

# 一类非线性时变系统的迭代学习控制

李向阳<sup>†</sup>

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 针对一类具有任意初态的不确定非线性时变系统, 应用校正期望轨迹方法把任意初态问题转换为零初始误差的变期望轨迹的迭代学习控制问题, 提出了求解校正期望轨迹的过渡轨迹的计算方法. 然后, 针对变期望轨迹问题提出了一种新的迭代学习控制算法, 在算法中引入了期望轨迹的高阶导数来克服期望轨迹的变化, 并通过设计稳定的跟踪误差滑动面来处理系统中非线性时变不确定性. 论文给出了相关定理, 并应用类Lyapunov方法给出了详细证明. 仿真结果表明所提出的算法是有效的, 该算法不需要系统的模型结构信息, 比自适应迭代学习控制算法具有更宽的适用范围.

**关键词:** 迭代学习控制; 不确定非线性系统; 初始状态问题; 类Lyapunov方法

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Iterative learning control for a class of nonlinear time-varying system

LI Xiang-yang<sup>†</sup>

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** To a class of uncertain nonlinear time-varying systems with arbitrary initial states, we apply the method of rectifying desired trajectory to transform the problem of arbitrary initial states into the problem of varying desired trajectories with zero initial error. The computational procedures for obtaining the transition trajectories for the varying desired trajectories are presented. Then, a new iterative learning control (ILC) algorithm is developed for determining the varying desired trajectory, in which higher order derivatives of the desired trajectory is incorporated to handle the variations of the desired trajectory. A stable sliding-surface of tracking errors is designed to deal with the time-varying nonlinear uncertainty of the controlled system. The corresponding theorems are given in this paper and are proved in details by using the Lyapunov-like method. Simulation results validate the effectiveness of the proposed algorithm in which there is no need of the model structure information of the controlled system, thus extending the application scope of the adaptive ILC algorithm.

**Key words:** iterative learning control; uncertain nonlinear system; initial state problem; Lyapunov-like approach

### 1 引言(Introduction)

迭代学习控制(iterative learning control, ILC)适合于一类具有重复运行性质的被控对象, 其任务是寻找控制输入, 实现有限时间区间上系统输出对期望轨迹的完全跟踪<sup>[1]</sup>. 在迭代学习系统的研究和设计中, 往往要求每次迭代的系统初始状态和期望轨迹的初值一致. 但是在实际应用中, 每次迭代不可避免存在初始误差, 迭代学习控制的初始值问题是迭代学习控制研究的基本问题.

处理初始值问题的方法有初始控制量校正和初始期望轨迹校正. 初始控制量校正方法是在初始时间区间上直接增加额外的控制量, 以便在较短初始时间内消除初始误差, 并在该段时间之后实现完全跟踪, 该方法主要有压缩映射方法<sup>[2-6]</sup>和类Lyapunov方法<sup>[7-8]</sup>.

初始期望轨迹校正的方法是在初始时间区间上从系统状态初始点到期望轨迹切入点引入一段过渡轨迹<sup>[4,9]</sup>, 过渡轨迹之后采用原来的期望轨迹, 修正后的期望轨迹具有零初始误差. 实际应用中, 过渡轨迹的形状往往容易根据用户需求来设计, 因此初始期望轨迹校正方法比初始控制量校正方法具有更好的实用性. 若每次迭代时的状态初始值不同, 则校正后的过渡轨迹每次迭代也不同, 对于后续的迭代学习算法来说, 相当于每次迭代的期望轨迹在变化, 变期望轨迹是迭代学习控制的另一个重要问题.

