

运用区间算法的约束非线性系统鲁棒模型预测控制

刘刚¹, 秦伟伟^{2†}, 刘洁瑜², 汪立新²

(1. 第二炮兵工程大学 空间工程系, 陕西 西安 710025; 2. 第二炮兵工程大学 自动控制系, 陕西 西安 710025)

摘要: 针对一类具有输入和状态约束的干扰有界非线性系统, 提出了基于区间分析的约束非线性鲁棒模型预测控制, 以降低计算量并扩大系统吸引域. 首先, 在集合运算的基础上, 利用区间运算和函数区间扩展, 给出了一种计算效能更好、保守性更低的非线性系统鲁棒一步集计算方法; 其次, 构造重叠的多面体控制不变集序列并以此计算约束非线性系统的鲁棒多步集, 并通过设计基于集合的在线优化策略, 提出了基于鲁棒一步集的单步优化非线性模型预测控制, 有效降低了非线性优化的在线计算量; 最后, 仿真实例验证了算法的有效性.

关键词: 非线性模型预测控制; 鲁棒一步集; 区间算法; 鲁棒不变集

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

RMPC for constrained nonlinear systems based on interval arithmetic

LIU Gang¹, QIN Wei-wei^{2†}, LIU Jie-yu², WANG Li-xin²

(1. Department of Aerospace Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025, China;

2. Department of Automatic Control, The Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: Based on the interval analysis, a robust nonlinear model predictive control (RNMPC) strategy with extended domain of attraction and reduced computation load is developed for a class of input-constrained and state-bounded uncertain nonlinear systems. Firstly, based on set theory, an effective and low conservatism algorithm for the robust one-step set of nonlinear systems is proposed with interval algorithm and interval extension of function in interval arithmetic. Secondly, an overlapped robust control-invariant set sequence around equilibrium points is calculated. And then, the robust multi-step sets of the robust control-invariant set sequence are calculated and used to design the robust nonlinear MPC based on one-step online optimization. By employing the one-step optimization, this algorithm extends the domain of attraction. Furthermore, the optimization function is simplex and the number of variable is reduced. Therefore, this algorithm reduces the on-line computation load of nonlinear optimization. Finally, numerical simulation results validate the proposed method.

Key words: nonlinear model predictive control; robust one step set; interval arithmetic; robust invariant set

1 引言(Introduction)

非线性模型预测控制(nonlinear model predictive control, NMPC), 简称非线性预测控制. 由于NMPC在处理系统输入与输出(状态)约束、非线性特性以及系统不确定等多方面具有优势, 在控制理论与应用受到了广泛关注^[1-4]. 非线性系统可采用多面体系统描述来实现包裹, 因此, 一些学者对多面体系统预测控制展开研究. Kothare等提出了一种基于线性矩阵不等式的预测控制算法^[5]. Angeli等人在文献[6]中将一类输入饱和受限不确定非线性系统转为多面体描述系统, 并设计了该系统的鲁棒预测控制器. Goulart等针对带多面体约束的线性离散时间系统, 研究了时变仿射型状态反馈预测控制算法^[7]. 邹志强等针对强时延非线性系统, 在包含初始状态的状态集内采用泰勒级数方

法构造多面体描述系统, 设计预测控制器保证系统稳定性^[8]. 黄骅等在文献[9]中采用泰勒级数展开实现了多面体系统包裹非线性系统, 并采用输入状态实际稳定理论证明了算法的稳定性. 同时, 基于非线性模型的预测控制也受到了越来越广泛的关注, 文献[10]针对一类具有连续平衡面的非线性系统, 通过构造不变集序列设计了覆盖平衡面的双模预测控制. 赵敏等人设计了基于不变集序列的不变集切换预测控制方法^[11]. 在文献[12]中, 秦伟伟等人针对具有有界干扰的非线性系统, 考虑线性化误差和有界干扰影响, 采用最小鲁棒不变集给出了基于鲁棒不变集的切换控制策略.

文献[11-12]中的控制策略, 其实质为离线控制增益切换方法. 如果能够在此基础上, 给出双模控制策

略,则可以极大地增加算法的适应范围、扩大约束系统的吸引域.基于此方面的考虑,本文重点研究干扰有界约束非线性系统的鲁棒预测控制策略.但在双模预测控制中,在线优化计算控制量时,在线计算量与优化参数个数具有密切关系,如何降低非凸非线性优化的在线计算量是面临的难点问题.文献[13]利用初始状态可达集,进而确定预测控制策略,降低了计算量.但该方法需要根据初始状态进行可达集预测来判断初始状态的可控性,因此无法给出吸引域描述.文献[14]通过采用区间算法研究了标称非线性系统的鲁棒一步集计算方法.受文献[14]启发,本文通过引入集合的区间算法,研究具有有界干扰的约束非线性系统的函数区间扩展,讨论多面体集的鲁棒一步集计算方法,进而设计基于鲁棒一步集的约束非线性系统鲁棒模型预测控制(robust one-step set RN MPC, ROSS-RN MPC),在提高算法的鲁棒性的同时利用一步在线优化降低在线计算量.

