1/bin is employed as the search engine and Pareto dominance-based non-dominated sorting is used as the selection criterion. Numerical experiments for 10 standard test functions with different characteristics have been carried out, and the results show the effectiveness of the novel model and the proposed algorithm.

Key words: constrained optimization; evolutionary algorithm; differential evolution; bi-objective model; Pareto dominance

1 引言(Introduction)

约束优化问题是科学技术和工程领域经常出现的一类优化问题. 不失一般性, 约束优化问题(constrained optimization problem, COP)可描述为

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, q, \\ h_i(\mathbf{x}) = 0, i = q + 1, \dots, m, \\ \mathbf{x} \in D, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是决策向量, $f(\mathbf{x})$ 是目标函数, $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | l_j \leq x_j \leq u_j, l_j, u_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n\}$ 是搜索空间, $g_i(\mathbf{x}) \leq 0 (i = 1, 2, \dots, q)$ 是不等式约束, $h_i(\mathbf{x}) = 0 (i = q + 1, \dots, m)$ 是等式约束, $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in D, g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, q; h_i(\mathbf{x}) =$

$0, i = q + 1, \dots, m\}$ 称为问题(1)的可行域, 可行域中的点称为可行解.

由于约束条件影响, 问题(1)是优化领域一类很难处理的问题. 进化算法(evolutionary algorithm, EA)是模拟自然界生物进化过程的一种基于群体的搜索算法, 它能有效解决复杂问题, 因此适合求解问题(1), 近年来已有许多优秀的约束优化进化算法(constrained optimization EAs, COEAs)^[1-7]. 用进化算法求解约束优化问题, 影响算法性能的关键因素有两个^[4]: 一是进化算法的搜索机制, 二是对约束的处理技术. 对于进化算法的搜索机制: 由于差分进化(differential evolution, DE)^[8]算法采用实数编码, 操作简单, 易于实现, 且在多次算法竞赛中表现出优异的性能^[5-6], 被广泛用于求解各类优化问题^[5-7, 9-10], 因此本文采

收稿日期: 2013-07-30; 录用日期: 2014-01-19.

[†]通信作者. E-mail: dongning@snnu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61272119).

用DE作为搜索算法. 在处理问题的约束条件时, 常用的约束处理方法是采用罚函数法^[11-12]将约束优化问题转化为无约束优化问题. 由于罚参数取值对算法性能影响很大, 且确定罚参数的最优取值本身就是一个困难的优化问题^[1], 因此基于罚函数法处理约束条件的算法性能和应用受到限制. 近年来, 将原问题的目标函数作为一个目标, 定义个体违反所有约束条件的总量作为另一个目标, 可将约束优化问题转化为双目标优化问题^[1-2, 13-14], 但是转化的双目标问题与原约束优化问题的最优解集并不相等. 双目标优化问题是要找到在整个Pareto前沿上均匀分布的一组代表解集, 而约束优化问题是要找到满足所有约束条件且目标函数值最优的一个解, 该最优解位于Pareto前沿上的一个端点(该点称为Pareto前沿的一个极端解). 因此, 转化的双目标模型是有偏好的(要偏好最优解在Pareto前沿上所处的一端), 在求解时需要增加特殊机制以保证算法能够收敛到该极端解. 随机排序算法(stochastic ranking, SR)算法^[1]采用随机方法以一定概率 p_f 选择目标函数或约束违反函数作为比较准则, 但SR算法的性能受该值影响. 作者通过大量数值实验证明, 当 $p_f = 0.45$ 时, 算法的结果最好, 这也说明SR算法的选择策略是偏好于采用约束违反函数为比较准则引导种群进化的. 适应性均衡模型进化策略(adaptive tradeoff model with evolutionary strategy, ATMES)算法^[2]将种群进化分为3个阶段, 该算法只在第1阶段, 即种群中只有不可行解时采用基于Pareto支配关系的个体比较策略, 引导种群进化. 在这一阶段, 为了使种群快速靠近或者进入可行域, 在使用Pareto支配关系比较个体时, 每次只将种群的非支配解中约束违反值小的前半个体选择进入下一代, 而另一半非支配解和其余的个体重新进行非支配排序, 重复该过程直到达到种群规模, 这一选择方法在采用Pareto支配关系的基础上额外增加了对于约束违反值小的解的偏好策略来满足问题的特点. 文献[13]分两个阶段用不同方法处理约束. 在第1阶段, 种群中没有可行解, 将原问题看作是约束满意问题, 完全不考虑目标函数, 只用约束违反函数引导搜索快速进入可行域. 当种群中出现可行解时, 算法进入第2阶段, 此时采用多目标技术处理约束, 并用相应的Pareto支配关系作为比较策略引导种群进化. 这也说明单纯采用多目标的约束处理技术不能有效满足问题的偏好. 多目标优化与差分进化结合(combining multiobjective optimization and DE, CMODE)算法^[14]采用差分进化算法求解转化的双目标优化问题. 该算法在设计评价个体优劣的适应度函数时, 不仅要考虑个体之间的Pareto支配关系排序, 而且还要考虑个体间约束违反值的大小排序来满足问题的偏好.