在实际应用中, 被控对象往往是非线性时变系统, 当模型结构满足线性参数化条件并且部分模型已知时, 自适应迭代学习控制能够实现控制<sup>[9-17]</sup>, 但是当模型结构不满足线性参数化条件或者模型未知时, 必

须研究新的迭代学习控制方法. 参考文献[18–21]进行这方面的尝试, 取得了新的进展, 但还有待深入研究的内容. 参考文献[18]的模型为非线性模型, 但是其控制通道增益的只是时间的函数, 与状态无关, 而且要求初态的变化满足迭代学习率, 并非任意初态. 参考文献[19]提出了用小波网络逼近逆系统的方法, 得到了一种鲁棒迭代学习控制方法, 但是要求模型可分离为状态和时间函数的乘积形式. 参考文献[20]的模型为线性时变系统, 要求初始状态误差随迭代次数按幂指数规律减少, 并非任意初态. 参考文献[21]的模型为非线性参数化模型, 应用神经网络对时变参数进行估计, 并用边界层方法来统一处理初值问题和完全跟踪问题, 但是其边界层为渐近收敛, 不能达到完全跟踪.

本文针对一类模型结构更一般的未知非线性时变系统, 研究其任意随机初态条件的迭代学习控制问题. 本文的结构组织如下: 第1节为引言; 第2节是对所研究问题的描述; 第3节提出了初始期望轨迹校正方法和新的迭代学习控制算法, 并给出了详细证明; 第4节给出了仿真结果; 第5节是本文的结论.

## 2 问题描述(Problem statement)

考虑如下2-D形式表示的带未知参数的非线性时变系统的迭代学习控制:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, k) = x_2(t, k), & t \in [0, T], \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t, k) = x_n(t, k), \\ \dot{x}_n(t, k) = f(t, \mathbf{x}(t, k)) + b(t, \mathbf{x}(t, k))u(t, k), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_i$  为可测的系统状态,  $u$  为系统的控制输入,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ ,  $t$  为时间,  $k$  为迭代次数,  $n$  为系统阶数.

**假设 1** 期望轨迹在工作区间  $t \in [0, T]$  有界且具有  $n$  阶有界导数, 记  $r_i(t)$  为第  $i-1$  阶导数, 令  $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n]^T$ .

**假设 2**  $b$  不等于零且符号保持不变. 设  $D$  为  $\mathbf{r}$  的充分大但有界的邻域,  $\mathbf{r} \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  和  $b$  为在  $D$  上未知有界的局部 Lipschitz 连续非线性时变函数, 设  $\mathbf{x}^1$  和  $\mathbf{x}^2$  为  $D$  中任意两点, 则有

$$|f(t, \mathbf{x}^1) - f(t, \mathbf{x}^2)| \leq L_f |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2|, \quad (2)$$

$$0 \leq |f(t, \mathbf{x})| \leq f_M, \quad (3)$$

$$0 < |b(t, \mathbf{x}^1) - b(t, \mathbf{x}^2)| \leq L_b |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2|, \quad (4)$$

$$0 < b_m \leq |b(t, \mathbf{x})| \leq b_M, \quad (5)$$

其中  $L_f$ ,  $f_M$ ,  $L_b$ ,  $b_m$  和  $b_M$  为适当正数.

**假设 3** 设  $r_i(0)$  和  $x_i(0, k)$  分别为期望轨迹和系统状态的初始值, 系统具有有界随机的初始值, 即

$\exists i \in [1, n], x_i(0, k) \neq r_i(0)$ , 且  $\mathbf{x}(0, k) \in D$ .

定义跟踪误差

$$\varepsilon_i(t, k) = r_i(t) - x_i(t, k). \quad (6)$$

由于迭代学习控制系统(1)含非零初态误差, 而实际中的控制能量总有限的, 实现完全跟踪必须一个过渡过程和过渡时间  $T_p$ . 根据假设2的  $f$  和  $b$  的有界性,  $T_p$  越小, 使系统状态到达期望轨迹的控制  $u(t, k)$  的幅值越大; 当  $T_p$  为趋近于零时,  $u(t, k)$  将变成冲击函数. 实际中, 需要根据生产工艺要求和控制量容许范围来选择合适的  $T_p$ .