2 问题描述(Problems statement)

考虑一类含有加性有界干扰的约束非线性离散系统

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k), \quad (1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 和 $w(k) \in \mathbb{R}^n$ 分别表示系统状态、控制输入和外界干扰.系统状态和输入约束表示为

$$x(k) \in \mathbf{X} \triangleq \{x(k) \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}_x x(k) \leq \bar{\mathbf{1}}\}, \quad \forall k \geq 0, \quad (2)$$

$$u(k) \in \mathbf{U} \triangleq \{u(k) \in \mathbb{R}^m | \mathbf{A}_u u(k) \leq \bar{\mathbf{1}}\}, \quad \forall k \geq 0, \quad (3)$$

式中 $\bar{\mathbf{1}}$ 表示元素都为1的列向量,维数与式中的矩阵相对应.有界干扰 $w(k) \in \mathbb{R}^n$ 描述为

$$w(k) \in \mathbf{W} \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n | \|w\|_\infty \leq v, v \geq 0\}, \quad (4)$$

其中: \mathbf{W} 是包含原点的紧集, v 表示常数.

本文的研究对象为一类存在连续平衡面的约束非线性系统,非线性系统平衡面的定义在文献[11-12]中已给出,这里不再详述.模型预测控制目标是将系统状态驱动到期望平衡点 $(x_0^{\text{eq}}, u_0^{\text{eq}})$,并最小化性能指标:

$$J_\infty(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\|x(k+j|k) - x_0^{\text{eq}}\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j|k) - u_0^{\text{eq}}\|_R^2\}, \quad (5)$$

其中: Q_1 和 R 为正定加权矩阵, $x(k+j|k)$ 和 $u(k+j|k)$ 分别表示 k 时刻对 $k+j$ 时刻状态和输入的预测.

3 非线性系统鲁棒一步集及计算方法 (Robust one set for nonlinear systems and computation method)

多面体不变集的一步集在基于集合理论的约束系统模型预测控制中具有十分重要的地位,本节主要研究约束非线性系统的鲁棒一步集的概念以及计算方法.文献[15]介绍了线性系统一步集或鲁棒一步集的存在条件和计算方法,显然这些方法并不适用于具有有界干扰的约束非线性系统.为此本节引入区间算法,重点研究非线性系统的鲁棒一步集.

3.1 区间算法(Interval arithmetic)

区间算法是实际数值数学的一般形式.在区间数学中,采用区间变量代替真实数值,区间运算代替数值运算,以及区间分析代替数值分析.区间数 $X = [a, b]$ 表示满足 $x: a \leq x \leq b$ 的实际数值集合.相同的概念可以拓展到区间矢量,其每个元素就是一个区间变量.需要指出的是,区间矢量 X 表示属于的集合.实际紧区间 $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的集合可用 I 表示, \mathbb{R}^n 中区间矢量的集合记为 I^n .区间运算表示定义在区间集合上的运算(但不是实际数值的集合).

考虑函数映射 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 以及区间矢量 $X \in I^n$, 采用集合 $g(X)$ 表示函数 g 在区间 X 上的值域($g(X)$ 并不是区间矢量).计算区间矢量 X 在任意函数 $g(\cdot)$ 上的准确范围十分困难,但区间运算可以用于计算 $g(X)$ 准确范围的区间界.

定义 1 (自然区间扩展) 如果函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是包含四则基本运算的可计算表达式、算法或者计算程序,且伴随着标准函数的估计,则 $f(\cdot)$ 的自然区间扩展 $\square f$ 可采用数值变量对应的区间变量代替数值变量的方法计算得到,即通过基本区间四则运算和标准函数计算的范围来确定.

假设 X 和 U 为区间矢量,下面在区间分析的基础上,运用区间运算,讨论约束非线性系统多面体集的一步集内近似算法.非线性系统(1)的状态和输入约束为 X 和 U , W 为有界干扰,目标集为 Ω , ε 表示内近似误差界. Ω 的鲁棒一步集记为 $\Xi(\Omega)$.