为克服已有双目标优化模型求解问题(1)需要考虑

问题偏好的缺点, 本文将问题(1)转化为新型的无偏好双目标优化模型, 并证明了新模型与COP(1)的最优解集相等, 因此在求解过程中只需要根据多目标优化的一般方法求解新模型, 不需要引入额外机制也能保证算法最终收敛到COP(1)的最优解.

2 基本概念和相关工作(Concepts and related work)

2.1 双目标优化问题及概念(Bi-objective optimization problem and concepts)

考虑含两个目标函数的多目标优化问题

$$\begin{cases} \min \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})), \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in D, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ 称为决策向量, D 为决策空间, 决策空间 D 在映射 \mathbf{F} 下的像空间称为目标空间. 下面给出双目标优化问题的基本概念.

定义1 Pareto支配. 设 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 是两个决策向量, 称 \mathbf{x}_i Pareto支配 \mathbf{x}_j (记作 $\mathbf{x}_i \prec \mathbf{x}_j$), 当且仅当 $\forall k \in \{1, 2\}$, 都有 $f_k(\mathbf{x}_i) \leq f_k(\mathbf{x}_j)$, 且 $\exists s \in \{1, 2\}$, 使得 $f_s(\mathbf{x}_i) < f_s(\mathbf{x}_j)$.

定义2 Pareto最优解. 向量 $\mathbf{x} \in D$ 称为双目标问题(2)的Pareto最优解, 当且仅当 $\neg \exists \mathbf{x}' \in D$, 使得 $\mathbf{x}' \prec \mathbf{x}$.

定义3 Pareto最优解集. 双目标问题(2)的Pareto最优解集合称为Pareto最优解集(Pareto set, PS), 则 $\text{PS} = \{\mathbf{x} \in D | \neg \exists \mathbf{x}' \in D, \mathbf{x}' \prec \mathbf{x}\}$.

定义4 Pareto前沿. 对双目标优化问题(2), Pareto最优解集PS在目标空间中的像集称为Pareto前沿(Pareto front, PF), 则 $\text{PF} = \{\mathbf{F}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \text{PS}\}$.

2.2 相关工作(Related work)

利用罚函数思想将COP(1)转化为有两个目标的多目标优化问题是近年来处理约束的有效方法^[1-2, 14]. 首先定义约束违反函数, 令

$$G_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \max\{0, g_i(\mathbf{x})\}, & 1 \leq i \leq q, \\ |h_i(\mathbf{x})|, & q+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

显然 $G_i(\mathbf{x}) \geq 0$. 若 $G_i(\mathbf{x}) = 0$, 则 \mathbf{x} 满足第 i 个约束条件, 若 $G_i(\mathbf{x}) > 0$, 则 $G_i(\mathbf{x})$ 表示 \mathbf{x} 违反第 i 个约束条件的程度. 定义约束违反函数 $G(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m G_i(\mathbf{x})$, 它表示个体 \mathbf{x} 违反所有约束条件的程度, 同时也反映个体 \mathbf{x} 离可行域的距离, 显然 $G(\mathbf{x}) \geq 0$. 特别地, 当 \mathbf{x} 是不可行解时, $G(\mathbf{x}) > 0$; 当 \mathbf{x} 为可行解时, $G(\mathbf{x}) = 0$. 将原目标函数 $f(\mathbf{x})$ 作为一个目标, 约束违反函数 $G(\mathbf{x})$ 作为另一个目标, 则COP(1)转化为如下双目标优化问题:

$$\begin{cases} \min (f(\mathbf{x}), G(\mathbf{x})), \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in D. \end{cases} \quad (3)$$

将COP(1)转化为双目标优化模型(3), 但它们的最优解集有本质的区别. COP(1)要找到可行最优解, 即满足约束条件($G(\mathbf{x}) = 0$), 且 $f(\mathbf{x})$ 达到最小值的一个解, 而双目标问题(3)是要找到在PF上均匀分布的一组代表解集. 如图1所示, COP(1)的最优解是双目标问题(3)的PF与约束优化问题(1)的可行域的交点 $f(\mathbf{x}^*)$, 即PF上处于 $G(\mathbf{x}) = 0$ 的极端解. 因此转化的问题(3)是有偏好的双目标问题, 求解过程中应偏好于离极端解 $f(\mathbf{x}^*)$ 近的解.

