

非仿射纯反馈系统的间接自适应神经网络控制

胡云安¹, 程春华^{1†}, 邹 强², 周大旺¹

(1. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001; 2. 海军航空工程学院 飞行器工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 针对非仿射纯反馈系统, 提出了一种新的设计方案. 与现有文献中方法不同, 该方案不是直接利用逼近技巧构建理想的反馈控制器. 首先通过自抗扰思想将非仿射纯反馈系统转化成含有未知控制系数以及未知非线性的仿射系统, 并且证明了可行性. 然后结合微分器和全调节径向基函数神经网络, 利用自适应反演技巧设计了自抗扰控制器, 微分器的引入避免了传统反演的计算复杂性. 最后, 从理论上证明了所设计的控制器能够保证闭环系统所有信号半全局一致有界, 并且证明了系统状态渐进收敛到零点的残集内. 仿真例子验证了算法的有效性.

关键词: 非仿射非线性; 自抗扰; 全调节径向基函数神经网络; 微分器

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Indirect adaptive neural networks controller for non-affine pure-feedback systems

HU Yun-an¹, CHENG Chun-hua^{1†}, ZOU Qiang², ZHOU Da-wang¹

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China;

2. Department of Airborne Vehicle Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China)

Abstract: A novel design scheme is investigated for a class of non-affine pure-feedback systems. Being different from approaches in references, it does not directly employ approximation-based techniques to construct the ideal desired feedback control. Firstly, it is proved that the non-affine pure-feedback systems can be transformed into affine systems with unknown virtual control coefficients and unknown uncertainties based on active disturbance rejection ideal (ADR). Combining a differentiator with fully-tuned radial-basis-function neural network (RBFNN), we design an active disturbance rejection controller (ADRC) by employing the adaptive backstepping method. The explosion of complexity in traditional backstepping design is avoided by utilizing differentiator. Based on Lyapunov stability analysis, it is proved that the controller guarantees all signals of the closed-loop system to be semi-globally uniformly bounded. It is also proved that the states can asymptotically converge to an arbitrary small region around zero. The effectiveness of the proposed algorithm is validated by a simulation example.

Key words: non-affine nonlinear; active disturbance rejection (ADR); fully tuned radial basis function neural network (RBFNN); differentiator

1 引言(Introduction)

在过去的几十年里, 不确定非线性系统的自适应控制一直是研究的热点, 一般设计参数自适应律来估计不确定参数^[1-2]和神经网络或者模糊系统理论来估计未知非线性函数^[3-4]. 1991年, Kanellakopoulos等人在文献[1]中为含有不确定参数的严格反馈系统提出了自适应反演设计方案, 该方案能保证全局稳定且跟踪误差渐近收敛, 但是存在参数过学习现象. 为了避免过参数化, Kanellakopoulos等人在文献[2]中引入了调节函数. 文献[4]为了一类控制系数未知且含有未知非线性的严格反馈系统提出了自适应神经网络控制. 为了避免控制奇异的出现, 参考文献[5]中采用了投影

算子和积分型Lyapunov函数为一类不确定严格反馈系统设计了自适应反演控制, 但是在反演每一步中都需要积分运算, 从而导致运算繁杂. 文献[6]利用反演和全调节径向基函数神经网络(fully tuned radial basis function neural network, RBFNN), 为不确定性严格反馈非线性系统设计了控制器.

上述文献研究对象都是仿射形式的不确定非线性系统, 变量以仿射的形式出现, 从而方便视为虚拟控制. 对于非仿射系统, 变量不是以仿射的形式出现, 为了解决该问题, 隐含数定理、中值定理或者泰勒级数定理被用来证明存在期望的虚拟控制^[7-10]. 完全纯反馈系统的自适应神经网络控制的最大的困难是循环

构建逼近器,这是由纯反馈系统的结构造成的^[11].文献[7-8]采用backstepping为一类不确定非线性纯反馈系统设计了自适应NN控制,但是研究的对象都是输入仿射形式,从而避免了循环逼近的问题.文献[9]中采用泰勒级数将严格反馈输入非仿射非线性系统转换成控制增益是未知函数的输入仿射非线性系统,最后设计了间接自适应RBFNN滑模控制,为了避免奇异的产生,提出了改进的神经网络参数自适应律,尽管可以保证跟踪误差渐近收敛到零,但是作者没有探讨未知非线性项神经网络的循环构建问题.文献[10]利用中值定理为完全纯反馈非线性系统提出了输入状态稳定直接自适应NN控制方法,虽然输入状态稳定模型设计解决了循环构建问题,但是构建的神经网络需要的输入繁多并且需要复杂的运算.文献[11]利用隐含数定理和中值定理将非仿射纯反馈系统转换成含有不确定性和控制增益是未知函数的仿射系统,然后采用反演和神经网络设计了间接自适应控制器,通过引入动态面设计避免了反演设计中计算爆炸问题和循环构建控制器的设计,最后利用输入状态实际稳定性理论和小增益理论证明了整个闭环系统的稳定性.文献[12]利用中值定理为非仿射纯反馈系统设计了循环间接自适应神经网络控制.文献[6,13-14]利用中值定理将输入非仿射系统转化成含有未知非线性以及未知控制增益函数的仿射系统,然后利用自适应神经网络和Nussbaum型增益函数技巧,为一类不确定非仿射纯反馈系统设计了间接自适应控制器,虽然Nussbaum增益函数的引入避免了为控制增益函数构建循环神经网络,但是神经网络的输入含有虚拟控制量的偏导数,并且稳定性证明过程中需要用到假设:未知增益函数存在上界.

文献[7-14]是基于隐含数定理、中值定理或者泰勒级数定理设计了直接或间接自适应控制器.而文献[15-16]通过从非仿射项分离出线性项,然后设计了间接自适应模糊控制,但是研究的对象是链式积分输入非仿射系统.链式积分输入非仿射是严格反馈输入非仿射的特殊形式,文献[17]在文献[15-16]的基础上研究了严格反馈输入非仿射的非线性系统,接着文献[18]将该思想运用到了一类具有非仿射输入的混沌系统.文献[15-18]通过隐含数定理或中值定理将循环神经网络变成静态神经网络,但是它们研究的对象都不是纯反馈系统.文献[19]将文献[15]中的方法扩展到链式积分输入非仿射多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)系统中.但是文献[15-19]中控制器参数的选择与未知函数偏导信号有关,并且没有深入探讨如何选择,然而这些文献中从非仿射项分离出线性项的思想类似于韩京清提出的自抗扰设计思想^[20-21].为了能为不确定性系统设计有效的控制器,韩京清提出了新型实用的非线性控制技术-自抗扰控制

(ADRC)^[20-21].很多专家对该新技术展开了深入的研究,并且已将该技术成功用于很多领域^[22-24].文献[25-26]利用自抗扰思想,结合扩张状态观测器、微分器为完全非仿射纯反馈非线性系统设计了自适应反演控制器.

从上述文献可以总结出,为非仿射系统设计间接自适应控制器需要利用中值定理或泰勒级数定理将非仿射系统转化为控制增益是未知函数的仿射系统.与现有文献设计思路不同,本文利用韩京清研究员提出的自抗扰思想将非仿射系统转换成控制增益是未知参数的仿射系统,然后结合全调节RBFNN和微分器、利用反演设计了间接自适应控制器,并且本文利用文献[15]中的方法将循环网络变成静态神经网络.

2 问题描述及准备(Problem formulation and preliminaries)

2.1 问题描述(Problem formulation)

考虑下面 n 阶非仿射纯反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u), \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$ 为系统的状态, u 为控制输入, $f_i(\cdot)$ 是未知的光滑的非线性函数.假设系统(1)满足下面的假设.

假设 1 存在一个紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $\bar{x}_n \in \Omega$.

假设 2 设

$$\begin{aligned} g_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) &= \frac{\partial f(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \neq 0, \\ & i = 1, \dots, n-1, \\ g_n(\bar{x}_n, u) &= \frac{\partial f(\bar{x}_n, u)}{\partial u} \neq 0, \end{aligned}$$

不失一般性,令存在一个未知的正常数 $b > 0$, 使得 $0 < b \leq g_i(\cdot) < \infty, \forall (\bar{x}_i, x_{i+1}) \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}$.

假设 3 当且仅当 $x_i = 0, x_i \in \mathbb{R}^{i+1}$ 时,才有 $f_i(x_i) = 0$.该假设说明式(1)的平衡点在原点.

控制目标是设计控制律使系统(1)从任意初始状态渐近收敛到平衡点.

2.2 全调节径向基函数神经网络(Fully tuned radial basis function neural networks)

本文将采用RBF神经网络逼近未知的非线性函数.任意小的逼近的精度可以通过选择足够多的神经网络节点数达到^[6-7].因此,神经网络逼近任意连续的函数 $\Delta f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$ 可以描述成

$$\Delta f = W^{*T} \phi^* + \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2)$$

式中: $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_r]^T > 0$ 为逼近误差, ϕ^* :

$\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$ 为最优高斯基函数矢量, $\mathbf{W}^* \in \mathbb{R}^{l \times r}$ 为最优权重矩阵. 并且

$$\phi^* = [\exp(\frac{-\|\varsigma - \mu_1^*\|^2}{\sigma_1^{*2}}) \quad \exp(\frac{-\|\varsigma - \mu_2^*\|^2}{\sigma_2^{*2}}) \quad \dots \quad \exp(\frac{-\|\varsigma - \mu_l^*\|^2}{\sigma_l^{*2}})]^T,$$

其中: $\mu_i^* (i = 1, 2, \dots, l)$ 为最优中心点, l 为隐层节点数, $\sigma_i^* (i = 1, 2, \dots, l)$ 为最优的影响范围, $\varsigma \in \mathbb{R}^n$ 为RBFNN输入向量.