3.2 非线性系统鲁棒一步集的内近似算法 (Invariant approximations of the robust one step set for nonlinear systems)

算法 1 约束不确定非线性系统多面体集鲁棒一步集内近似算法:

Step 1 设置 $L = (X, U)$;

Step 2 如果 $L \neq \emptyset$,将 L 中半径最大的区间矢量记为 $Z_i = (X_i, U_i)$;并记 $X_{F1} = \square f(X_i, U_i, W_{R\max})$, $X_{F2} = f(X_i, U_i)$ (其中 $W_{R\max} = \max(\text{rad}(W))$) 表示半径最大的区间矢量,区间矢量的半径定义为区间矢

量中区间数的长度的一半), $\delta_{X_i} = \|\text{diam}(X_i)\|_\infty$, $\delta_{U_i} = \|\text{diam}(U_i)\|_\infty$, $\delta = \max\{\delta_{X_i}, \delta_{U_i}\}$ (其中 $\text{diam}(\cdot)$ 表示区间长度);

Step 3 1) 如果 $X_{F1} \cap \Omega \neq \emptyset$ 且 $X_{F2} \cap \Omega \neq \emptyset$, 搜索 $\text{select}(U_i) = \{\max(U_i), \text{mid}(U_i), \min(U_i)\}$, 并计算 $X_{S1} = \square f(X_i, \text{select}(U_i), W_{R\max})$, $X_{S2} = \square f(X_i, \text{select}(U_i))$ (其中: $\text{select}(\cdot)$ 表示选择函数, $\text{mid}(\cdot)$ 表示中间值). 判断:

- 如果存在 $\text{select}(U_i)$ 使得 $X_{S1} \subseteq \Omega$, $X_{S2} \subseteq \Omega$, 取 $\text{action} = \text{插入}$;
- 否则, $\text{action} = \text{拆分}$;

2) 如果 $X_{F1} \cap \Omega = \emptyset$ 或 $X_{F2} \cap \Omega = \emptyset$ 或 $\delta > \varepsilon$, 取 $\text{action} = \text{舍弃}$;

Step 4 1) 如果 $\text{action} = \text{舍弃}$, 将 Z_i 从 L 中去除;

2) 如果 $\text{action} = \text{插入}$, 将 X_i 插入 $P(\Omega)$, 并将 L 中所有满足 $X_j = X_i$ 的区间矢量 $Z_i = (X_i, U_i)$ 从 L 中去除掉;

3) 如果 $\text{action} = \text{拆分}$, 进一步判断:

- 如果 $\delta_{X_i} > \delta_{U_i}$, 将 L 中所有满足 $X_j = X_i$ 的区间矢量 $Z_i = (X_i, U_i)$ 进行拆分, 即将 L 中所有满足 $X_j = X_i$ 的区间矢量表示为 $(X_{j1}, X_{j2}) = \text{bisect}(X_j)$, 并将 (X_{j1}, U_j) 和 (X_{j2}, U_j) 插入 L ;
- 如果 $\delta_{U_i} > \delta_{X_i}$, $(U_{j1}, U_{j2}) = \text{bisect}(U_j)$, 并将 (X_j, U_{j1}) 和 (X_j, U_{j2}) 插入 L ;

Step 5 如果 $L = \emptyset$, 结束迭代, 返回 Ω 的近似鲁棒一步集区间矢量描述 $P(\Omega)$, 进入下一步; 否则返回 Step 1;

Step 6 根据 Ω 的鲁棒一步集区间矢量 $P(\Omega)$, 采用区间矢量多面体集内近似计算方法, 得到鲁棒一步集多面体集近似描述 $\Xi(\Omega)$.

注 1 相对于文献[14], 本文算法考虑系统存在的有界干扰, 使得算法适应于含有有界干扰的约束非线性系统. 由于采用搜索算法确定 $\text{select}(U_i) = \{\max(U_i), \text{mid}(U_i), \min(U_i)\}$ 函数, 通过选择不同的控制输入来确定 X_i 与目标集 Ω 之间的关系, 进而确定是否应当插入 $P(\Omega)$, 这样可以减少拆分步骤, 有效降低了算法复杂度, 也降低了描述鲁棒一步集的保守性.