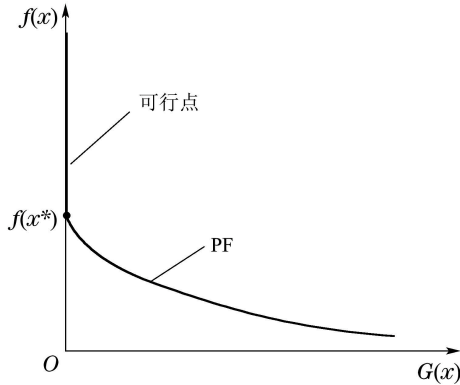


图 1 约束优化问题(1)与双目标问题(3)最优解的关系
Fig. 1 The relationship between optimal solutions of COP (1) and bi-objective problem (3)

3 基于新型双目标模型的约束优化进化算法 (A novel bi-objective model-based COEA)

由于已有的双目标模型(3)是有偏好的, 在求解时必须引入特殊机制使算法在求解时符合问题的偏好, 这使得算法设计需要考虑问题的特殊性. 而针对多目标优化问题的求解算法认为所有目标同样重要, 没有考虑问题的偏好, 不适合求解问题(3), 因此本节提出了新的无偏好双目标模型.

3.1 新型无偏好双目标模型(A novel bi-objective model without preference)

由于问题(1)是要找到满足约束条件的最优解, 因此约束满足是首要条件, 求解时应适当偏好于约束满足, 即 $G(\mathbf{x}) = 0$. 本文提出的新型双目标模型如下:

$$\begin{cases} \min (\Omega_1(\mathbf{x}), \Omega_2(\mathbf{x})), \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in D, \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\Omega_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \varepsilon G(\mathbf{x})$, $\Omega_2(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$ 是控制参数, 它反映了对约束条件的偏好程度, ε 越大, 对约束满意偏好程度越强. 对问题(1), 约束满意是首要任务, 因此应使 $\varepsilon \rightarrow +\infty$ 保证新模型(4)的解满足约束条件. 新模型(4)与COP(1)的最优解之间关系如下.

定理 1 当 $\varepsilon \rightarrow +\infty$ 时, \mathbf{x}^* 是问题(4)的Pareto最优解当且仅当 \mathbf{x}^* 是COP(1)的最优解.

证 “ \Leftarrow ”: 设 \mathbf{x}^* 是COP(1)的最优解, 则其约束违反函数值 $G(\mathbf{x}^*) = 0$. $\forall \mathbf{x} \in D$, 分两种情况(\mathbf{x} 为可行解和不可行解)证明:

i) \mathbf{x} 可行, 即 $G(\mathbf{x}) = 0$. 若 \mathbf{x} 不是式(1)的最优解, 则 $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$. 因此 $\forall \varepsilon > 0$, $f(\mathbf{x}^*) + \varepsilon G(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}) + \varepsilon G(\mathbf{x})$, 即 $\Omega_1(\mathbf{x}^*) < \Omega_1(\mathbf{x})$. 又因 $\Omega_2(\mathbf{x}^*) = \Omega_2(\mathbf{x}) = 0$, 所以 $\mathbf{x}^* \prec \mathbf{x}$. 若 \mathbf{x} 是COP(1)的最优解, 则 $f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x})$, 且 $G(\mathbf{x}^*) = G(\mathbf{x}) = 0$, 即在目标空间中 \mathbf{x}^* 和 \mathbf{x} 是同一点, 则 \mathbf{x} 不支配 \mathbf{x}^* .

ii) \mathbf{x} 不可行, 即 $G(\mathbf{x}) > 0$, 则 $\Omega_2(\mathbf{x}^*) < \Omega_2(\mathbf{x})$. 若 $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $f(\mathbf{x}^*) + \varepsilon G(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}) + \varepsilon G(\mathbf{x})$, 即 $\Omega_1(\mathbf{x}^*) < \Omega_1(\mathbf{x})$, 所以 $\mathbf{x}^* \prec \mathbf{x}$; 若 $f(\mathbf{x}^*) > f(\mathbf{x})$, 令 $\varepsilon > (f(\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x})) / (G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}^*))$, 则 $f(\mathbf{x}^*) + \varepsilon G(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}) + \varepsilon G(\mathbf{x})$, 即 $\Omega_1(\mathbf{x}^*) < \Omega_1(\mathbf{x})$. 因此 $\mathbf{x}^* \prec \mathbf{x}$.