在进行每次迭代学习控制之前, 以系统的初始状态和期望轨迹的接入点为边界条件, 构造过渡轨迹, 在过渡过程之后, 校正后的期望轨迹与原期望轨迹完全重合. 假设经过校正后的期望轨迹为  $z_i(t, k)$ , 记  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_n]^T$ , 则校正后的期望轨迹为

$$z_i = \begin{cases} h_i(t, k), & 0 \leq t \leq T_p, \\ r_i(t), & T_p \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (7)$$

其中  $h_i(t, k)$  为过渡轨迹, 满足如下边界条件:

$$\begin{cases} h_i(0, k) = x_i(0, k), \\ h_i(T_p, k) = r_i(T_p), \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (8)$$

从式(7)–(8)可以看出, 即使期望轨迹  $\mathbf{r}(t)$  每次迭代不变, 但是经过修正后的期望轨迹  $\mathbf{z}(t, k)$  每次迭代都会随初始状态的变化而变化, 因此, 迭代学习控制算法必须能够实现变期望轨迹的完全跟踪控制.

## 3 提出的方法(Proposed method)

本文提出的方法分两步, 第1步对期望轨迹进行修正, 系统化地把任意初态变为零初态的变期望轨迹; 第2步设计迭代学习控制律处理变期望轨迹问题.

### 3.1 期望轨迹的修正(Rectifying of the desired trajectory)

为了保证过渡轨迹在接入点的充分光滑, 过渡轨迹除了满足边界条件式(8)之外, 还增加如下边界条件:

$$h_{n+1}(T_p, k) = r_{n+1}(T_p). \quad (9)$$

为了计算方便和不失一般性, 采用多项式函数来构造过渡轨迹, 设多项式曲线和矩阵  $M$  分别为

$$h_1(t) = d_0 + d_1 t + \cdots + d_{2n-1} t^{2n-1} + d_{2n} t^{2n}, \quad (10)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & t^{2n-1} & t^{2n} \\ 0 & 1 & \cdots & (2n-1)t^{2n-2} & (2n)t^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} t^{n-1} & \frac{(2n)!}{(n)!} t^n \end{bmatrix},$$

则根据式(8)–(9)的(2n + 1)个边界条件可确定式(10)中(2n + 1)个系数. 对式(10)两边求n阶导数有

$$\mathbf{h} = M\mathbf{d}, \quad (11)$$

其中:  $\mathbf{h} = [h_1 \cdots h_n \ h_{n+1}]^T$ ,  $h_{i+1}(t, k)$ 是 $h_i(t, k)$ 的导数;  $\mathbf{d} = [d_0 \ d_1 \ \cdots \ d_{2n}]^T$ .

把式(7)–(8)写成矩阵形式为

$$\mathbf{h}_p = P\mathbf{d}, \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{h}_p =$$

$$[x_1(0, k) \ \cdots \ x_n(0, k) \ r_1(T_p) \ \cdots \ r_{n+1}(T_p)]^T,$$

$$P =$$

$$\begin{bmatrix} 0! & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1! & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (n-1)! & 0 & \cdots & 0 \\ 0! & T_p^1 & \cdots & T_p^{n-1} & T_p^n & \cdots & T_p^{2n} \\ 0 & 1! & \cdots & (n-1)T_p^{n-2} & nT_p^{n-1} & \cdots & 2nT_p^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & (n-1)! & \frac{n!}{1!}T_p^1 & \cdots & \frac{(2n)!}{(n+1)!}T_p^{n+1} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & n! & \cdots & \frac{(2n)!}{(n)!}T_p^n \end{bmatrix}.$$

由于 $T_p > 0$ , 上述(2n + 1) × (2n + 1)阶矩阵P是满秩的, 则根据式(12)有

$$\mathbf{d} = P^{-1}\mathbf{h}_p, \quad (13)$$

上式结合式(7)和式(11)有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{cases} MP^{-1}\mathbf{h}_p, & t \in [0, T_p], \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ r_{n+1} \end{bmatrix}, & t \in [T_p, T], \end{cases} \quad (14)$$