注 2 注 1 中, 提到区间拆分是一项复杂的工作, 如果能够确定恰当的拆分原则, 则可以有效降低整个算法的效率, 文献[14]并未明确交代如何进行区间拆分. 一般区间拆分可分为平均拆分和非平均拆分. 平均拆分就是将区间拆分为几个半径相同的区间(例如二拆分、三拆分), 这样做的好处在于, 拆分简单并且特别利于多层次的迭代拆分, 但是拆分效率低; 而非平均拆分按照非平均的原则拆分区间, 这种拆分方法可以根据需要任意设置拆分比例, 例如第 1 层迭代按照 1:4 的比例进行拆分, 而第 2 层迭代根据算法 1 中的插入准则按照 2:3 的比例进行拆分, 这种拆分方法效率高, 但是拆分过程过于复杂. 本文通过比较, 采用平均拆分法. 在给出鲁棒一

步集的基础上, 下面给出鲁棒多步集的计算方法.

算法 2 干扰有界约束非线性系统的鲁棒多步集计算方法:

I) 若目标集 Ω 是凸多面体集, 则集合 Ω 的鲁棒多步集 $\Xi_N \Omega$ 采用如下方法计算:

- ① 令 $k = 0$, $\Xi_0(\Omega) = \Omega$;
- ② 按照鲁棒一步集方法计算

$$\Xi_k(\Omega) = \Xi(\Xi_{k-1}(\Omega)); \quad (6)$$

③ 令 $k = k + 1$, 若 $k > N$ 或 $\Xi_{k-1}(\Omega) \ominus W \subseteq \emptyset$, 计算结束; 否则返回②.

II) 若目标集为凸多面体集的并集 $\Omega \triangleq \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$, 鲁棒多步集计算方法如下:

Ω 的鲁棒一步集为

$$\Xi(\Omega) = \Xi\left(\bigcup_{i=1}^M \Omega_i\right) = \bigcup_{i=1}^M \Xi(\Omega_i). \quad (7)$$

Ω 的鲁棒多步集为

$$\Xi_N(\Omega) = \Xi_N\left(\bigcup_{i=1}^M \Omega_i\right) = \bigcup_{i=1}^M \Xi_N(\Omega_i). \quad (8)$$

4 基于鲁棒一步集的约束非线性系统鲁棒模型预测控制(RNMPC based on robust one step)

引入约束非线性系统鲁棒一步集, 设计双模控制策略, 可以扩大吸引域. 另一方面, 在区间算法中, 非线性系统区间运算的运算量相当大, 在线实施十分困难. 为此设计基于鲁棒一步集的双模鲁棒控制策略, 离线实施区间运算, 降低在线计算量.

算法 3 基于鲁棒一步集的约束非线性系统鲁棒模型预测控制, ROSS-RNMPC.

I) 离线部分.

Step 1 对于干扰有界约束非线性系统(1), 按照文献[12]方法计算相互重叠、覆盖整个平衡面的多面体控制不变集序列 P_0^l, \dots, P_L^l 以及反馈控制律 $K_0^{LQR}, \dots, K_L^{LQR}$ 对应的最小鲁棒不变集 $\Omega_0^{\min}, \dots, \Omega_L^{\min}$, 并记 $S = \bigcup_{i=0}^L P_i^l$, $S' = \bigcup_{i=0}^L (P_i^l \oplus \Omega_i^{\min})$;

Step 2 对于约束非线性系统的控制不变集序列 $S = \bigcup_{i=0}^L P_i^l$, 采用鲁棒一步集算法, 计算约束非线性系统(1)的鲁棒多步集 $\Xi^N(S) = \bigcup_{i=0}^L \Xi^N(P_i^l)$;

II) 在线优化.

Step 1 给定初始状态 $x(0)$, 令 $k = 0$;

Step 2 根据当前时刻系统状态 $x(k)$, 判断:

对于 k 时刻非线性系统状态 $x(k) \in S'$, $j = \min\{i : x(k) \in P_i^l \oplus \Omega_i^{\min}\}$, 则设计控制输入

$$u(k) = K_j^{LQR} \Delta x(k) + u_j^{eq}, \quad (9)$$

作用于非线性系统, 其中 $\Delta x(k) = x(k) - x_j^{eq}$.

如果 $x(k) \in \Xi^N(S)/S'$, 采用单步优化双模鲁棒预测控制, 计算控制输入, 即若 $x(k) \in \Xi^N(S)$, $x(k) \notin S'$, 求解下面优化过程:

$$\min_{u(k)} J(k) = \|x(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_R^2, \quad (10)$$

s.t.

$$\begin{cases} x(k) \in X, u(k) \in U, w(k) \in W, \\ f(x(k), u(k)) \in \begin{cases} \Xi^{m-1}(P_n^l) \oplus W, & m > 1, \\ P_n^l, & m = 1, \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

其中: $m = \min\{i : x(k) \in \Xi^i(S)\}$, $n = \min\{j : x(k) \in \Xi^m(P_j^l)\}$, $x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k)$. 通过上述优化问题得到控制输入 $u(k)$ 作用于系统;

Step 3 测量下一时刻的系统状态, $k = k + 1$, 返回在线部分 Step 2.