综上所述, $\forall \mathbf{x} \in D$, 当 \mathbf{x} 不是COP(1)的最优解时, 有 $\mathbf{x}^* \prec \mathbf{x}$; 当 \mathbf{x} 是式(1)的最优解时, \mathbf{x} 不支配 \mathbf{x}^* , 因此当 $\varepsilon \rightarrow +\infty$, \mathbf{x}^* 是问题(4)的Pareto最优解.

“ \Rightarrow ”: 设 \mathbf{x}^* 是问题(4)当 $\varepsilon \rightarrow +\infty$ 的Pareto最优解, 则当 $\varepsilon \rightarrow +\infty$ 时, $\neg \exists \mathbf{x} \in D$, 使得下式成立:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) + \varepsilon G(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*) + \varepsilon G(\mathbf{x}^*), \\ G(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{x}^*), \end{cases} \quad (5)$$

且式(5)中至少有一个不等号严格成立.

假设 \mathbf{x}^* 不是COP(1)的最优解, 则 \mathbf{x}^* 是可行解但目标函数值不是最优, 或者 \mathbf{x}^* 是不可行解, 即 $G(\mathbf{x}^*) = 0$ 或 $G(\mathbf{x}^*) > 0$. 不妨设 $\tilde{\mathbf{x}} \in D$ 是COP(1)的最优解, 则 $G(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$, 且 $f(\tilde{\mathbf{x}})$ 在可行域内达到最小.

若 $G(\mathbf{x}^*) = 0$, 则 $f(\tilde{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}^*)$, 且 $G(\tilde{\mathbf{x}}) = G(\mathbf{x}^*) = 0$, 因此 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $f(\tilde{\mathbf{x}}) + \varepsilon G(\tilde{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}^*) + \varepsilon G(\mathbf{x}^*)$. 这与式(5)不成立矛盾.

若 $G(\mathbf{x}^*) > 0$, 则 $G(\tilde{\mathbf{x}}) < G(\mathbf{x}^*)$. 进一步, 若 $f(\tilde{\mathbf{x}}) > f(\mathbf{x}^*)$, 则当 $\varepsilon > (f(\tilde{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}^*)) / (G(\mathbf{x}^*) - G(\tilde{\mathbf{x}}))$ 时, 有 $f(\tilde{\mathbf{x}}) + \varepsilon G(\tilde{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}^*) + \varepsilon G(\mathbf{x}^*)$; 若 $f(\tilde{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}^*)$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $f(\tilde{\mathbf{x}}) + \varepsilon G(\tilde{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}^*) + \varepsilon G(\mathbf{x}^*)$ 成立. 上述结论与式(5)不成立矛盾. 从而 \mathbf{x}^* 是COP(1)的最优解. 证毕.

对新的双目标模型(4), $\Omega_2(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$ 即为约束违反函数. $\Omega_2(\mathbf{x})$ 越大, \mathbf{x} 离可行域越远, 反之越近. $\Omega_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \varepsilon G(\mathbf{x})$ 是个体 \mathbf{x} 的目标函数值和约束违反函数值的加权组合, 可看作用 \mathbf{x} 经加权后的约束违反量惩罚目标函数值. 特别地, 当 $G(\mathbf{x}) = 0$, 即 \mathbf{x} 是可行解时, 对其目标函数值惩罚量为0, 即不惩罚可行解的目标函数值; 当 $G(\mathbf{x}) > 0$, 即 \mathbf{x} 是不可行解时, 对其目标函数值的惩罚量为 $\varepsilon G(\mathbf{x})$, 且 \mathbf{x} 离可行域越远, 对其目标函数值的惩罚量越大, 反之越小. 加权系数 ε 控制对不可行解的惩罚力度. ε 越大, 对不可行解的目标函数值惩罚力度越大, 在比较时, 对约束满意的偏好程度越强. 将COP(1)转化为新的双目标模型(4)时, 第1个目标函数 $\Omega_1(\mathbf{x})$ 中已经融入了对约束满意的偏好, 且偏好程度可由控制参数 ε 的大小来调节,