引理1 定义 $\tilde{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{W}^*$, $\tilde{\phi} = \hat{\phi} - \phi^*$, $\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \mu^*$, $\tilde{\sigma} = \hat{\sigma} - \sigma$. 则全调节RBFNN逼近输出误差可表示为^[6]

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\phi} - \mathbf{W}^{*T} \phi^* = \\ & \tilde{\mathbf{W}}^T (\hat{\phi} - \hat{\phi}'_{\mu} * \hat{\mu} - \hat{\phi}'_{\sigma} * \hat{\sigma}) + \\ & \hat{\mathbf{W}}^T (\hat{\phi}'_{\mu} * \tilde{\mu} + \hat{\phi}'_{\sigma} * \tilde{\sigma}) + \mathbf{d}_u, \end{aligned} \quad (3)$$

其中残留项 \mathbf{d}_u 的上界为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{d}_u\| \leq & \|\mu^*\| \|\tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\phi}'_{\mu}\| + \|\sigma^*\| \|\tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\phi}'_{\sigma}\| + \\ & \|\mathbf{W}^{*T}\| \|\hat{\phi}'_{\mu} * \hat{\mu}\| + \|\mathbf{W}^{*T}\| \|\hat{\phi}'_{\sigma} * \hat{\sigma}\| + \\ & \sqrt{l} \|\mathbf{W}^{*T}\|, \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $\hat{\phi}'_{\mu}, \hat{\phi}'_{\sigma}$ 分别为 $\hat{\phi}$ 对 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ 的偏导数, $\hat{\phi}'_{\sigma} * \hat{\sigma}$ 等表示向量的点乘. 具体的证明过程可以参见文献[6].

3 基于静态神经网络的自抗扰控制(Active disturbance rejection control with static neural networks)

3.1 自抗扰(Active disturbance rejection)

为了清楚地描述自抗扰概念, 不妨考虑下列非仿射系统:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5)$$

其中: $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$, Ω 为紧集, f 为未知的光滑连续不确定函数, 且

$$f(0, 0) = 0, \quad f_u = \frac{\partial f}{\partial u} \neq 0.$$

在 Ω 紧集上, 是严格的正函数或严格的负函数, 不妨假设 f_u 的符号为正, 则式(5)可以改写成

$$\dot{x} = f(x, u) - c_0 u + c_0 u, \quad (6)$$

式中: $c_0 > 0$ 为待设计的常数, 与 f_u 同符号, 定义 $F(x, u) = f(x, u) - c_0 u$, 视为新的不确定项, 则可以设计如下控制器:

$$u = \frac{1}{c_0} (-kx - F(x, u)). \quad (7)$$

当 $F(x, u)$ 已知时, 可以用数字的方式实现. 但由于 $F(x, u)$ 是未知的不确定项, 所以不能直接用. 故为其设计渐近收敛的估计器 $z \rightarrow F(x, u)$, 则可设计如下

控制器来镇定系统(5):

$$u(t) = \frac{1}{c_0} (-z - kx), \quad (8)$$

式中 $k > 0$ 为待设计的常数.

引理2 针对系统(5), 则通过式(6)的变换, 并且设计渐近收敛的估计器估计新的不确定项, 则控制器(8)可以使系统(5)渐近镇定.

证 将式(5)在平衡点(0, 0)处近似线性化得

$$\dot{x} = f_x x + f_u u + \text{h.o.t.}, \quad (9)$$

式中: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$, h.o.t为高阶项, 在足够小的紧集内, 本文可以忽略高阶项, 从而式(9)可以写成

$$\dot{x} = f_x x + f_u u. \quad (10)$$

将式(8)代入式(10)有

$$\begin{aligned} \dot{x} = & f_x x - \frac{1}{c_0} f_u (z + kx) = \\ & (f_x - \frac{f_u k}{c_0}) x - \frac{f_u}{c_0} z, \end{aligned} \quad (11)$$

不难发现式(11)稳定的必要条件是 c_0 与 f_u 同符号(前面已假设 f_u 的符号为正, $c_0 > 0$), 此时只要选择恰当的 k , 使得 $f_x - \frac{f_u k}{c_0} < 0$ 就能保证式(11)关于输入 z 是输入状态稳定的. 前面已假设 z 是渐近收敛的估计器, 并且它估计的未知光滑连续的函数 $F(x, u)$, 在紧集上 $F(x, u)$ 是有界的, 所以 z 最终也是有界的, 从而保证了式(11)是稳定的. 即设计估计器 z 和控制器(8)可以保证系统(5)的稳定性. 证毕.

下面本文再进一步探讨闭环系统的渐近稳定性. 将式(8)代入式(6)有

$$\dot{x} = -kx + (F - z), \quad (12)$$

将 $F - z$ 视为系统(12)的输入, 根据输入状态稳定性理论, 本文也可以得出, 只要对未知非线性构建的估计器渐近一致收敛, 系统(12)就能渐近收敛到原点附近邻域. 即存在控制律(8)可以渐近镇定系统(5).

3.2 $F(x, u)$ 的静态神经网络逼近(Approximation of $F(x, u)$ using static neural network)

为了保证所设计的控制器能渐近镇定系统, 需要为未知非线性项 $F(x, u)$ 构建渐近收敛的估计器. 在此, 笔者采用静态神经网络进行逼近. 为了能够用静态神经网络逼近 $F(x, u)$, 笔者需要下面的定理:

定理1^[16] 开集 $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, 在 $\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{S}$ 上, 函数 $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的, 假设存在点 $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) \in \mathbf{S}$, 使得 $h(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = 0$ 并且雅克比(Jacobian)矩阵 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$ 是非奇异, 则存在 \mathbf{a}_0 的邻域 $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$ 和 \mathbf{b}_0 的邻域 $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^m$, 使得每个 $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ 时, 方程

$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ 有唯一的解 $\mathbf{a} \in \mathbf{U}$. 更重要的是解可以表示成 $\mathbf{a} = \mathbf{g}(\mathbf{b})$, 且函数 $\mathbf{g}(\cdot)$ 在 $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$ 处是连续可微的.

考虑系统式(5), 不妨将其写成

$$\dot{x} = F(x, u) + c_0 u. \quad (13)$$

如果 $F(x, u)$ 已知, 则可设计反馈控制器 $u = (1/c_0) \times (-kx - F(x, u))$. 但是此时 $F(x, u)$ 未知, 所以笔者利用RBFNN逼近该未知项. 不难发现RBFNN的输入为 x, u , 因此这是一个循环RBFNN(RRBFNN)系统, 图1表示了该情形. 如果笔者采用RRBFNN, 则每个固定点在每个时刻都需要求解, 从而增加了运算. 为了避免该问题, 笔者采用定理1确保 z 仅仅是关于 x 的函数, 且满足下式:

$$h(x, z) = F(x, -kx - z) - z = 0. \quad (14)$$



图1 循环RBFNN系统

Fig. 1 Recurrent RBFNN system

这意味着被逼近的未知项 $F(x, u)$ 可以仅仅用 x 的多项式形式表示, 也就是说在为该未知项构建神经网络时, 神经网络的输入只需要状态 x 就可以, 而不需要图1中的反馈信号, 即不需要设计的控制信号. 因此本文只需要为 $F(x, u)$ 构建静态神经网络, 而不需要循环神经网络. 本文给出下面的引理表示满足式(14)的 z 仅仅是 x 的函数.

引理3 ^[16] 令常数 c_0 满足下面的条件:

$$c_0 > \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

则存在紧集 $\Omega_x \subset \mathbb{R}$, 使得对所有的 $x \in \Omega_x$, 存在唯一的 z 满足式(14), 并且 z 仅仅是 x 的函数. 详细的证明过程可以参考文献[15-16].

利用引理3, 本文可采用静态神经网络而不是循环神经网络来逼近未知项 $F(x, u)$, 并且神经网络的输入只需要状态 x 即可. 但是由于 $f(x, u)$ 未知, 导致选择恰当的固定的参数很困难 c_0 , 文献[15-16]等对此没有展开讨论. 为此, 本文为类似 c_0 的参数设计了自适应律解决了该难题.

4 控制器设计及稳定性分析(Controller design and stability analysis)

由自抗扰思想, 笔者可以将系统(1)描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_1 x_2 + F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = c_2 x_3 + F_2(\bar{x}_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = c_n u + F_n(\bar{x}_n, u), \end{cases} \quad (16)$$

式中: $F_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - c_i x_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1, F_n(\bar{x}_n, u) = f_n(\bar{x}_n, u) - c_n u$ 为新的未知的光滑非线性函数, $c_i (i = 1, \dots, n)$ 为未知的常数, 且 c_i 的符号与 g_i 的符号一致.

在此, 由假设2可知, 转换后的系统(16)中增益 c_i 的符号已知. 下面将给出backstepping设计过程. 设计过程中包括 n 步, 在前 $n - 1$ 步中, 状态变量 $x_{i+1} (i = 1, \dots, n - 1)$ 作为虚拟控制量. 首先设计期望的虚拟控制量 $\alpha_i (i = 1, \dots, n - 1)$, 最后在第 n 步中设计出控制量. 定义新的状态变量

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_2 - \alpha_1, \\ \vdots \\ z_n = x_n - \alpha_{n-1}. \end{cases} \quad (17)$$

Step 1 定义 $\rho_1 = 1/c_1$, 选取虚拟控制 α_1 为

$$\alpha_1 = \hat{\rho}_1 \bar{\alpha}_1, \quad (18)$$

式中 $\hat{\rho}_1$ 为 ρ_1 的估计值, 对 z_1 微分得

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= F_1(x_1, x_2) + c_1 z_2 + c_1 \alpha_1 = \\ &= F_1(x_1, x_2) + c_1 z_2 + \bar{\alpha}_1 + c_1 \tilde{\rho}_1 \bar{\alpha}_1, \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $\tilde{\rho}_1 = \hat{\rho}_1 - \rho_1$. 本文可将式(19)重新写成

$$\dot{z}_1 = \mathbf{W}_1^* \phi_1^*(x_1, x_2) + \varepsilon_1 + c_1 z_2 + \bar{\alpha}_1 + c_1 \tilde{\rho}_1 \bar{\alpha}_1, \quad (20)$$

式中: $\mathbf{W}_1^* \phi_1^*(x_1, x_2)$ 为理想的RBFNN, ε_1 为逼近误差. 本文可设计期望的虚拟控制为

$$\bar{\alpha}_1 = -k_1 z_1 - \hat{\mathbf{W}}_1 \hat{\phi}_1(x_1, x_2) - v_1, \quad (21)$$