注 3 关于 $m = \min\{i : x(k) \in \Xi^i(S)\}$ 与 $n = \min\{j : x(k) \in \Xi^m(P_j^l)\}$ 的选择问题. 在采用 ROSS-RNMPC 算法实施单步双模在线优化时, 如果 $x(k) \in \Xi^{m_1}(P_{n_1}^l) \cap \Xi^{m_2}(P_{n_2}^l)$, 需要确定一步在线优化的目标集和优化步数; 这里选择在优化时间最短的控制策略, 即先确定到达终端约束多面体不变集序列的最小步数 $m = \min\{i : x(k) \in \Xi^i(S)\}$, 然后再确定到达期望平衡点的最小控制律切换次数 $n = \min\{j : x(k) \in \Xi^m(P_j^l)\}$; 同样, 也可以先确定距离期望平衡点最近的多面体不变集, 然后再确定到达的最小在线优化步数, 只是这样的在线计算量相对较大.

定理 1 若对于干扰有界约束非线性系统(1), 状态和输入约束满足(2)–(3), 则对于给定初始状态 $x(0)$, 如果 $x(0) \in \Xi^N(S')/S'$ 或者 $x(0) \in S'$, 按照 ROSS-RNMPC 设计控制器, 可保证系统渐近稳定到期望平衡点为中心的最小鲁棒正不变集中.

证 给定系统初始状态 $x(0)$. 假设 k 时刻状态为 $x(k)$.

I) 若 $x(k) \in S' = \bigcup_{i=0}^L (P_i^l \oplus \Omega_i^{\min})$, 设计控制输入

$$u(k) = K_j^{LQR} \Delta x(k) + u_j^{eq}, \quad j = \min\{i : x(k) \in P_i^l \oplus \Omega_i^{\min}\}, \quad (12)$$

可保证系统收敛到平衡点附近的最小鲁棒正不变集 Ω_0^{\min} .

由于 S' 为干扰有界非线性系统的鲁棒控制不变集, 因此可保证系统最终收敛到 Ω_0^{\min} .

II) 若 $x(k) \in \Xi^N(S) \setminus S'$, 由系统鲁棒多步集已知, 根据状态位置可知到达终端约束集 S' 需要的优化时域步长. 对于 k 时刻系统状态 $x(k)$, 如果系统状态 $x(k) \in \Xi^m(P_n^l)$ ($m = \min\{i : x(k) \in \Xi^i(S)\}$, $m \geq 1$, $n = \min\{j : x(k) \in \Xi^m(P_j^l)\}$, $n \geq 0$), 则通过式

(10) 进行优化运算, 可得到可行控制输入 $u(k)$ 保证

$$f(x(k), u(k)) \in \Xi^m(P_n^l) \oplus W, \quad (13)$$

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k) \in \Xi^m(P_n^l), \quad (14)$$

即 $x(k+1) \in \Xi^m(P_n^l)$.

在 $m = 1$ 时, 选择优化目标集合选择为 P_n^l . 假设 $x(k)$ 属于 P_n^l 的鲁棒一步集 $\Xi(P_n^l)$, 即 $x(k) \in \Xi(P_n^l)/S'$, 则存在容许控制输入使得 $x'(k+1) = f(x(k), u(k)) \in P_{n-1}^l$, 因此

$$\begin{cases} x(k+1) \in f(x(k), u(k)) \oplus W \subseteq P_n^l \oplus W, \\ x(k+1) = x'(k+1) \oplus W. \end{cases} \quad (15)$$

又因为 $W \subseteq \Omega_n^{\min}$, 则

$$\begin{cases} x(k+1) \in P_n^l \oplus \Omega_n^{\min}, \\ x(k+1) = x'(k+1) \oplus \Omega_n^{\min}, \end{cases} \quad (16)$$

由此可知在下一时刻, 可以选择将 $x'(k+1) = f(x(k), u(k))$ 作为标称系统的状态, 由于 $x(k+1) = x'(k+1) \oplus \Omega_n^{\min}$, $x'(k+1) \in P_n^l \in S$, 则控制输入可保证系统状态收敛到期望平衡点为中心的最小鲁棒正不变集 Ω_0^{\min} .

如果 $f(x(k), u(k)) \in S$ 且 $x(k+1) \in S'$, 则在 $k+1$ 时刻切换到式(9)描述的控制策略, 进而可保证系统收敛到最小鲁棒正不变集 Ω_0^{\min} . 证毕.