式(14)中 $z_{n+1}$ 是 $z_n$ 的导数,  $r_{n+1}$ 是 $r_n$ 的有界导数, 根据式(14)可以计算出修正后的期望轨迹. 由假设2的 $\mathbf{r}(t) \in D$ 和假设3的 $\mathbf{x}(0, k) \in D$ 以及上述期望轨迹的校正方法, 且 $z_{n+1}$ 同样有界, 可再假设 $\mathbf{z} \in D$ , 即有:

**假设 4** 校正后的期望轨迹 $\mathbf{z} \in D$ , 且有

$$0 \leq |z_{n+1}| \leq z_M. \quad (15)$$

### 3.2 迭代学习控制算法设计(Iterative learning control law design)

修正后的期望轨迹满足零初始误差条件, 定义校正后的期望轨迹 $z_i$ 的跟踪误差为

$$\begin{cases} e_i(t, k) = x_i - z_i, \\ e_i(0, k) = 0, \quad i = 1, \cdots, n. \end{cases} \quad (16)$$

定义滑动面误差函数 $\sigma(t, k)$ 为

$$\begin{cases} \sigma(t, k) = c_0 \int_0^t e_1(\tau, k) d\tau + \sum_{j=1}^n c_j e_j(t, k), \\ \sigma(0, k) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

其中 $c_n = 1$ ,  $c_j (j = 0, 1, \cdots, n)$ 是Hurwitz多项式的系数, 则由式(17)有

$$\dot{\sigma}(t, k) = \sum_{j=1}^n c_{j-1} e_j(t, k) + \dot{e}_n(t, k). \quad (18)$$

令 $\mathbf{c}^T = (c_0, c_1, \cdots, c_n)$ ,  $\mathbf{e}^T = (e_1, \cdots, e_n)$ , 把跟踪误差写成向量形式为

$$\dot{\mathbf{e}}(t, k) = A_c \mathbf{e}(t, k) + B_c \dot{\sigma}(t, k), \quad (19)$$

其中:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-1} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

式(19)两边积分, 考虑零初始条件, 则有

$$\mathbf{e}(t, k) = \int_0^t A_c \mathbf{e}(\tau, k) d\tau + B_c \sigma(t, k), \quad (20)$$

上式(20)两边取范数, 并根据范数的相容性有

$$|\mathbf{e}(t, k)| \leq \int_0^t \|A_c\| \cdot |\mathbf{e}(\tau, k)| d\tau + |\sigma(t, k)|, \quad (21)$$

则由Bellman-Gronwall引理有

$$|\mathbf{e}(t, k)| \leq \|A_c\| \cdot e^{\|A_c\|T} \int_0^t |\sigma(\tau, k)| d\tau + |\sigma(t, k)|, \quad t \in [0, T]. \quad (22)$$

对于系统(1)及其假设条件, 有如下定理和迭代学习控制算法:

**定理 1** 对于系统(1), 在时间区间 $t \in [0, T]$ 上进行迭代学习控制, 满足假设1–4, 再假设控制通道增益 $b(t, \mathbf{x})$ 有一个粗略估计 $b_0(t, \mathbf{x})$ ,  $b_0$ 与 $b$ 具有相同的符号且同样满足式(4)–(5), 则通过选择学习增益 $q > 0$ 和控制增益 $\beta \geq 0$ , 根据学习算法(23)和控制算法(24)可以实现对修正的期望轨迹的完全跟踪, 即式(25)成立.

$$\begin{cases} v(t, 0) = 0, \\ v(t, k) = v(t, k-1) + q\sigma(t, k), \end{cases} \quad (23)$$

$$u(t, k) = b_0^{-1}(-\beta\sigma(t, k) - \sum_{j=1}^n c_{j-1} e_j(t, k) - v(t, k) + z_{n+1}), \quad (24)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(t, k) = 0, \quad i = 1, \cdots, n. \quad (25)$$

**证** 由式(18)和式(1)有

$$\dot{\sigma}(t, k) = \sum_{j=1}^n c_{j-1} e_j + f(t, \mathbf{x}) + bu(t, k) - z_{n+1}, \quad (26)$$