式中: $k_1 > 0$ 为待设计的常数, $\hat{\mathbf{W}}_1, \hat{\phi}_1$ 分别为最优权重 \mathbf{W}_1^* 和最优基函数 ϕ_1^* 的估计值, v_1 为引入的鲁棒项, 由式(30)给出. 选取Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{|c_1|}{2\gamma_1} \tilde{\rho}_1^2 + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_1] + \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \Gamma_{\mu_1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1] + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \Gamma_{\sigma_1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1], \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $\tilde{\mathbf{W}}_1 = \hat{\mathbf{W}}_1 - \mathbf{W}_1^*, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1 = \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1^*, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 - \boldsymbol{\sigma}_1^*, \hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1$ 分别为相应的最优中心点值 $\boldsymbol{\mu}_1^*$ 和最优影响范围 $\boldsymbol{\sigma}_1^*$ 的估计值, $\Gamma_{W_1} = \Gamma_{W_1}^T > 0, \Gamma_{\mu_1} = \Gamma_{\mu_1}^T > 0, \Gamma_{\sigma_1} = \Gamma_{\sigma_1}^T > 0, \gamma_1 > 0$ 为设计参数. 对 V_1 求得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 + \frac{|c_1|}{\gamma_1} \tilde{\rho}_1 \dot{\tilde{\rho}}_1 + \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1] + \\ &= \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \Gamma_{\mu_1}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_1] + \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \Gamma_{\sigma_1}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_1] = \\ &= z_1 [\bar{\alpha}_1 + c_1 z_2 + c_1 \tilde{\rho}_1 \bar{\alpha}_1 + \mathbf{W}_1^* \phi_1^*(x_1, x_2) + \varepsilon_1] + \\ &= \frac{|c_1|}{\gamma_1} \tilde{\rho}_1 \dot{\tilde{\rho}}_1 + \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1] + \\ &= \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \Gamma_{\mu_1}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_1] + \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \Gamma_{\sigma_1}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_1]. \end{aligned} \quad (23)$$

将式(21)代入上式得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -k_1 z_1^2 + \frac{|c_1|}{\gamma_1} \tilde{\rho}_1 [\dot{\rho}_1 + \gamma_1 \text{sgn}(c_1) z_1 \bar{\alpha}_1] + \\ & z_1 [\mathbf{W}_1^* \phi_1^*(x_1, x_2) - \hat{\mathbf{W}}_1 \hat{\phi}_1(x_1, x_2)] + \\ & \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1] + \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \Gamma_{\mu_1}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_1] + \\ & \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \Gamma_{\sigma_1}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_1] + c_1 z_1 z_2 - v_1 z_1 + z_1 \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (24)$$

由式(3)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -k_1 z_1^2 + c_1 z_1 z_2 - v_1 z_1 + z_1 \varepsilon_1 + \\ & \frac{|c_1|}{\gamma_1} \tilde{\rho}_1 [\dot{\rho}_1 + \gamma_1 \text{sgn}(c_1) z_1 \bar{\alpha}_1] - \\ & z_1 [\tilde{\mathbf{W}}_1^T (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}'_{\mu_1} * \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 - \hat{\phi}'_{\sigma_1} * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1) + \\ & \hat{\mathbf{W}}_1^T (\hat{\phi}'_{\mu_1} * \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 + \hat{\phi}'_{\sigma_1} * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1) + d_{1u}] + \\ & \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1] + \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \Gamma_{\mu_1}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_1] + \\ & \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \Gamma_{\sigma_1}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_1]. \end{aligned} \quad (25)$$

选择参数 ρ_1 和神经网络参数自适应调节律为

$$\dot{\rho}_1 = -\gamma_1 \text{sgn}(c_1) z_1 \bar{\alpha}_1 - \gamma_1 \hat{\rho}_1, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 = & \Gamma_{W_1} (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}'_{\mu_1} * \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 - \hat{\phi}'_{\sigma_1} * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1) z_1 - \\ & \Gamma_{W_1} \delta_{W_1} \hat{\mathbf{W}}_1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\mu}}}_1 = \Gamma_{\mu_1} \hat{\phi}'_{\mu_1} * (\hat{\mathbf{W}}_1 z_1) - \Gamma_{\mu_1} \delta_{\mu_1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \quad (28)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_1 = \Gamma_{\sigma_1} \hat{\phi}'_{\sigma_1} * (\hat{\mathbf{W}}_1 z_1) - \Gamma_{\sigma_1} \delta_{\sigma_1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1, \quad (29)$$

其中 $\gamma_1, \delta_{W_1}, \delta_{\mu_1}, \delta_{\sigma_1} > 0$ 为设计参数. 令引入的鲁棒项为

$$\begin{aligned} \nu_1 = & z_1 (\|\hat{\mathbf{W}}_1^T \hat{\phi}'_{\mu_1}\|^2 + \|\hat{\mathbf{W}}_1^T \hat{\phi}'_{\sigma_1}\|^2 + \\ & \|\hat{\phi}'_{\mu_1} * \hat{\boldsymbol{\mu}}_1\|^2 + \|\hat{\phi}'_{\sigma_1} * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\|^2) / \eta_1, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\eta_1 > 0$ 为设计参数. 将式(26)(29)代入式(25), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -k_1 z_1^2 + c_1 z_1 z_2 - v_1 z_1 + z_1 \varepsilon_1 - \\ & d_{1u} z_1 - |c_1| \tilde{\rho}_1 \hat{\rho}_1 - \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_1^T \delta_{W_1} \hat{\mathbf{W}}_1) - \\ & \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \delta_{\mu_1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_1) - \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \delta_{\sigma_1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1). \end{aligned} \quad (31)$$

由于逼近定理知神经网络的逼近误差最终有界, 不妨设 $|\varepsilon_1| \leq \varepsilon_{1H}$, 并利用

$$\begin{aligned} \|z_1\| \|\boldsymbol{\mu}_1^*\| \|\hat{\mathbf{W}}_1^T \hat{\phi}'_{\mu_1}\| & \leq \\ \|z_1\|^2 \frac{\|\hat{\mathbf{W}}_1^T \hat{\phi}'_{\mu_1}\|^2}{\eta_1} + \frac{\eta_1}{4} \|\boldsymbol{\mu}_1^*\|^2, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \|z_1\| \|\boldsymbol{\sigma}_1^*\| \|\hat{\mathbf{W}}_1^T \hat{\phi}'_{\sigma_1}\| & \leq \\ \|z_1\|^2 \frac{\|\hat{\mathbf{W}}_1^T \hat{\phi}'_{\sigma_1}\|^2}{\eta_1} + \frac{\eta_1}{4} \|\boldsymbol{\sigma}_1^*\|^2, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \|z_1\| \|\mathbf{W}_1^{*T}\| \|\hat{\phi}'_{\mu_1} * \hat{\boldsymbol{\mu}}_1\| & \leq \\ \|z_1\|^2 \frac{\|\hat{\phi}'_{\mu_1} * \hat{\boldsymbol{\mu}}_1\|^2}{\eta_1} + \frac{\eta_1}{4} \|\mathbf{W}_1^{*T}\|^2, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\|z_1\| \|\mathbf{W}_1^{*T}\| \|\hat{\phi}'_{\sigma_1} * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\| \leq$$

$$\|z_1\|^2 \frac{\|\hat{\phi}'_{\sigma_1} * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\|^2}{\eta_1} + \frac{\eta_1}{4} \|\mathbf{W}_1^{*T}\|^2, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \|z_1\| (\sqrt{l} \|\mathbf{W}_1^{*T}\| + \varepsilon_{1H}) & \leq \\ \frac{2\|z_1\|^2}{\eta_1} + \frac{l\eta_1}{4} \|\mathbf{W}_1^{*T}\|^2 + \frac{\eta_1}{4} \varepsilon_{1H}^2, \end{aligned} \quad (36)$$

且注意到

$$2\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_1^T \hat{\mathbf{W}}_1) \geq \|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 - \|\mathbf{W}_1^*\|^2, \quad (37)$$

$$2\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_1) \geq \|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1\|^2 - \|\boldsymbol{\mu}_1^*\|^2, \quad (38)$$

$$2\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1) \geq \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}_1^*\|^2, \quad (39)$$

$$2\tilde{\rho}_1 \hat{\rho}_1 \geq \|\tilde{\rho}_1\|^2 - \|\rho_1\|^2. \quad (40)$$

将 v_1 代入式(31)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -k_1 z_1^2 + c_1 z_1 z_2 - |c_1| \tilde{\rho}_1 \hat{\rho}_1 - \\ & \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_1^T \delta_{W_1} \hat{\mathbf{W}}_1) - \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \delta_{\mu_1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_1) - \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \delta_{\sigma_1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1) - \\ & v_1 z_1 + \|z_1\| \varepsilon_{1H} - \|d_{1u}\| \|z_1\| \leq \\ & -k_1 z_1^2 + c_1 z_1 z_2 - \frac{|c_1|}{2} (\|\tilde{\rho}_1\|^2 - \|\rho_1\|^2) - \\ & \frac{\delta_{W_1}}{2} (\|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 - \|\mathbf{W}_1^*\|^2) - \frac{\delta_{\mu_1}}{2} (\|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1\|^2 - \|\boldsymbol{\mu}_1^*\|^2) - \\ & \frac{\delta_{\sigma_1}}{2} (\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}_1^*\|^2) + \frac{(2\eta_1 + l\eta_1)}{4} \|\mathbf{W}_1^{*T}\|^2 + \\ & \frac{\eta_1}{4} \|\boldsymbol{\mu}_1^*\|^2 + \frac{\eta_1}{4} \|\boldsymbol{\sigma}_1^*\|^2 + \frac{\eta_1}{4} \varepsilon_{1H}^2 \leq \\ & -k_1 z_1^2 + c_1 z_1 z_2 - \frac{|c_1|}{2} \|\tilde{\rho}_1\|^2 - \frac{\delta_{W_1}}{2} \|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 - \\ & \frac{\delta_{\mu_1}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1\|^2 - \frac{\delta_{\sigma_1}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1\|^2 + \Delta_1, \end{aligned} \quad (41)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{|c_1|}{2} \|\rho_1\|^2 + \frac{(2\delta_{W_1} + 2\eta_1 + l\eta_1)}{4} \|\mathbf{W}_1^{*T}\|^2 + \\ & \frac{2\delta_{\mu_1} + \eta_1}{4} \|\boldsymbol{\mu}_1^*\|^2 + \frac{2\delta_{\sigma_1} + \eta_1}{4} \|\boldsymbol{\sigma}_1^*\|^2 + \frac{\eta_1}{4} \varepsilon_{1H}^2. \end{aligned}$$

Step 2 对 z_2 微分得

$$\dot{z}_2 = F_2(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) + c_2 x_3 - \dot{\alpha}_1. \quad (42)$$

定义 $\rho_2 = 1/c_2$, 选取虚拟控制 α_2 为

$$\alpha_2 = \hat{\rho}_2 \bar{\alpha}_2, \quad (43)$$

式中 $\hat{\rho}_2$ 为 ρ_2 的估计值, 则式(42)可以写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & F_2(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) + c_2(z_3 + \alpha_2) - \dot{\alpha}_1 = \\ & F_2(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) + c_2 z_3 + c_2 \hat{\rho}_2 \bar{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1 = \\ & F_2(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) + c_2 z_3 + \bar{\alpha}_2 + c_2 \tilde{\rho}_2 \bar{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1, \end{aligned} \quad (44)$$