5 仿真实例(Simulation example)

为了检验算法有效性, 以一类型非线性系统—连续搅拌反应釜(CSTR)为例设计控制器, 其模型表示为

$$\begin{cases} \dot{C}_A = \frac{Q_f}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 C_A \exp(-\frac{E_a}{R_1 T}) + w_{C_A}, \\ \dot{T} = \frac{Q_f}{V} (T_f - T) - \frac{k_0 C_A}{C_p} (-\Delta H) \exp(-\frac{E_a}{R_1 T}) - \frac{U A_h}{V C_p} (T - T_c) + w_T. \end{cases} \quad (17)$$

将系统模型标准化, 并离散化(离散时间 $T_s = 0.1$ s)可得到非线性模型描述为^[16]

$$x(k+1) = f(x(k)) + g(x(k))u(k) + w(k), \quad (18)$$

其中

$$\begin{cases} f(x(k)) = \begin{bmatrix} x_1(k) + T_s [-\alpha x_1(k) + D_a (1 - x_1(k)) \times \\ \exp(\frac{x_2(k)}{1 + x_2(k)/\gamma})] \\ x_2(k) + T_s [-\alpha x_2(k) + B D_a (1 - x_1(k)) \times \\ \exp(\frac{x_2(k)}{1 + x_2(k)/\gamma}) - \beta x_2(k)] \\ g(x(k)) = [0 \ \beta]^T \end{bmatrix}, \quad (19) \end{cases}$$

标准化后的模型系数为

$$\alpha = 1.0, \beta = 1.0, \gamma = 20, B = 1, D_\alpha = 0.072.$$

系统状态和输入约束也转化为标准形式:

$$\begin{cases} X = \{(x_1, x_2)^T | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 6.4286\}, \\ U = \{u | 0 \leq u \leq 10\}. \end{cases} \quad (20)$$

假设范数有界干扰描述为 $w_1 = 0.06 \sin(0.1\pi k)$, $w_2 = 0.4 \sin(0.2\pi k)$.

5.1 鲁棒终端约束集及鲁棒一步集计算 (Computation of robust terminal constrained set and robust one step set)

采用区间形式描述状态约束和输入约束, 则 $[Y] = [x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+] \times [u_1^-, u_1^+]$, $[W] = [w_1^-, w_1^+] \times [w_2^-, w_2^+]$, 其中 $y = (x_1, x_2, u) \in Y$. 运用区间算法可得到函数自然区间扩展描述为

$$\begin{aligned} \square f_1(X, U, W) &= [x_1^- + T_s \cdot \Pi_1 + w_1^-, x_1^+ + T_s \cdot \Pi_2 + w_1^+], \\ \square f_2(X, U, W) &= [X_2 + T_s \Pi_3 + \beta U + W_2, \\ & [x_2^- + T_s \Pi_4 + \beta u^- + w_2^-, x_2^+ + \beta u^+ + w_2^+ + T_s \Pi_5], \end{aligned} \quad (21)$$

$$(22)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -\alpha x_1^+ + D_a(1 - x_1^+) \exp\left(\frac{x_2^-}{1 + x_2^-/\gamma}\right), \\ \Pi_2 &= -\alpha x_1^- + D_a(1 - x_1^-) \exp\left(\frac{x_2^+}{1 + x_2^+/\gamma}\right), \\ \Pi_3 &= -\alpha X_2 + BD_a(1 - X_1) \exp\left(\frac{X_2}{1 + X_2/\gamma}\right) - \beta X_2, \\ \Pi_4 &= -\alpha x_2^+ + BD_a(1 - x_1^+) \exp\left(\frac{x_2^-}{1 + x_2^-/\gamma}\right) - \beta x_2^+, \\ \Pi_5 &= -\alpha x_2^- + BD_a(1 - x_1^-) \exp\left(\frac{x_2^+}{1 + x_2^+/\gamma}\right) - \beta x_2^-. \end{aligned}$$

根据上面得到的函数区间扩展, 按照算法1可计算得到以平衡点 $[0.2229 \ 1.4849]^T$ 为中心的非线性系统鲁棒终端约束集的鲁棒多步集, 如图1所示.