因此新模型(4)是无偏好的双目标问题。

根据定理1, COP(1)和 $\varepsilon \rightarrow +\infty$ 时双目标问题(4)的最优解集相等, 且问题(4)是无偏好双目标模型, 可通过一般的多目标算法求解, 即根据多目标Pareto支配关系引导算法进化. 在求解过程中, 适当调节参数 ε , 使其逐步增大直至 $\varepsilon \rightarrow +\infty$, 则能保证算法收敛到COP(1)的最优解。

3.2 求解新型双目标模型的差分进化算法(DE for solving the novel bi-objective model)

由于差分进化算法简单易于操作, 且在多次算法竞赛中表现出的优异性能, 本节采用差分进化的基本格式DE/rand/1/bin^[8]作为算法的搜索机制, 提出求解新模型的DE算法:

算法1 新型双目标模型的差分进化算法(novel bi-objective model-based DE, NBMDE)

步骤1 初始化. 在搜索空间 D 随机产生 NP 个个体组成初始群体 $P^{(0)} = \{\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_{NP}^0\}$, 给定模型参数初值 $\varepsilon(0) = 1$, 令 $t = 0$.

步骤2 DE进化. 对 $P^{(t)}$ 中每个个体 $\mathbf{x}_i^t = (x_{i,1}^t, x_{i,2}^t, \dots, x_{i,n}^t)$ ($i = 1, 2, \dots, NP$), 采用“rand/1”变异和“bin”交叉生成后代 $\mathbf{u}_i^t = (u_{i,1}^t, u_{i,2}^t, \dots, u_{i,n}^t)$:

$$u_{i,j}^t = \begin{cases} x_{r1,j}^t + F(x_{r2,j}^t - x_{r3,j}^t), & \text{rand} < Cr \text{ 或 } j = j_{\text{rand}}, \\ x_{i,j}^t, & \text{其他,} \end{cases} \quad (6)$$

其中: $j = 1, \dots, n$; $r1, r2, r3 \in \{1, 2, \dots, NP\} \setminus \{i\}$ 随机选择且互不相同, $F \in [0, 2]$ 是变异参数, 控制差向量 $(\mathbf{x}_{r2}^t - \mathbf{x}_{r3}^t)$ 的比例, $Cr \in [0, 1]$ 是交叉概率, $\text{rand} \in [0, 1]$ 随机产生, $j_{\text{rand}} \in \{1, 2, \dots, n\}$ 任意选择, 它保证后代 \mathbf{u}_i^t 至少在一个基因位与父代 \mathbf{x}_i^t 不同, 所有后代组成后代集 $Q^{(t)} = \{\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t, \dots, \mathbf{u}_{NP}^t\}$.

步骤3 选择. 采用Pareto支配关系的排序方法选择进入下一代的个体. 令 $H^{(t)} = P^{(t)} \cup Q^{(t)}$, 用Pareto支配关系对 $H^{(t)}$ 进行非支配分层, 逐层选择其

中的非支配个体进入下一代种群 $P^{(t+1)}$, 直至达到其规模: 首先找到 $H^{(t)}$ 的所有非支配解, 将其存入 $P^{(t+1)}$, 并从 $H^{(t)}$ 中删除; 若 $P^{(t+1)}$ 没有达到预定规模, 则再找出 $H^{(t)}$ 中的非支配解, 将其存入 $P^{(t+1)}$, 重复上述过程直至达到 $P^{(t+1)}$ 的预定规模. 若某一次将 $H^{(t)}$ 的非支配解加入 $P^{(t+1)}$ 时超过预定规模, 则将这些个体按照约束违反值由小到大排序, 选择需要数目的前若干个体进入 $P^{(t+1)}$.

步骤4 更新参数. 令 $\varepsilon(t+1) = \rho\varepsilon(t)$, 其中 $\rho > 1$ 是比例因子, 控制对约束偏好程度的扩大比例。

步骤5 判断停止准则: 若满足停止条件, 输出最优可行解; 否则, 令 $t = t + 1$, 转步骤2。

4 数值实验(Numerical experiments)

4.1 测试函数及参数设置(Test functions and parameters setting)

为了测试本文提出的新模型及算法的性能, 选取文献[1-2]中的10个标准测试函数进行数值试验. 数值实验中, 参数设置如下: 种群规模 $NP = 200$, 变异控制参数 F 在 $[0.5, 0.6]$ 随机产生, 交叉概率 Cr 在 $[0.9, 0.95]$ 上随机产生, DE的最大进化代数1200代, 故函数评估次数为240000. 对等式约束 $h_i(\mathbf{x}) = 0$, 通常将其转化为不等式 $|h_i(\mathbf{x})| - \delta \leq 0$, 其中 δ 是等式约束违反的容忍值, 一般取很小的正数, 实验中 $\delta = 0.0001$. 对所有测试函数, 在相同条件下独立运行30次, 记录其最好结果(Best), 中间结果(Median), 平均结果(Mean), 最差结果(Worst)和结果的标准差(Std.). 表1列出了本文算法NBMDE对10个测试函数的实验结果。