式中 $\tilde{\rho}_2 = \hat{\rho}_2 - \rho_2$. 将式(44)重新写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \mathbf{W}_2^* \phi_2^*(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) + \varepsilon_2 + \\ & c_2 z_3 + \bar{\alpha}_2 + c_2 \tilde{\rho}_2 \bar{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1, \end{aligned} \quad (45)$$

式中: $\mathbf{W}_2^* \phi_2^*(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3)$ 为理想的RBFNN, ε_2 为RBFNN

逼近误差, 本文可设计期望的虚拟控制为

$$\bar{\alpha}_2 = -k_2 z_2 - \hat{c}_1 z_1 + \dot{\alpha}_1 - \hat{\mathbf{W}}_2 \hat{\phi}_2(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) - v_2, \quad (46)$$

式中: $k_2 > 0$ 为待设计的常数, $\hat{\mathbf{W}}_2, \hat{\phi}_2$ 分别为最优权重 \mathbf{W}_2^* 和最优基函数 ϕ_2^* 的估计值, v_2 为引入的鲁棒项, 由式(58)给出. 在式(46)中, 由于 α_1 由神经网络、鲁棒项以及参数 $\hat{\rho}_1$ 构成, 求其导数很复杂, 在此引入跟踪微分器对其导数及其本身进行估计, 从而避免了直接对其求导. 下面构建二阶有限时间收敛微分器^[27]:

$$\begin{cases} \dot{v}_{1,1} = v_{1,2}, \\ \xi^2 \dot{v}_{1,2} = f(v_{1,1} - \alpha_1, \xi v_{1,2}), \end{cases} \quad (47)$$

式中: $v_{1,1}, v_{1,2}$ 是跟踪微分器的状态, ξ 为摄动参数. $f(\cdot)$ 是连续函数且 $f(0) = 0$, 本文所有微分器中的函数选择为

$$f(v_{i-1,1} - \alpha_{i-1}, \xi v_{i-1,2}) = -2(v_{i-1,1} - \alpha_{i-1}) - \xi v_{i-1,2}.$$

微分器(47)的功能是在有限时间内让 $v_{1,1}$ 跟踪虚拟控制信号 α_1 , 同时 $v_{1,2}$ 跟踪虚拟控制信号 α_1 的导数.

则期望的虚拟控制式(46)可改写成下式:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2 &= -k_2 z_2 - k_{v1} z_2 - \hat{c}_1 z_1 + \\ &v_{1,2} - \hat{\mathbf{W}}_2 \hat{\phi}_2(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) - v_2, \end{aligned} \quad (48)$$

式中: \hat{c}_1 为 c_1 的估计值; $v_{1,2}$ 为微分器(47)的状态, 即 α_1 导数的估计; $k_{v1} > 0$ 为待设计的常数, $k_{v1} z_2$ 是非线性阻滞项, 以便抵消由于引入 $v_{1,2}$ 带来的误差.

选取Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{|c_2|}{2\gamma_2} \tilde{\rho}_2^2 + \\ &\frac{1}{2\lambda_1} \tilde{c}_1^2 + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_2] + \\ &\frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_2^T \Gamma_{\mu_2}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_2] + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^T \Gamma_{\sigma_2}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2], \end{aligned} \quad (49)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_2 &= \hat{\rho}_2 - \rho_2, \quad \tilde{c}_1 = \hat{c}_1 - c_1, \\ \tilde{\mathbf{W}}_2 &= \hat{\mathbf{W}}_2 - \mathbf{W}_2^*, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}_2 = \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 - \boldsymbol{\mu}_2^*, \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \boldsymbol{\sigma}_2^*, \quad \Gamma_{W_2} = \Gamma_{W_2}^T > 0, \\ \Gamma_{\mu_2} &= \Gamma_{\mu_2}^T > 0, \quad \Gamma_{\sigma_2} = \Gamma_{\sigma_2}^T > 0, \end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{\mu}}_2, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$ 分别为相应的最优中心点值 $\boldsymbol{\mu}_2^*$ 和最优影响范围 $\boldsymbol{\sigma}_2^*$ 的估计值, $\gamma_2, \lambda_1 > 0$ 为设计参数. 对 V_2 求得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 + \frac{|c_2|}{\gamma_2} \tilde{\rho}_2 \dot{\rho}_2 + \\ &\frac{1}{\lambda_1} \tilde{c}_1 \dot{c}_1 + \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2] + \\ &\text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_2^T \Gamma_{\mu_2}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_2] + \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^T \Gamma_{\sigma_2}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_2] \leq \\ &-k_1 z_1^2 + c_1 z_1 z_2 - \frac{|c_1|}{2} \|\tilde{\rho}_1\|^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\delta_{W_1}}{2} \|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 - \frac{\delta_{\mu_1}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1\|^2 - \frac{\delta_{\sigma_1}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1\|^2 + \\ &\Delta_1 + z_2 [\mathbf{W}_2^* \phi_2^*(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) + \varepsilon_2 + c_2 z_3 + \\ &\bar{\alpha}_2 + c_2 \tilde{\rho}_2 \bar{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1] + \\ &\frac{|c_2|}{\gamma_2} \tilde{\rho}_2 \dot{\rho}_2 + \frac{1}{\lambda_1} \tilde{c}_1 \dot{c}_1 + \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2] + \\ &\text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_2^T \Gamma_{\mu_2}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_2] + \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^T \Gamma_{\sigma_2}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_2]. \end{aligned} \quad (50)$$

将式(48)代入上式得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -k_1 z_1^2 - \frac{|c_1|}{2} \|\tilde{\rho}_1\|^2 - \frac{\delta_{W_1}}{2} \|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 - \\ &\frac{\delta_{\mu_1}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1\|^2 - \frac{\delta_{\sigma_1}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1\|^2 + \Delta_1 - \\ &k_2 z_2^2 + c_2 z_2 z_3 - \tilde{c}_1 z_1 z_2 + c_2 \tilde{\rho}_2 z_2 \bar{\alpha}_2 - \\ &k_{v2} z_2^2 + z_2 (v_{1,2} - \dot{\alpha}_1) + \frac{1}{\lambda_1} \tilde{c}_1 \dot{c}_1 - \\ &z_2 [\hat{\mathbf{W}}_2 \hat{\phi}_2(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) - \mathbf{W}_2^* \phi_2^*(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3)] + \\ &\text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2] + \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_2^T \Gamma_{\mu_2}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_2] + \\ &\text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^T \Gamma_{\sigma_2}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_2] + z_2 \varepsilon_2 - z_2 v_2 + \frac{|c_2|}{\gamma_2} \tilde{\rho}_2 \dot{\rho}_2. \end{aligned} \quad (51)$$

由式(3)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -k_1 z_1^2 - \frac{|c_1|}{2} \|\tilde{\rho}_1\|^2 - \frac{\delta_{W_1}}{2} \|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 - \\ &\frac{\delta_{\mu_1}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1\|^2 - \frac{\delta_{\sigma_1}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1\|^2 + \Delta_1 - k_2 z_2^2 + \\ &\tilde{c}_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} \dot{c}_1 - z_1 z_2 \right) + \text{tr}[\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2] + \\ &c_2 z_2 z_3 + z_2 \varepsilon_2 - z_2 v_2 + \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_2^T \Gamma_{\mu_2}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_2] + \\ &\text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^T \Gamma_{\sigma_2}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_2] - k_{v2} z_2^2 + z_2 (v_{1,2} - \dot{\alpha}_1) + \\ &\frac{|c_2|}{\gamma_2} \tilde{\rho}_2 (\dot{\rho}_2 + \gamma_2 \text{sgn}(c_2) z_2 \bar{\alpha}_2) - \\ &z_2 [\tilde{\mathbf{W}}_2^T (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}'_{\mu_2} \cdot * \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 - \hat{\phi}'_{\sigma_2} \cdot * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2) + \\ &\hat{\mathbf{W}}_2^T (\hat{\phi}'_{\mu_2} \cdot * \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 + \hat{\phi}'_{\sigma_2} \cdot * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2) + d_{2u}]. \end{aligned} \quad (52)$$

选择参数 ρ_2, c_1 和神经网络参数自适应调节律为

$$\dot{\rho}_2 = -\gamma_2 \text{sgn}(c_2) z_2 \bar{\alpha}_2 - \gamma_2 \hat{\rho}_2, \quad (53)$$

$$\dot{c}_1 = \lambda_1 z_1 z_2 - \lambda_1 \hat{c}_1, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2 &= \Gamma_{W_2} (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}'_{\mu_2} \cdot * \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 - \\ &\hat{\phi}'_{\sigma_2} \cdot * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2) z_2 - \Gamma_{W_2} \delta_{W_2} \tilde{\mathbf{W}}_2, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}_2 = \Gamma_{\mu_2} \hat{\phi}'_{\mu_2} \cdot * (\hat{\mathbf{W}}_2 z_2) - \Gamma_{\mu_2} \delta_{\mu_2} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_2, \quad (56)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_2 = \Gamma_{\sigma_2} \hat{\phi}'_{\sigma_2} \cdot * (\hat{\mathbf{W}}_2 z_2) - \Gamma_{\sigma_2} \delta_{\sigma_2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2, \quad (57)$$

其中 $\gamma_2, \lambda_1, \delta_{W_2}, \delta_{\mu_2}, \delta_{\sigma_2} > 0$ 为设计参数.