把式(24)的控制量代入式(26)有

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t, k) = & \sum_{j=1}^n c_{j-1} e_j + f(t, \mathbf{x}) - z_{n+1} + \\ & \frac{b}{b_0} (-\beta\sigma - \sum_{j=1}^n c_{j-1} e_j - v(t, k) + z_{n+1}), \end{aligned} \quad (27)$$

整理式(27)有

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t, k) = & \frac{b}{b_0} (\hat{f}(t, \mathbf{x}) - v(t, k)) - \\ & \frac{b}{b_0} \beta\sigma + (1 - \frac{b}{b_0}) \sum_{j=1}^n c_{j-1} e_j, \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\hat{f}(t, \mathbf{x}) = \frac{b_0}{b} f(t, \mathbf{x}) + \frac{b - b_0}{b} z_{n+1}. \quad (29)$$

根据 $f$ ,  $b$ 和 $b_0$ 的有界性和局部Lipschitz连续性以及 $z$ 的有界性假设, 由式(2)(4)–(5)(15)有

$$|\hat{f}(t, \mathbf{x}^1) - \hat{f}(t, \mathbf{x}^2)| \leq L_{\hat{f}} |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2|, \quad (30)$$

其中 $L_{\hat{f}} = (\frac{b_M}{b_m} L_f + \frac{2z_M}{b_m} L_b)$ , 因此 $\hat{f}(t, \mathbf{x})$ 为有界局部Lipschitz连续函数.

定义 $V(t, k)$ 为如下类Lyapunov函数<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} V(t, k) = & \\ & \frac{b_0}{2b} \sigma^2(t, k) + \frac{1}{2q} \int_0^t (\hat{f}(\tau, \mathbf{z}) - v(\tau, k))^2 d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

由式(31)有

$$\begin{aligned} \Delta V(t, k) = & \\ & V(t, k) - V(t, k - 1) = \\ & \frac{b_0}{2b} \sigma^2(t, k) - \frac{b_0}{2b} \sigma^2(t, k - 1) + \\ & \frac{1}{2q} \int_0^t ((\hat{f}(\tau, \mathbf{z}) - v(\tau, k))^2 - \\ & (\hat{f}(\tau, \mathbf{z}) - v(\tau, k - 1))^2) d\tau = \\ & -\frac{b_0}{2b} \sigma^2(t, k - 1) + \text{Part1} + \text{Part2}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中:

$$\begin{aligned} \text{Part1} = & \frac{b_0}{2b} \sigma^2(t, k) - \frac{b_0}{2b} \sigma^2(0, k) + \frac{b_0}{b} \int_0^t \sigma \dot{\sigma} d\tau, \\ \text{Part2} = & \frac{1}{2q} \int_0^t ((\hat{f}(\tau, \mathbf{z}) - v(\tau, k))^2 - \\ & (\hat{f}(\tau, \mathbf{z}) - v(\tau, k - 1))^2) d\tau. \end{aligned}$$

把式(28)代入Part1, 并考虑零初始条件有

$$\begin{aligned} \text{Part1} = & \int_0^t \sigma(\tau, k) (\hat{f}(t, \mathbf{x}) - v(\tau, k)) d\tau - \\ & \beta \int_0^t \sigma^2 d\tau + (\frac{b_0}{b} - 1) \int_0^t (\sigma \sum_{j=1}^n c_{j-1} e_j) d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

利用 $(a-b)^2 - (a-c)^2 = -(b-c)^2 - 2(b-c)(a-b)$ 并

由Part2有

$$\begin{aligned} \text{Part2} = & \\ & -\frac{1}{2q} \int_0^t (v(\tau, k) - v(\tau, k - 1))^2 d\tau + \\ & \frac{1}{2q} \int_0^t -2(\hat{f}(\tau, \mathbf{z}) - v(k))(v(k) - v(k - 1)) d\tau, \end{aligned}$$

把学习律(23)代入上式Part2中有

$$\text{Part2} = -\frac{q}{2} \int_0^t \sigma^2 d\tau + \int_0^t \sigma (v(\tau, k) - \hat{f}(\tau, \mathbf{z})) d\tau. \quad (34)$$