为了对比, 将本文算法NBMDE的运行结果与其他3个国内外较好的约束优化算法SR^[1], ATMES^[2]和自适应多样性差分进化算法(adaptive diversity DE, A-DDE)^[3]的实验结果进行比较. 表2列出了4种算法的比较结果, 其中3种比较算法的结果来自相关文献, NA表示原文中没有提供结果。

表1 NBMDE算法对10个标准测试函数独立运行30次的结果

Table 1 Experimental results obtained by NBMDE for 10 test instances with 30 independent runs

函数	最优解	运行结果				
		Best	Median	Mean	Worst	Std.
g01	-15.000	-15.000	-15.000	-15.000	-15.000	8.5E-14
g02	-0.803619	-0.803593	-0.803557	-0.803549	-0.803435	3.5E-05
g03	-1.0005	-1.0003	-1.00003	-1.00001	-0.9996	2.1E-04
g05	5126.4967	5126.4967	5126.4967	5126.4967	5126.4967	9.3E-13
g06	-6961.814	-6961.814	-6961.814	-6961.814	-6961.814	1.9E-12
g07	24.306	24.306	24.306	24.306	24.306	1.6E-06
g09	680.630	680.630	680.630	680.630	680.630	4.4E-13
g10	7049.248	7049.248	7049.250	7049.250	7049.253	1.2E-03
g11	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	1.1E-16
g12	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	0

表 2 4 个算法(NBMDE, SR^[1], ATMES^[2]和A-DDE^[3])对 10 个测试函数的实验结果比较
 Table 2 Comparison results of 4 algorithms (NBMDE, SR^[1], ATMES^[2] and A-DDE^[3]) for 10 test instances

函数/最优解	统计结果	SR	ATMES	A-DDE	NBMDE
g01/ -15.000	Best	-15.000	-15.000	-15.000	-15.000
	Median	-15.000	-15.000	-15.000	-15.000
	Mean	-15.000	-15.000	NA	-15.000
	Worst	-15.000	-15.000	-15.000	-15.000
	Std.	0.0E + 00	1.6E - 14	7.0E - 06	8.5E - 14
g02/ -0.803619	Best	-0.803515	-0.803388	-0.803605	-0.803593
	Median	-0.785800	-0.792420	-0.777368	-0.803557
	Mean	-0.781975	-0.790148	NA	-0.803549
	Worst	-0.726288	-0.756986	0.609853	-0.803435
	Std.	2.0E - 02	1.3E - 02	3.7E - 02	3.5E - 05
g03/ -1.0005	Best	-1.000	-1.000	-1.000	-1.0003
	Median	-1.000	-1.000	-1.000	-1.00003
	Mean	-1.000	-1.000	NA	-1.00001
	Worst	-1.000	-1.000	-1.000	-0.9996
	Std.	1.9E - 04	5.9E - 05	9.3E - 12	2.1E - 04
g05/ 5126.4967	Best	5126.497	5126.498	5126.497	5126.4967
	Median	5127.372	5126.776	5126.497	5126.4967
	Mean	5128.881	5127.648	NA	5126.4967
	Worst	5142.472	5135.256	5126.497	5126.4967
	Std.	3.5E + 00	1.8E + 00	2.1E - 11	9.3E - 13
g06/ -6961.814	Best	-6961.814	-6961.814	-6961.814	-6961.814
	Median	-6961.814	-6961.814	-6961.814	-6961.814
	Mean	-6875.940	-6961.814	NA	-6961.814
	Worst	-6350.262	-6961.814	-6961.814	-6961.814
	Std.	1.6E + 02	4.6E - 12	2.1E - 12	1.9E - 12
g07/ 24.306	Best	24.307	24.306	24.306	24.306
	Median	24.357	24.313	24.306	24.306
	Mean	24.374	24.316	NA	24.306
	Worst	24.642	24.359	24.306	24.306
	Std.	6.6E - 02	1.1E - 02	4.2E - 05	1.6E - 06
g09/ 680.630	Best	680.630	680.630	680.63	680.630
	Median	680.641	680.633	680.63	680.630
	Mean	680.656	680.639	NA	680.630
	Worst	680.763	680.673	680.63	680.630
	Std.	3.4E - 02	1.0E - 02	1.2E - 10	4.4E - 13
g10/ 7049.248	Best	7054.316	7052.253	7049.248	7049.248
	Median	7372.613	7215.357	7049.248	7049.250
	Mean	7559.192	7250.437	NA	7049.250
	Worst	8835.655	7560.224	7049.248	7049.253
	Std.	5.3E + 02	1.2E + 02	3.2E - 04	1.2E - 03
g11/ 0.7499	Best	0.750	0.75	0.75	0.7499
	Median	0.750	0.75	0.75	0.7499
	Mean	0.750	0.75	NA	0.7499
	Worst	0.750	0.75	0.75	0.7499
	Std.	8.0E - 05	3.4E - 04	5.3E - 15	1.1E - 16
g12/ -1.000	Best	-1.000000	-1.000	-1.000	-1
	Median	-1.000000	-1.000	-1.000	-1
	Mean	-1.000000	-1.000	NA	-1
	Worst	-1.000000	-0.994	-1.000	-1
	Std.	0.0E + 00	1.0E - 03	4.1E - 11	0