令引入的鲁棒项为

$$v_2 = \frac{z_2}{\eta_2} (\|\hat{\mathbf{W}}_2^T \hat{\phi}'_{\mu_2} \cdot \|^2 + \|\hat{\mathbf{W}}_2^T \hat{\phi}'_{\sigma_2} \cdot \|^2 + \|\hat{\phi}'_{\mu_2} \cdot * \hat{\boldsymbol{\mu}}_2\|^2 + \|\hat{\phi}'_{\sigma_2} \cdot * \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\|^2), \quad (58)$$

其中 $\eta_2 > 0$ 为设计参数. 由于逼近定理知神经网络的逼近误差最终有界, 不妨设 $|\varepsilon_2| \leq \varepsilon_{2H}$, 将式(53)(57)代入式(52), 同理, 利用第1步中所用的不等式得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 z_1^2 - \frac{|c_1|}{2} \|\tilde{\rho}_1\|^2 - \frac{\delta_{W_1}}{2} \|\tilde{W}_1\|^2 - \\ & \frac{\delta_{\mu_1}}{2} \|\tilde{\mu}_1\|^2 - \frac{\delta_{\sigma_1}}{2} \|\tilde{\sigma}_1\|^2 + \Delta_1 - k_2 z_2^2 + \\ & c_2 z_2 z_3 - v_2 z_2 + z_2 \varepsilon_2 - d_{2u} z_2 \\ & - |c_2| \tilde{\rho}_2 \hat{\rho}_2 - \tilde{c}_1 \hat{c}_1 - \text{tr}(\tilde{W}_1^T \delta_{W_1} \hat{W}_1) - \\ & \text{tr}(\tilde{\mu}_1^T \delta_{\mu_1} \hat{\mu}_1) - \text{tr}(\tilde{\sigma}_1^T \delta_{\sigma_1} \hat{\sigma}_1) - \\ & k_{v_2} z_2^2 + z_2 (v_{1,2} - \dot{\alpha}_1) \leq \\ & -k_1 z_1^2 - \frac{|c_1|}{2} \|\tilde{\rho}_1\|^2 - \frac{\delta_{W_1}}{2} \|\tilde{W}_1\|^2 - \\ & \frac{\delta_{\mu_1}}{2} \|\tilde{\mu}_1\|^2 - \frac{\delta_{\sigma_1}}{2} \|\tilde{\sigma}_1\|^2 + \Delta_1 - k_2 z_2^2 + \\ & c_2 z_2 z_3 - \frac{\delta_{W_2}}{2} (\|\tilde{W}_2\|^2 - \|\mathbf{W}_2^*\|^2) + \frac{\eta_2}{4} \varepsilon_{2H}^2 - \\ & \frac{1}{2} (\|\tilde{c}_1\|^2 - \|c_1\|^2) - \frac{\delta_{\mu_2}}{2} (\|\tilde{\mu}_2\|^2 - \|\mu_2^*\|^2) - \\ & \frac{\delta_{\sigma_2}}{2} (\|\tilde{\sigma}_2\|^2 - \|\sigma_2^*\|^2) - \frac{|c_2|}{2} (\|\tilde{\rho}_2\|^2 - \|\rho_2\|^2) + \\ & \frac{2\eta_2 + l\eta_2}{4} \|\mathbf{W}_2^{*T}\|^2 + \frac{\eta_2}{4} \|\mu_2^*\|^2 + \frac{\eta_2}{4} \|\sigma_2^*\|^2 - \\ & k_{v_2} (z_2 - \frac{(v_{1,2} - \dot{\alpha}_1)^2}{2k_{v_2}})^2 + \frac{(v_{1,2} - \dot{\alpha}_1)^2}{4k_{v_2}} \leq \\ & -k_1 z_1^2 - \frac{|c_1|}{2} \|\tilde{\rho}_1\|^2 - \frac{\delta_{W_1}}{2} \|\tilde{W}_1\|^2 - \frac{\delta_{\mu_1}}{2} \|\tilde{\mu}_1\|^2 - \\ & \frac{\delta_{\sigma_1}}{2} \|\tilde{\sigma}_1\|^2 - k_2 z_2^2 + c_2 z_2 z_3 - \frac{|c_2|}{2} \|\tilde{\rho}_2\|^2 - \\ & \frac{1}{2} \|\tilde{c}_1\|^2 - \frac{\delta_{W_2}}{2} \|\tilde{W}_2\|^2 - \frac{\delta_{\mu_2}}{2} \|\tilde{\mu}_2\|^2 - \\ & \frac{\delta_{\sigma_2}}{2} \|\tilde{\sigma}_2\|^2 + \Delta_2 - k_{v_2} (z_2 - \frac{(v_{1,2} - \dot{\alpha}_1)^2}{2k_{v_2}})^2, \quad (59) \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \Delta_1 + \frac{|c_2|}{2} \|\rho_2\|^2 + \frac{1}{2} \|c_1\|^2 + \frac{(v_{1,2} - \dot{\alpha}_1)^2}{4k_{v_2}} + \\ & \frac{(2\delta_{W_2} + 2\eta_2 + l\eta_2)}{4} \|\mathbf{W}_2^{*T}\|^2 + \frac{\eta_2}{4} \varepsilon_{2H}^2 + \\ & \frac{2\delta_{\mu_2} + \eta_2}{4} \|\mu_2^*\|^2 + \frac{2\delta_{\sigma_2} + \eta_2}{4} \|\sigma_2^*\|^2, \end{aligned}$$

Δ_2 中第4项 $(v_{1,2} - \dot{\alpha}_1)^2 / (4k_{v_2})$ 与设计的跟踪微分器(47)有关, 很显然它是有界的, 因为式(47)是收敛的跟踪微分器.

Step i ($3 \leq i \leq n-1$)对微分得

$$\dot{z}_i = F_i(\bar{x}_i + x_{i+1}) + c_i x_{i+1} - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (60)$$

定义 $\rho_i = 1/c_i$, 选取虚拟控制 α_i 为

$$\alpha_i = \hat{\rho}_i \bar{\alpha}_i, \quad (61)$$

式中 $\hat{\rho}_i$ 为 ρ_i 的估计值, 则式(60)可以写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = & F_i(\bar{x}_i + x_{i+1}) + c_i (z_{i+1} + \alpha_i) - \dot{\alpha}_{i-1} = \\ & F_i(\bar{x}_i + x_{i+1}) + c_i z_{i+1} + c_i \hat{\rho}_i \bar{\alpha}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = \\ & F_i(\bar{x}_i + x_{i+1}) + c_i z_{i+1} + \bar{\alpha}_i + c_i \tilde{\rho}_i \bar{\alpha}_i - \dot{\alpha}_{i-1}, \quad (62) \end{aligned}$$

式中 $\tilde{\rho}_i = \hat{\rho}_i - \rho_i$, 根据万能逼近定理, 本文可以将式(62)重新写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = & \mathbf{W}_i^* \phi_i^*(\bar{x}_i, x_{i+1}) + \varepsilon_i + c_i z_{i+1} + \\ & \bar{\alpha}_i + c_i \tilde{\rho}_i \bar{\alpha}_i - \dot{\alpha}_{i-1}, \quad (63) \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{W}_i^* \phi_i^*(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 为理想的RBFNN, 本文可以设计期望的虚拟控制为

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i = & -k_i z_i - \hat{c}_{i-1} z_{i-1} + \dot{\alpha}_{i-1} - \\ & \hat{W}_i \hat{\phi}_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - v_i, \quad (64) \end{aligned}$$

式中: $k_i > 0$ 为待设计的常数, $\hat{W}_i, \hat{\phi}_i$ 分别为最优权重 \mathbf{W}_i^* 和最优基函数 ϕ_i^* 的估计值, v_i 为引入的鲁棒项.

令引入的鲁棒项为

$$\begin{aligned} v_i = & z_i (\|\hat{W}_i^T \hat{\phi}_{\mu_i}'\|^2 + \|\hat{W}_i^T \hat{\phi}_{\sigma_i}'\|^2 + \\ & \|\hat{\phi}_{\mu_i}' * \hat{\mu}_i\|^2 + \|\hat{\phi}_{\sigma_i}' * \hat{\sigma}_i\|^2) / \eta_i, \quad (65) \end{aligned}$$

其中 $\eta_i > 0$ 为设计参数. 由于逼近定理知神经网络的逼近误差最终有界, 不妨设 $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{iH}$.

在式(64)中, 由于 α_{i-1} 由神经网络、鲁棒项以及参数 $\hat{\rho}_{i-1}, \hat{c}_{i-2}$ ($3 \leq i \leq n-1$)构成, 求其导数很复杂, 同理, 在此本文引入跟踪微分器对其导数及其本身进行估计, 从而避免了直接对其求导. 下面是构建的二阶有限时间收敛微分器:

$$\begin{cases} \dot{v}_{i-1,1} = v_{i-1,2}, \\ \xi^2 \dot{v}_{i-1,2} = f(v_{i-1,1} - \alpha_{i-1}, \xi v_{i-1,2}), \end{cases} \quad (66)$$

式中 $v_{i-1,1}, v_{i-1,2}$ 是跟踪微分器的状态, ξ 为摄动参数.

则期望的虚拟控制式(64)可以改写成下式:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i = & -k_i z_i - k_{v(i-1)} z_i - \hat{c}_{i-1} z_{i-1} + \\ & v_{i-1,2} - \hat{W}_i \hat{\phi}_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - v_i, \quad (67) \end{aligned}$$

式中: \hat{c}_{i-1} 为 c_{i-1} 的估计值; $v_{i-1,2}$ 为微分器(66)的状态, 即 α_{i-1} 导数的估计; $k_{v(i-1)} > 0$ 为待设计的常数, $k_{v(i-1)} z_i$ 是非线性阻滞项, 以便抵消由于引入 $v_{i-1,2}$ 带来的误差. 选取Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V_i = & V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{|c_i|}{2\gamma_i} \tilde{\rho}_i^2 + \frac{1}{2\lambda_{i-1}} \tilde{c}_{i-1}^2 + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{W}_i^T \Gamma_{W_i}^{-1} \tilde{W}_i] + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\mu}_i^T \Gamma_{\mu_i}^{-1} \tilde{\mu}_i] + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\sigma}_i^T \Gamma_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\sigma}_i], \quad (68) \end{aligned}$$

其中: $\tilde{\rho}_i = \hat{\rho}_i - \rho_i, \tilde{c}_{i-1} = \hat{c}_{i-1} - c_{i-1}, \tilde{W}_i = \hat{W}_i - \mathbf{W}_i^*, \tilde{\mu}_i = \hat{\mu}_i - \mu_i^*, \tilde{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i - \sigma_i^*, \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i$ 分别为相应

的最优中心点值 μ_i^* 和最优影响范围 σ_i^* 的估计值, $\Gamma_{W_i} = \Gamma_{W_i}^T > 0$, $\Gamma_{\mu_i} = \Gamma_{\mu_i}^T > 0$, $\Gamma_{\sigma_i} = \Gamma_{\sigma_i}^T > 0$, $\gamma_i, \lambda_{i-1} > 0$ 为设计参数.