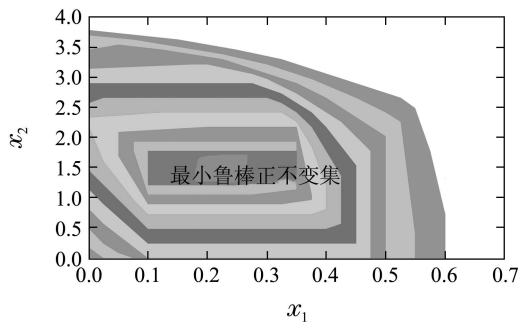


图 1 以 $[0.2229 \ 1.4849]^T$ 为中心的鲁棒控制不变集及其鲁棒多步集

Fig. 1 Robust control invariant sets and robust multiple set around $[0.2229 \ 1.4849]^T$

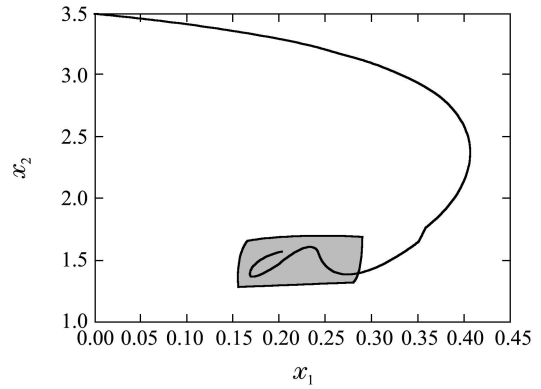


图 2 状态相位变化曲线图

Fig. 2 The trajectory of system state

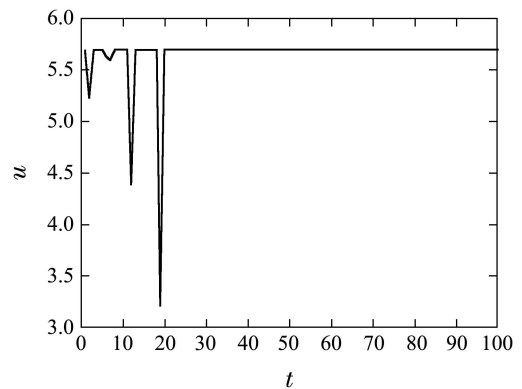


图 3 控制输入变化曲线

Fig. 3 The trajectory of control input

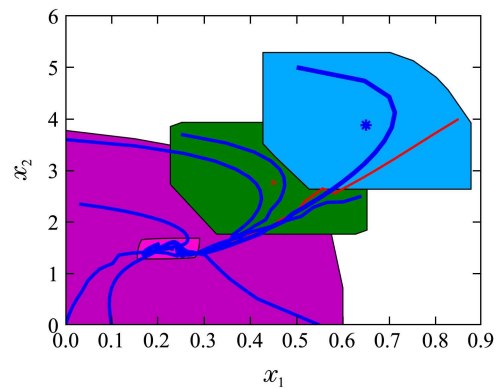


图 4 不同初始值的状态收敛变化曲线

Fig. 4 State curves with difference initial states

5.2 鲁棒非线性系统鲁棒一步集模型预测控制器(RNMPC based on robust one step set)

按照文献[11]方法, 对于具有连续平衡面的约束非线性系统, 可计算得到相互重叠的鲁棒控制不变集, 并将该并集作为非线性系统的终端约束集. 按照算法1和算法2计算以控制不变集序列作为终端约束集的鲁棒多步集. 按照计算得到的鲁棒多步集, 采用算法3设计基于集合的单步优化鲁棒模型预测控制器. 对于初始状态 $x(0) = [0 \ 3.5]^T$, 仿真结果如图1-2所示. 图3给出了覆盖平衡面的多鲁棒多步集的并集, 以

及不同初始状态对应的系统收敛曲线. 仿真结果表明了本文方法的有效性. 同时, 对于初始状态 $x(0) = [0 \ 3.5]^T$ 采用ROSS-RNMPC可以有效实施控制, 而文献[11]方法无法控制(因此初始状态处于设计的不变集序列之外), 因此算法ROSS-RNMPC扩大了算法的吸引域. 另外, 相对于文献[10], 本文方法通过区间分析计算得到了鲁棒多步集, 因为可采用多个单步优化替代固定步长或者变步长优化算法, 可极大降低在线计算量, 这一点对非线性系统尤其重要.

6 结语(Conclusions)

本文针对干扰有界约束非线性系统, 通过讨论非线性系统的区间分析与运算, 研究了非线性系统的鲁棒一步集计算方法, 提出了基于鲁棒一步集的双模单步优化非线性模型预测控制(ROSS-RNMPC). 需要指出的是, 本文的ROSS-RNMPC是针对一类具有连续平衡面的约束非线性系统提出的, 但是同样适用于一般形式非线性系统的双模控制策略, 只需将以期望平衡点为中心的单个鲁棒控制不变集代替连续的控制不变集序列作为终端约束集即可.