4.2 实验结果分析及算法性能评价(Analysis on experimental results and evaluation)

从表1可以看出,除g02和g03外,本文算法NBMDE找到了其他8个测试函数的最优解.对于g02和g03,本文算法得到的最好结果与最优解非常接近.从表2可以看出,对于高维多峰测试函数g02,4种算法均没有找到最优解,其中A-DDE找到的最好结果最优,本文算法稍劣于它,ATMES算法的最好结果最差,但本文算法得到的中间结果、平均结果和最差结果远远优于其他3种算法,且都与最优解非常接近.从30次运行的整体结果来看,本文算法的鲁棒性最好,而其他3种算法偏差较大.对于g03,本文算法虽然没有找到最优解-1.0005,但是本文算法找到的最好结果(-1.0003)与最优解非常接近,且优于其他3种算法的最好结果(-1.000).对于g10,本文算法找到了最优解,但是中间结果,平均结果和最差结果稍劣于最优解.SR和AMES在所有30次运行中均没有找到最优解,A-DDE算法在30次运行中都找到了全局最优解.因此对于g10,本文算法虽然稍劣于A-DDE,但远远优于SR和ATMES.对于g11,3种比较算法均没有找到全局最优解,而本文算法在所有30次运行中均找到了最优解.进一步分析可得出,对于所有测试函数,本文算法的整体结果较优.

从找到最优解的函数个数来看,对10个测试函数,本文算法找到了其中8个函数的最优解(g01, g05, g06, g07, g08, g09, g11和g12),SR算法仅找到4个函数的最优解(g01, g06, g09和g12),ATMES算法找到5个函数的最优解(g01, g06, g07, g0和g12),A-DDE算法找到6个函数的最优解(g01, g06, g07, g09, g10和g12).因此本文算法的寻优能力更强.

从函数评估次数来看,SR算法为350 000次,在4种算法中运算次数最多.ATMES算法为240 000次,与本文算法相同.而A-DDE算法为180 000次,在所有算法中次数最少.

进一步,为验证本文算法的有效性,采用假设检验验证本文算法NBMDE与ATMES算法差异的显著性(本文算法与ATMES算法的函数值评估次数相同).在两种算法差异显著性的假设检验中,需要用到算法独立运行30次的结果,笔者从作者Wang Y的个人主页(<http://ist.csu.edu.cn/YongWang.htm>)中下载相应程序,并记录30次独立运行得到的数据进行假设检验.表3给出了对每一个测试函数,两种算法差异显著性的t-检验结果.

表3中,黑体数字表示两种算法得到的最好均值,

上标^a表示采用自由度为 $30 + 30 - 2 = 58$,显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的t-双边检验时,两种算法的差异是显著的.从t-检验结果来看,本文算法NBMDE在8个测试函数(g01, g02, g03, g05, g07, g09, g10和g11)的实验结果与ATMES算法相比差异显著,其中对7个测试函数(g02, g03, g05, g07, g09, g10和g11)的实验结果明显优于ATMES算法,仅在一个测试函数(g01)的结果劣于ATMES算法.对于其他两个测试函数(g06和g12),两种算法无明显差异.