选择参数 ρ_i, c_{i-1} 和神经网络参数自适应调节律为

$$\dot{\hat{\rho}}_i = -\gamma_i \text{sgn}(c_i) z_i \bar{\alpha}_i - \gamma_i \hat{\rho}_i, \quad (69)$$

$$\dot{\hat{c}}_{i-1} = \lambda_{i-1} z_{i-1} z_i - \lambda_{i-1} \hat{c}_{i-1}, \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_i = \Gamma_{W_i} (\hat{\phi}_i - \hat{\phi}'_{\mu_i} \cdot * \hat{\mu}_i - \hat{\phi}'_{\sigma_i} \cdot * \hat{\sigma}_i) z_i - \\ \Gamma_{W_i} \delta_{W_i} \hat{W}_i, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\dot{\hat{\mu}}_i = \Gamma_{\mu_i} \hat{\phi}'_{\mu_i} \cdot * (\hat{W}_i z_i) - \Gamma_{\mu_i} \delta_{\mu_i} \hat{\mu}_i, \quad (72)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_i = \Gamma_{\sigma_i} \hat{\phi}'_{\sigma_i} \cdot * (\hat{W}_i z_i) - \Gamma_{\sigma_i} \delta_{\sigma_i} \hat{\sigma}_i, \quad (73)$$

其中 $\gamma_i, \lambda_{i-1}, \delta_{W_i}, \delta_{\mu_i}, \delta_{\sigma_i} > 0$ 为设计参数.

同理, 利用第2步中的思路, 对式(68)微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq - \sum_{j=1}^i (k_j z_j^2 + \frac{|c_i|}{2} \|\tilde{\rho}_i\|^2 + \frac{\delta_{W_j}}{2} \|\tilde{W}_j\|^2 + \\ \frac{\delta_{\mu_j}}{2} \|\tilde{\mu}_j\|^2 + \frac{\delta_{\sigma_j}}{2} \|\tilde{\sigma}_j\|^2) - \\ \sum_{j=2}^i [k_{v(j-1)} (z_j - \frac{(v_{j-1,2} - \dot{\alpha}_{j-1})}{2k_{v(j-1)}})^2 + \\ \frac{1}{2} |\tilde{c}_{j-1}|^2] + c_i z_i z_{i+1} + \Delta_i, \end{aligned} \quad (74)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta_i = \\ \Delta_{i-1} + \frac{|c_i|}{2} \|\rho_2\|^2 + \frac{1}{2} |c_{i-1}|^2 + \frac{(v_{i-1,2} - \dot{\alpha}_{i-1})^2}{4k_{v_i}} + \\ \frac{(2\delta_{W_i} + 2\eta_i + l\eta_i)}{4} \|\mathbf{W}_i^{*T}\|^2 + \frac{2\delta_{\mu_i} + \eta_i}{4} \|\mu_i^*\|^2 + \\ \frac{2\delta_{\sigma_i} + \eta_i}{4} \|\sigma_i^*\|^2 + \frac{\eta_i}{4} \varepsilon_{iH}^2, \end{aligned}$$

Δ_2 中第4项 $(v_{i-1,2} - \dot{\alpha}_{i-1})^2 / (4k_{v_i})$ 与设计的跟踪微分器(66)有关, 很显然它是有界的, 因为式(66)是收敛的跟踪微分器.

Step n 对 z_n 微分得

$$\dot{z}_n = F_n(\bar{\mathbf{x}}_n + u) + c_n u - \dot{\alpha}_{n-1}. \quad (75)$$

定义 $\rho_n = 1/c_n$, 选取控制 u 为

$$u = \hat{\rho}_n \bar{u}, \quad (76)$$

式中 $\hat{\rho}_n$ 为 ρ_n 的估计值, 则式(75)可以写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = F_n(\bar{\mathbf{x}}_n + u) + c_n \hat{\rho}_n \bar{u} - \dot{\alpha}_{i-1} = \\ F_n(\bar{\mathbf{x}}_n + u) + \bar{u} + c_n \tilde{\rho}_n \bar{u} - \dot{\alpha}_{i-1}, \end{aligned} \quad (77)$$

式中 $\tilde{\rho}_n = \hat{\rho}_n - \rho_n$, 根据万能逼近定理, 最后的控制本文可以将式(77)重新写成

$$\dot{z}_n = \mathbf{W}_n^* \phi_n^*(\bar{\mathbf{x}}_n, u) + \varepsilon_n + \bar{u} + c_n \tilde{\rho}_n \bar{u} - \dot{\alpha}_{n-1}, \quad (78)$$

式中 $\mathbf{W}_n^* \phi_n^*(\bar{\mathbf{x}}_n, u)$ 为理想的RBFNN, 本文可以设计

期望的控制为

$$\begin{aligned} \bar{u} = -k_n z_n - \hat{c}_{n-1} z_{n-1} + \dot{\alpha}_{n-1} - \\ \hat{W}_n \hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, u) - v_n, \end{aligned}$$

式中: $k_n > 0$ 为待设计的常数, $\hat{W}_n, \hat{\phi}_n$ 分别为最优权重 \mathbf{W}_n^* 和最优基函数 ϕ_n^* 的估计值, v_n 为引入的鲁棒项. 由于其他神经网络参数都是系统状态 $x_i (i = 1, \dots, n)$ 的函数, 则由引理3本文可以为 $F_n(\bar{\mathbf{x}}_n + u)$ 构建静态RBF网络, 从而避免了式(79)中代数环的产生, 则式(79)中可以写成

$$\bar{u} = -k_n z_n - \hat{c}_{n-1} z_{n-1} + \dot{\alpha}_{n-1} - \hat{W}_n \hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n) - v_n. \quad (79)$$

令引入的鲁棒项为

$$\begin{aligned} v_n = z_n (\|\hat{W}_n^T \hat{\phi}'_{\mu_n}\|^2 + \|\hat{W}_n^T \hat{\phi}'_{\sigma_n}\|^2 + \\ \|\hat{\phi}'_{\mu_n} \cdot * \hat{\mu}_n\|^2 + \|\hat{\phi}'_{\sigma_n} \cdot * \hat{\sigma}_n\|^2) / \eta_n, \end{aligned} \quad (80)$$

其中 $\eta_n > 0$ 为设计参数. 由于逼近定理知神经网络的逼近误差最终有界, 不妨设 $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon_{nH}$. 在式(80)中, 由于 α_{n-1} 由神经网络、鲁棒项以及参数 $\hat{\rho}_{n-1}, \hat{c}_{n-2}$ 构成, 求其导数很复杂, 同理, 在此本文引入跟踪微分器对其导数及其本身进行估计, 从而避免了直接对其求导. 下面构建二阶有限时间收敛微分器:

$$\begin{cases} \dot{v}_{n-1,1} = v_{n-1,2}, \\ \xi^2 \dot{v}_{n-1,2} = f(v_{n-1,1} - \alpha_{n-1}, \xi v_{n-1,2}), \end{cases} \quad (81)$$

式中: $v_{n-1,1}, v_{n-1,2}$ 是跟踪微分器的状态, ξ 为摄动参数. 则期望的控制式(80)可以改写成下式:

$$\begin{aligned} \bar{u} = -k_n z_n - k_{v(n-1)} z_n - \hat{c}_{n-1} z_{n-1} + \\ v_{n-1,2} - \hat{W}_n \hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n) - v_n, \end{aligned} \quad (82)$$

式中: \hat{c}_{n-1} 为 c_{n-1} 的估计值; $v_{n-1,2}$ 为微分器(82)的状态, 即 α_{n-1} 导数的估计; $k_{v(n-1)} > 0$ 为待设计的常数, 而 $k_{v(n-1)} z_n$ 是非线性阻滞项, 以便抵消由于引入 $v_{n-1,2}$ 带来的误差.

选取Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{|c_n|}{2\gamma_n} \tilde{\rho}_n^2 + \\ \frac{1}{2\lambda_{n-1}} \tilde{c}_{n-1}^2 + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{W}_n^T \Gamma_{W_n}^{-1} \tilde{W}_n] + \\ \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\mu}_n^T \Gamma_{\mu_n}^{-1} \tilde{\mu}_n] + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{\sigma}_n^T \Gamma_{\sigma_n}^{-1} \tilde{\sigma}_n], \end{aligned} \quad (83)$$

其中: $\tilde{\rho}_n = \hat{\rho}_n - \rho_n, \tilde{c}_{n-1} = \hat{c}_{n-1} - c_{n-1}, \tilde{W}_n = \hat{W}_n - \mathbf{W}_n^*, \tilde{\mu}_n = \hat{\mu}_n - \mu_n^*, \tilde{\sigma}_n = \hat{\sigma}_n - \sigma_n^*, \hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n$ 分别为相应的最优中心点值 μ_n^* 和最优影响范围 σ_n^* 的估计值, $\Gamma_{W_n} = \Gamma_{W_n}^T > 0, \Gamma_{\mu_n} = \Gamma_{\mu_n}^T > 0, \Gamma_{\sigma_n} = \Gamma_{\sigma_n}^T > 0, \gamma_n, \lambda_{n-1} > 0$ 为设计参数.

选择参数 ρ_n, c_{n-1} 和神经网络参数自适应调节律

为

$$\dot{\hat{\rho}}_n = -\gamma_n \text{sgn}(c_n) z_n \bar{u} - \gamma_n \hat{\rho}_n, \tag{84}$$

$$\dot{\hat{c}}_{n-1} = \lambda_{n-1} z_{n-1} z_n - \lambda_{n-1} \hat{c}_{n-1}, \tag{85}$$

$$\dot{\hat{W}}_n = \Gamma_{W_n} (\hat{\phi}_n - \hat{\phi}'_{\mu_n} \cdot * \hat{\mu}_n - \hat{\phi}'_{\sigma_n} \cdot * \hat{\sigma}_n) z_n - \Gamma_{W_n} \delta_{W_n} \hat{W}_n, \tag{86}$$

$$\dot{\hat{\mu}}_n = \Gamma_{\mu_n} \hat{\phi}'_{\mu_n} \cdot * (\hat{W}_n z_n) - \Gamma_{\mu_n} \delta_{\mu_n} \hat{\mu}_n, \tag{87}$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_n = \Gamma_{\sigma_n} \hat{\phi}'_{\sigma_n} \cdot * (\hat{W}_n z_n) - \Gamma_{\sigma_n} \delta_{\sigma_n} \hat{\sigma}_n, \tag{88}$$

其中 $\gamma_n, \lambda_{n-1}, \delta_{W_n}, \delta_{\mu_n}, \delta_{\sigma_n} > 0$ 为设计参数。

同理, 利用第2步中的思路, 对式(84)微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\sum_{j=1}^n (k_j z_j^2 + \frac{|c_j|}{2} \|\tilde{\rho}_j\|^2 + \frac{\delta_{W_j}}{2} \|\tilde{W}_j\|^2 + \\ & \frac{\delta_{\mu_j}}{2} \|\tilde{\mu}_j\|^2 + \frac{\delta_{\sigma_j}}{2} \|\tilde{\sigma}_j\|^2) + \Delta_n - \\ & \sum_{j=2}^n [k_{v(j-1)} (z_j - \frac{(v_{j-1,2} - \dot{\alpha}_{j-1})}{2k_{v(j-1)}})^2 + \frac{1}{2} |\tilde{c}_{n-1}|^2], \end{aligned} \tag{89}$$