把式(33)和式(34)代入式(32)有

$$\begin{aligned} \Delta V(t, k) = & -\frac{b_0}{2b} \sigma^2(t, k - 1) - (\beta + \frac{q}{2}) \times \\ & \int_0^t \sigma^2(\tau, k) d\tau + \text{Part3}, \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{Part3} = & \int_0^t \sigma(\tau, k) \cdot (\hat{f}(\tau, \mathbf{x}) - \hat{f}(\tau, \mathbf{z})) d\tau + \\ & (\frac{b_0}{b} - 1) \int_0^t (\sigma \sum_{j=1}^n c_{j-1} e_j) d\tau, \end{aligned} \quad (36)$$

式(36)右边取绝对值并考虑式(30)有

$$\begin{aligned} \text{Part3} \leq & \int_0^t |\sigma| L_{\hat{f}} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\tau + \\ & |\frac{b_0}{b} - 1| \int_0^t |\sigma| \cdot |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{e}| d\tau \leq \\ & (L_{\hat{f}} + |\frac{b_0}{b} - 1| \cdot |\mathbf{c}|) \int_0^t |\sigma| \cdot |\mathbf{e}| d\tau \leq \\ & L_{\hat{f}b} \int_0^t |\sigma| \cdot |\mathbf{e}| d\tau, \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$L_{\hat{f}b} = (L_{\hat{f}} + |\frac{b_0}{b} - 1| \cdot |\mathbf{c}|). \quad (38)$$

把式(22)代入式(37)有

$$\begin{aligned} \text{Part3} \leq & L_{\hat{f}b} \int_0^t |\sigma(\tau, k)|^2 d\tau + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} \cdot \\ & L_{\hat{f}b} \int_0^t |\sigma(\tau, k)| (\int_0^{\tau} |\sigma(\tau_1, k)| d\tau_1) d\tau, \end{aligned} \quad (39)$$

利用二重积分的性质有

$$\begin{aligned} \text{Part3} \leq & \\ & L_{\hat{f}b} \int_0^t |\sigma(\tau, k)|^2 d\tau + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} \cdot \\ & L_{\hat{f}b} \int_0^t |\sigma(\tau, k)| (\int_0^t |\sigma(\tau_1, k)| d\tau_1) d\tau \leq \\ & L_{\hat{f}b} \int_0^t |\sigma|^2 d\tau + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_{\hat{f}b} (\int_0^t |\sigma| d\tau)^2, \end{aligned} \quad (40)$$

由Cauchy-Schwarz不等式, 式(40)可变为

$$\begin{aligned} \text{Part3} \leq & \\ & L_{\hat{f}b} \int_0^t \sigma^2 d\tau + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_{\hat{f}b} t \int_0^t \sigma^2 d\tau \leq \\ & (L_{\hat{f}b} + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_{\hat{f}b} T) \int_0^t \sigma^2(\tau, k) d\tau, \end{aligned} \quad (41)$$

把式(41)代入式(35)有

$$\Delta V(t, k) \leq -\frac{b_0}{2b} \sigma^2(t, k-1) - (\beta + \frac{q}{2} - L_{\hat{f}b} - \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_{\hat{f}b} T) \int_0^t \sigma^2 d\tau. \quad (42)$$

选取 $\beta$ 和 $q$ , 使下式成立:

$$\beta + \frac{q}{2} \geq L_{\hat{f}b} + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_{\hat{f}b} T, \quad (43)$$

则由式(41)有

$$\Delta V(t, k) \leq -\frac{b_0}{2b} \sigma^2(t, k-1). \quad (44)$$

由于 $b_0$ 与 $b$ 具有相同的符号, 因此 $\Delta V(t, k)$ 是随 $k$ 递减的. 下面证明 $V(t, 1)$ 有界,  $V(t, k)$ 第1次迭代值为 $V(t, 1) = \Delta V(t, 1) + V(t, 0)$ , 把式(35)中 $k = 1$ 的情况代入上式, 并采用获得式(43)相同的推导方法可得

$$V(t, 1) \leq \frac{1}{2q} \int_0^t (\hat{f}(t, \mathbf{z}))^2 d\tau - (\beta + \frac{q}{2} - L_{\hat{f}b} - \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_{\hat{f}b} T) \int_0^t \sigma^2(t, 1) d\tau, \quad (45)$$