表3 本文算法NBMDE与ATMES^[2]差异显著性检验结果

Table 3 Results of the t-test between algorithms NBMDE and ATMES^[2] for 10 test instances

函数/最优解	ATMES均值	NBMDE均值	t-检验
g01/-15.000	-15.000	-15.000	8.218 ^a
g02/-0.803619	-0.785331	-0.803549	-7.304 ^a
g03/-1.0005	-0.9999	-1.00001	-2.054 ^a
g05/5126.4967	5127.3588	5126.4967	-2.967 ^a
g06/-6961.814	-6961.814	-6961.814	0.0
g07/24.306	24.313	24.306	-3.601 ^a
g09/680.630	680.636	680.630	-4.891 ^a
g10/7049.248	7271.992	7049.250	-8.997 ^a
g11/0.7499	0.7502	0.7499	-20.688 ^a
g12/-1.000	-0.9998	-1	-1

综合上述分析,与SR算法和ATMES算法相比,无论从找到最优解的问题的数量,还是从算法的运行效率,本文算法都有明显优势.与A-DDE算法相比,尽管本文算法NBMDE的函数评估次数稍多于A-DDE,但是从找到最优解的问题的数量及算法的稳定性来看,本文算法都要优于A-DDE算法.因此,本文提出NBMDE算法的寻优能力及稳定性优于3种比较算法.

5 结论(Conclusions)

将约束优化问题转化为新型的无偏好双目标优化问题,克服了已有双目标模型求解时需要考虑问题偏好的缺点,并在理论上证明了新模型与原问题的最优解集相等.用简单的DE/rand/1/bin作为算法的搜索机制,基于多目标Pareto支配关系的非支配排序为选择准则,提出了求解新模型的差分进化算法.对10个标准测试函数的数值实验结果表明本文提出的新模型和求解算法是有效的.此外,本文只采用了简单的DE/rand/1/bin作为算法的搜索机制,该搜索机制在进化初期具有较强的全局搜索能力,而它的局部搜索能力较弱,因而可在算法中引入适

当的局部搜索算子以进一步提高算法的整体性能.

参考文献(References):

- [1] RUNARSSON P T, YAO X. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2000, 4(3): 284 – 294.
- [2] WANG Y, CAI Z. An adaptive tradeoff model for constrained evolutionary optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2008, 12(1): 80 – 92.
- [3] MEZURA-MONTES E, PALOMEQUE-ORTIZ A G. Parameter control in differential evolution for constrained optimization [C] // *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Trondheim: IEEE, 2009: 1375 – 1382.
- [4] WANG Y, CAI Z. A dynamica hybrid framework for constrained evolutionary optimization [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2012, 42(1): 203 – 216.
- [5] TAKAHAMA T, SAKAI S. Constrained optimization by the ε constrained differential evolution with an archive and gradient-based mutation [C] // *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Barcelona: IEEE, 2010: 1680 – 1688.
- [6] TANABE R, FUKUNAGA A. Evaluating the performance of SHADE on CEC 2013 benchmark problems [C] // *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Cancun: IEEE, 2013: 1952 – 1959.
- [7] DEB K, DATTA R. A bi-objective constrained optimization algorithm using a hybrid evolutionary and penalty function approach [J]. *Engineering Optimization*, 2013, 45(5): 503 – 527.
- [8] STORN R, PRICE K. *Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces* [R]. Berkeley: International Computer Science Institute, 1995.
- [9] 叶洪涛, 罗飞, 许玉格. 解决多目标优化问题的差分进化算法研究进展 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(7): 922 – 928.
(YE Hongtao, LUO Fei, XU Yuge. Differential evolution for solving multi-objective optimization problems: a survey of the state-of-the-art [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(7): 922 – 928.)
- [10] ISLAM S M, DAS S, GHOSH S, et al. An adaptive differential evolution algorithm with novel mutation and crossover strategies for global numerical optimization [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2012, 42(2): 482 – 500.
- [11] LIN C H. A rough penalty genetic algorithm for constrained optimization [J]. *Information Sciences*, 2013, 241(1): 119 – 137.
- [12] TESSEMA B, YEN G G. An adaptive penalty formulation for constrained evolutionary optimization [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2009, 39(3): 565 – 578.
- [13] VENKATRAMAN S, YEN G G. A generic framework for constrained optimization using genetic algorithms [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2005, 9(4): 424 – 435.
- [14] WANG Y, CAI Z. Combining multiobjective optimization with differential evolution to solve constrained optimization problems [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2012, 16(1): 117 – 134.

作者简介:

董宁 (1980–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为进化算法、多目标优化、最优化理论与方法, E-mail: dongning@snnu.edu.cn;

王宇平 (1961–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为进化算法、多目标优化、数据挖掘, E-mail: ywang@xidian.edu.cn.