式中:

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \Delta_{n-1} + \frac{|c_n|}{2} \|\rho_n\|^2 + \frac{1}{2} |c_{n-1}|^2 + \\ & \frac{(v_{n-1,2} - \dot{\alpha}_{n-1})^2}{4k_{v(n-1)}} + \frac{(2\delta_{W_n} + 2\eta_n + l\eta_n)}{4} \|\mathbf{W}_n^{*T}\|^2 + \\ & \frac{2\delta_{\mu_n} + \eta_n}{4} \|\mu_n^*\|^2 + \frac{2\delta_{\sigma_n} + \eta_n}{4} \|\sigma_n^*\|^2 + \frac{\eta_n}{4} \varepsilon_{nH}^2, \end{aligned}$$

Δ_n 中第4项 $(v_{n-1,2} - \dot{\alpha}_{n-1})^2 / 4k_{v(n-1)}$ 与设计的跟踪微分器(82)有关, 很显然它是有界的, 因为式(82)是收敛的跟踪微分器。所以有

$$\dot{V}_n \leq -\beta V_n + \Delta_n, \tag{90}$$

式中

$$\beta = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} \left\{ 2k_i, \gamma_i, \lambda_{j-1}, \frac{\delta_{W_i}}{\lambda_{\max}(\Gamma_{W_i}^{-1})}, \frac{\delta_{\mu_i}}{\lambda_{\max}(\Gamma_{\mu_i}^{-1})}, \frac{\delta_{\sigma_i}}{\lambda_{\max}(\Gamma_{\sigma_i}^{-1})} \right\}.$$

综上所述, 可得如下结论。

定理 2 考虑系统(1), 在假设1和假设3的前提下, 采用虚拟控制量式(18)(43)(61)(76), 参数调节律和全调节RBFNN各参数调节律采用式(26)(29)(53)(57)(69)(73)(85)(89), 则定义的新的状态变量 $z_i (i = 1, \dots, n)$ 以及神经网络各参数估计误差均有界且指数收敛到系统原点的某个领域:

$$\Omega = \{z_i, \tilde{W}_i, \tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}_i, i = 1, \dots, n | V_n \leq 2\Delta_n / \beta\}, \tag{91}$$

并且原系统的状态 $x_i (i = 1, \dots, n)$ 也有界, 即指数收

敛到系统原点的某个领域内。

证 由上面的设计过程, 很显然可以看出定义的新的状态变量 $z_i (i = 1, \dots, n)$ 以及神经网络各参数估计误差均有界且指数收敛到系统原点的某个领域, 该领域如式(92)所示。由式(17)可知 x_1 收敛到 Ω 内, 并且由参数调节律和全调节RBFNN各参数调节律表达式可以看出, 它们都是有界的, 故 $\bar{\alpha}_1$ 和 α_1 也是有界的。因为 $z_2 = x_2 - \alpha_1 \in \Omega$, 所以可以得出 x_2 也是有界的。以此类推, 可以得出原系统的状态 $x_i (i = 1, \dots, n)$ 是有界的。证毕。

注 1 从式(92)可以看出, 通过调整 $k_i, \gamma_i, \lambda_j, \delta_{W_i}, \delta_{\mu_i}, \delta_{\sigma_i}, \Gamma_{W_i}, \Gamma_{\mu_i}, \Gamma_{\sigma_i}, \eta_i (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n-1)$ 的值可以调节收敛速度和收敛域的大小。

注 2 当 $x_1 \rightarrow 0$ 时, $\hat{W}_1 \hat{\phi}_1 \rightarrow 0, v_1 \rightarrow 0$, 进而得出 $\bar{\alpha}_1, \alpha_1 \rightarrow 0$; 由 $z_2 = x_2 - \alpha_1 \rightarrow 0$ 又可得出 $x_2 \rightarrow 0$, 依次类推, 可以得出 $x_i \rightarrow 0, i = 3, \dots, n$ 。

5 仿真研究(Simulation studies)

为了更好地说明本文所提方法的有效性, 本文的研究对象采用参考文献[10]的研究对象, 同时将本文方法与参考文献[10]的设计方案进行了对比。

考虑下面二阶SISO非仿射非线性系统如下^[10]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + \frac{x_2^3}{5}, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u + \frac{u^3}{7}, \end{cases}$$

式中:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 + \frac{x_2^3}{7}, \\ f_2(\bar{x}_2, u) &= x_1 x_2 + u + \frac{u^3}{7} \end{aligned}$$

为未知非线性。

控制目标是设计控制器, 使系统的状态从任意初始状态渐近稳定到平衡点。

参考文献中仿真参数设置为: $k_1 = k_2 = 20, \Gamma_1 = \Gamma_2 = 2, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.2, \hat{W}_i(0) = 0, i = 1, 2$, 参考文献中神经网络 $\hat{W}_1^T \mathbf{S}_1(\mathbf{Z}_1)$ 选取25个节点, μ_1 均匀分布在 $[-4, 4] \times [-4, 4]$, 神经网络 $\hat{W}_2^T \mathbf{S}_2(\mathbf{Z}_2)$ 选取135个节点, 均匀分布在

$$[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-4, 0] \times [-6, 6],$$

详细的控制器形式见参考文献[10]。

本文所描述方法的参数设置为

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = 20, \gamma_1 = \gamma_2 = \lambda_1 = 1, \eta_1 = \eta_2 = 0.2; \\ \Gamma_{W_1} = \Gamma_{\mu_1} = \Gamma_{\sigma_1} = 2 \times I_{\text{node1}}, \end{aligned}$$

$I_{\text{node1}} \in \mathbb{R}^{\text{node1}}$ 为单位阵, $\text{node1} = 5$ 为第1个RBFNN的节点数目, $\delta_{W_1} = \delta_{\mu_1} = \delta_{\sigma_1} = 3; \Gamma_{W_2} = \Gamma_{\mu_2} = \Gamma_{\sigma_2} = 2 \times I_{\text{node2}}, I_{\text{node2}} \in \mathbb{R}^{\text{node2}}$ 为单位阵, $\text{node2} = 5$

为第2个RBFNN的节点数目, $\delta_{W_2} = \delta_{\mu_2} = \delta_{\sigma_2} = 3$. 初始值设置为 $\hat{\rho}_1(0) = \hat{\rho}_2(0) = \hat{c}_1(0) = 0.5$; RBFNN初始值设置为

$$\begin{aligned} \hat{W}_1(0) &= \hat{W}_2(0) = \mathbf{0}, \hat{\mu}_1(0) = \hat{\mu}_2(0) = \mathbf{0}, \\ \hat{\sigma}_{1,i}(0) &= \hat{\sigma}_{2,j}(0) = 0.1, \\ i &= 1, \dots, \text{node1}; j = 1, \dots, \text{node2}. \end{aligned}$$

微分器初始值设置为 $v_{1,1}(0) = v_{1,2}(0) = 0$.

仿真时系统的初始值选取为

$$x_1(0) = 6, x_2(0) = -3,$$

仿真步长都设置为0.001 s, 且仿真计算机配置为CPU为Core i52.67 GHz, 而内存为2 G. 仿真结果见表1和图1-5.

表1 性能比较

Table 1 Performance comparison

方案	$ e ^2 + u ^2$	$ e $	$ u $	耗时/s
本文设计方案	3.3514×10^5	274.5508	1.7136×10^3	8.857465
文献[10]方案	5.5101×10^6	161.2557	3.1602×10^3	68.408631

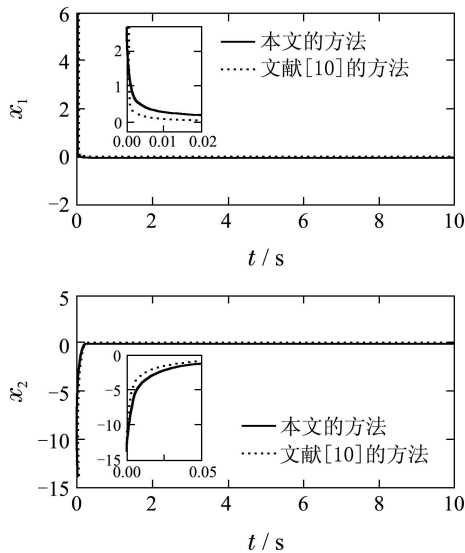


图2 状态轨迹
Fig. 2 State trajectory

图2表示系统状态轨迹, 从该图可以看出, 所提出的设计方案和文献[10]的设计方案一样可以很好地实现非仿射非线性系统的控制, 结合表1可以看出系统状态在两种控制律下最后都收敛到原系统零点很小的范围内, 本文中该范围的大小约为0.0275, 文献[10]中该范围的大小约为0.0161. 与文献[10]中的设计方案相比, 尽管由此不能得出本文方案在跟踪性能上具有显著优点, 但是却表明本文的设计思路不同于文献[10]的思路. 本文利用全调节RBFNN和微分器分别估计未知非线性和虚拟控制量的导数, 而不是像[10]中那样直接利用神经网络构建理想的隐含控制器, 从而减少了神经网络输入的数量, 避免了虚拟控制量偏导数的求解. 本文中神经网络的输入数量不多于子系统所涉及到的状态的数量, 而文献[10]中神经网络的输入数量近于子系统所涉及到的状态数量的两倍.