参考文献(References):

- [1] 陈虹, 刘志远, 解小华. 非线性模型预测控制的现状与问题 [J]. 控制与决策, 2001, 16(4): 385 – 391.
(CHEN Hong, LIU Zhiyuan, XIE Xiaohua. Nonlinear model predictive control: the state and open problems [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(4): 385 – 391.)
- [2] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: stability and optimality [J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.
- [3] 席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状 [J]. 自动化学报, 2008, 34(10): 1225 – 1234.
(XI Yugeng, LI Dewei. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(10): 1225 – 1234.)
- [4] 席裕庚, 李德伟, 林妹. 模型预测控制现状与挑战 [J]. 自动化学报, 2013, 39(3): 222 – 236.
(XI Yugeng, LI Dewei, LIN Shu. Model predictive control-status and challenges [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 222 – 236.)
- [5] LI B, KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, et al. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.
- [6] ANGELI D, CASAVOLA A, MOSCA E. Constrained predictive control of nonlinear plants via polytopic linear system embedding [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, 10(13): 1091 – 1103.
- [7] GOULART P J, KERRIGAN E C, MACIEJOWSKI J M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints [J]. *Automatica*, 2006, 42(4): 523 – 533.
- [8] 邹志强, 徐立鸿, 袁梦. 一种基于多面体描述系统的非线性预测控制 [J]. 同济大学学报(自然科学版), 2006, 34(6): 813 – 817.
(ZOU Zhiqiang, XU Lihong, YUAN Meng. A nonlinear model predictive control based on polytopic description system [J]. *Journal of TONGJI University (Nature Science)*, 2006, 34(6): 813 – 817.)
- [9] 黄骅, 何德峰, 俞立. 基于多面体描述系统的鲁棒非线性预测控制 [J]. 自动化学报, 2012, 38(12): 1906 – 1912.
(HUANG Hua, HE Defeng, YU Li. Robust nonlinear predictive control based on polytopic description systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(12): 1906 – 1912.)
- [10] ZOU T, LI S Y, DING B C. A dual mode nonlinear model predictive control with the enlarged terminal constraint sets [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(1): 21 – 27.
- [11] 赵敏, 李少远. 非线性系统双模鲁棒预测控制: 不变集切换方法 [J]. 系统科学与数学, 2007, 27(3): 365 – 377.
(ZHAO Min, LI Shaoyuan. Dual-mode robust predictive control for nonlinear systems: a switching method between polyhedral invariant sets [J]. *Journal of System Science and Mathematical*, 2007, 27(3): 365 – 377.)
- [12] 秦伟伟, 马建军, 刘刚, 等. 一类干扰有界约束非线性系统的鲁棒模型预测控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(5): 709 – 714.
(QIN Weiwei, MA Jianjun, LIU Gang, et al. Robust model-predictive-control for a constrained nonlinear system with bounded disturbance [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(5): 709 – 714.)
- [13] LIMON D, BRAVO J M, ALAMO T, et al. Robust MPC of constrained nonlinear systems based on interval arithmetic [J]. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, 2005, 152(3): 325 – 332.
- [14] BRAVO J M, LIMON D, ALAMO T, et al. On the computation of invariant sets for constrained nonlinear systems: an interval arithmetic approach [J]. *Automatica*, 2005, 41(9): 1583 – 1589.
- [15] 秦伟伟, 马建军, 郑志强, 等. 采用鲁棒容许集对有约束的不确定系统作鲁棒模型预测控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(6): 763 – 770.
(QIN Weiwei, MA Jianjun, ZHENG zhiqiang, et al. Robust model-predictive-control based on robust admissible set for constrained uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 763 – 770.)
- [16] BACIC M, CANNON M, KOUVARITAKIS B. Invariant sets for feedback linearization based nonlinear predictive control [J]. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, 2005, 152(3): 259 – 265.

作者简介:

刘刚 (1964–), 男, 教授, 目前研究方向为精确制导与控制、空间信息应用, E-mail: hb840513@163.com;

秦伟伟 (1982–), 男, 讲师, 目前研究方向为模型预测控制、高超声速飞行器控制, E-mail: qww_1982@163.com.

刘洁瑜 (1970–), 女, 教授, 目前研究方向为航天器导航与控制、惯性导航技术, E-mail: Liujiayu@sina.com.

汪立新 (1966–), 男, 教授, 目前研究方向为航天器导航与控制、惯性导航技术, E-mail: Wanglx@163.com.