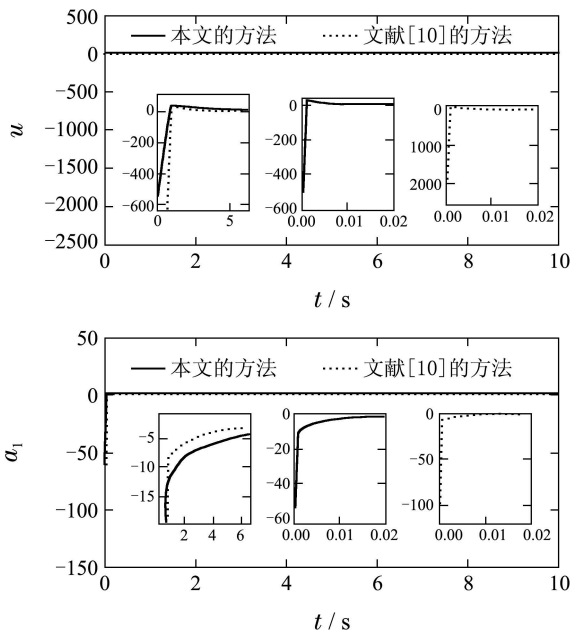


图3 控制量u和虚拟控制量 α_1
Fig. 3 Control u and virtual control α_1

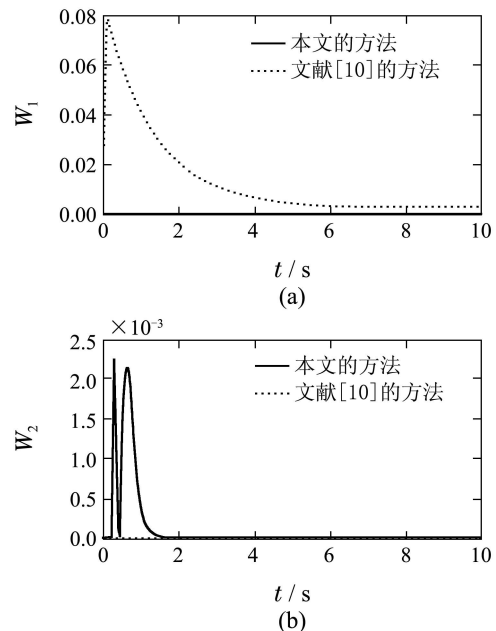


图4 W_1 和 W_2 的范数
Fig. 4 Norms of W_1 and W_2

图3表示控制量和虚拟控制量, 从该图以及局部放大图可以看出, 本文设计方案所需控制量小于参考文献中的设计方案所需控制量大小, 结合表1可以更清楚地看出这点, 尤其是在开始时刻. 本文方案需要的控制量远远小于参考文献中方案所需要的控制量. 图4表示神经网络权值的范数. 图5表示本文方案所涉及到的增益参数自适应律. 图6表示未知非线性 f_i 及未知非线性 \hat{F}_i , 虽然 f_i 及 F_i 不同, 但是随着状态趋向于零, 有 $\hat{F}_i \rightarrow f_i$, 所以在图中 \hat{F}_i 的曲线最后与 f_i 的曲线重合了. 综上, 本文所提设计方案要优于文献[10]中的方案, 尤其是在运行时间上.

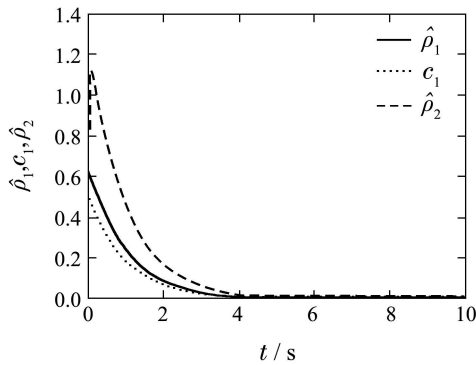


图5 参数自适应曲线

Fig. 5 Adaptive curves of parameters

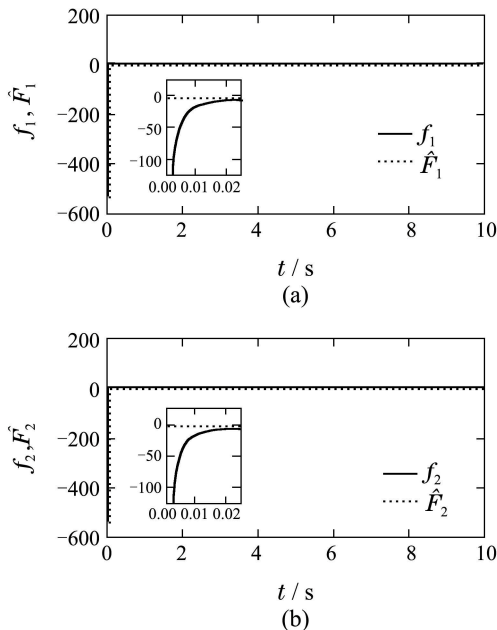


图6 未知非线性 f_i 及未知非线性 F_i 的估计

Fig. 6 Unknown nonlinear f_i and estimations of unknown nonlinear F_i

6 结论(Conclusions)

本文针对非仿射非线性系统提出了基于全调节RBFNN的自适应自抗扰控制设计方案, 该思想方便利用backstepping为非仿射非线性系统设计控制

律, 同时便于利用仿射系统领域现有的成果来处理非仿射系统. 在该设计方案的框架下, 本文也可以采用其他的未知非线性函数估计方法, 例如扩展状态观测器、模糊系统理论、小波神经网络等, 根据输入状态稳定性理论, 只要这些估计方法的逼近误差一致有界, 就能保证最后的闭环系统一致有界.

参考文献(References):

- [1] KANELLAKIPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 – 1253.
- [2] KRSTIC M, KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. Adaptive nonlinear control without overparametrization [J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(3): 177 – 185.
- [3] WANG L X. *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis* [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- [4] POLYCARPOU M M. Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 447 – 451.
- [5] ZHANG T, GE S S, HANG C C. Adaptive neural network control for strict-feedback nonlinear systems using backstepping design [J]. *Automatica*, 2000, 36(12): 1835 – 1846.
- [6] 胡云安, 晋玉强, 李海燕. 非线性系统鲁棒自适应反演控制 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2010. (HU Yun'an, JIN Yuqiang, LI Haiyan. *Robustness of Adaptive Backstepping Control for Nonlinear Systems* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010.)
- [7] GE S S, WANG C. Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 671 – 682.
- [8] WANG D, HUANG J. Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form [J]. *Automatica*, 2002, 38(8): 1365 – 1372.
- [9] GE S S, LEE T H, WANG J. Adaptive control of nonaffine nonlinear systems using neural networks [C] // *Proceedings of the 15th IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Rio Patras, Greece: IEEE, 2000: 13 – 18.
- [10] WANG C, HILL D J, GE S S, et al. An ISS-modular approach for adaptive neural control of pure-feedback systems [J]. *Automatica*, 2006, 42(5): 723 – 731.
- [11] SUN G, WANG D, LI X Q, et al. A DSC approach to adaptive neural network tracking control for pure-feedback nonlinear systems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219: 6224 – 6235.
- [12] ZHANG J H, ZHU Q M, WU X L, et al. A generalized indirect adaptive neural networks backstepping control procedure for a class of non-affine nonlinear systems with pure-feedback prototype [J]. *Neurocomputing*, 2013, 121: 131 – 139.
- [13] 周卫东, 廖成毅. 控制方向未知的SISO非仿射系统间接自适应模糊输出反馈控制 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(9): 1031 – 1037. (ZHOU Weidong, LIAO Chengyi. Indirect adaptive fuzzy output-feedback controller for a SISO nonaffine system with unknown control direction [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1031 – 1037.)
- [14] REN B B, GE S S, SU C Y, et al. Adaptive neural control for a class of uncertain nonlinear systems in pure feedback form with hysteresis input [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2008, 39(2): 431 – 443.
- [15] PARK J H, PARK G T, KIM S H, et al. Direct adaptive self-structuring fuzzy controller for non-affine nonlinear system [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 153(3): 429 – 445.

- [16] PARK J H, KIM S H. Direct adaptive output feedback fuzzy controller for a nonaffine nonlinear system [J]. *IEEE Proceedings of Control Theory and Application*, 2004, 151(1): 65 – 71.
- [17] WEN J, JIANG C. Adaptive fuzzy controller for a class of strict-feedback nonaffine nonlinear systems [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2011, 22(6): 967 – 974.
- [18] WEN J, JIANG C S. Adaptive fuzzy control for a class of chaotic systems with nonaffine inputs [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(1): 475 – 492.
- [19] 贺乃宝, 高倩, 姜长生, 等. MIMO非仿射非线性系统的自适应模糊控制 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(12): 1783 – 1786.
(HE Naibao, GAO Qian, JIANG Changsheng, et al. Adaptive fuzzy control for MIMO non-affine nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(12): 1783 – 1786.)
- [20] 韩京清. 自抗扰控制器及其应用 [J]. 控制与决策, 1998, 13(1): 19 – 23.
(HAN Jingqing. Auto-disturbances-rejection controller and its applications [J]. *Control and Decision*, 1998, 13(1): 19 – 23.)
- [21] 韩京清. 自抗扰控制技术 [J]. 前沿科学, 2007, 1(1): 24 – 31.
(HAN Jingqing. Auto disturbances rejection control technique [J]. *Frontier Science*, 2007, 1(1): 24 – 31.)
- [22] 杨苹, 周少雄, 胡斌, 等. 双馈风力发电机系统的自抗扰神经网络的励磁控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(2): 251 – 256.
(YANG Ping, ZHOU Shaoxiong, HU Bin, et al. Active disturbance-rejection neural networks excitation-control of double-fed induction generator [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(2): 251 – 256.)
- [23] 王丽君, 童朝南, 李擎, 等. 热连轧板宽板厚的实用自抗扰解耦控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(11): 1471 – 1478.
(WANG Lijun, TONG Chaonan, LI Qing, et al. A practical decoupling control solution for hot strip width and gauge regulation based on active disturbance rejection [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(11): 1471 – 1478.)
- [24] 阮久宏, 杨福广, 李贻斌. 车辆加速度自抗扰控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(9): 1189 – 1195.
(RUAN JiuHong, YANG Fuguang, LI Yibing. Active disturbance rejection control in vehicle acceleration [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(9): 1189 – 1195.)
- [25] 程春华, 胡云安, 吴进华, 等. 非仿射系统的自适应观测器自抗扰控制 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(2): 148 – 158.
(CHENG Chunhua, HU Yun'an, WU Jinhua, et al. Auto disturbance rejection controller of non-affine nonlinear systems with adaptive observers [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(2): 148 – 158.)
- [26] CHENG C H, HU Y A, WU J H, et al. Track control of system with uncertainty and non-affine inputs [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(2): 354 – 360.
- [27] 王新华, 刘金琨. 微分器设计与应用——信号滤波与求导 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2010.
(WANG Xinhua, LIU Jinkun. *Differentiator Design and Application—Signal Filtering and Differentiation* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010.)

作者简介:

胡云安 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向非线性控制、智能控制与智能系统等, E-mail: hya507@sina.com;

程春华 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向非线性控制, E-mail: chch715@126.com;

邹强 (1977–), 男, 副教授, 目前研究方向导弹武器系统工程、导航及控制等, E-mail: hyzq77@sina.com;

周大旺 (1984–), 男, 博士研究生, 目前研究方向导航制导与控制, E-mail: zhoudawang10@163.com.