当满足式(42)时, 由式(44)和式(31)有

$$0 \leq V(t, 1) \leq \frac{1}{2q} (\hat{f}(t, \mathbf{z}))^2. \quad (46)$$

由于 $\hat{f}(t, \mathbf{z})$ 有界, 则 $V(t, 1)$ 有界, 且 $V(t, k)$ 随 $k$ 单调下降, 则 $V(t, k)$ 必有极限, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} V(t, k) = 0$ . 由于 $V(t, k)$ 有界和收敛, 则 $\sigma(t, k)$ 也有界和收敛, 从而 $\mathbf{e}(t, k)$ 和 $u(t, k)$ 都有界和收敛. 由于

$$V(t, k) = (V(t, k) - V(t, k-1)) + \dots + (V(t, 2) - V(t, 1)) + V(t, 1),$$

重复应用式(43)有

$$V(t, k) = V(t, 1) + \sum_{j=2}^k \Delta V(t, j) \leq V(t, 1) - \frac{b_0}{2b} \sum_{j=2}^k \sigma^2(t, j-1),$$

对上式两边取极限有

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sigma^2(t, j-1) \leq \frac{2b}{b_0} V(t, 1), \quad (47)$$

则 $\sum_{j=2}^k \sigma^2(t, j-1)$ 收敛, 由级数收敛的必要条件有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(t, k) = 0, \quad (48)$$

因此, 根据式(22)有 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(t, k) = 0, t \in [0, T]$ . 即式(25)成立. 证毕.

**定理1的说明** 1) 任意随机初始状态的迭代学习控制的跟踪误差由两部分组成, 一部分是过渡轨迹与期望轨迹的误差 $\mu_i$ , 这部分误差只发生在 $T_p$ 之前, 在 $T_p$ 之后为零; 另一部分是在迭代学习控制作用下的系统输出跟踪修正后的期望轨

迹的跟踪误差 $e_i$ , 总误差可表示为

$$\varepsilon_i = r_i - x_i = \begin{cases} \mu_i + e_i, & 0 \leq t \leq T_p, \\ e_i, & T_p < t \leq T. \end{cases} \quad (49)$$

2) 在算法的控制量求法中引入了期望轨迹的高阶导数, 以此来克服期望轨迹的变化; 通过设计稳定的跟踪误差滑动面来处理系统的不确定性, 应用时不需要确切知道不确定非线性时变函数的结构和具体参数, 只需知道其变化范围即可, 因此该算法具有比自适应迭代学习算法更广的适用范围.

3) 在应用上述定理1时, 只需要对控制通道增益 $b(t, \mathbf{x})$ 进行粗略估计, 可以为 $[b_m, b_M]$ 区间的任何值, 估计的误差会反映到系统的输出跟踪误差中, 算法自动通过迭代学习进行补偿, 不需精确估计, 将方便应用. 但是, 从式(37)和式(42)可以看出, 当估计误差较大时, 则需要较大的反馈增益 $\beta$ 和学习增益 $q$ , 估计精度将影响时间域的暂态过程和迭代域的收敛速度.

#### 4 仿真研究(Simulation study)

考虑二阶非线性时变受控系统的迭代学习控制:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & t \in [0, T], \\ \dot{x}_2 = f(t, \mathbf{x}) + b(t, \mathbf{x})u(t). \end{cases} \quad (50)$$

假设系统(50)的 $f(t, \mathbf{x})$ 满足本文定理条件, 但是结构和具体参数都未知, 不满足线性参数化条件, 不能采用自适应迭代学习算法<sup>[9-17]</sup>, 可采用本文提出的算法. 下面根据 $b(t, \mathbf{x})$ 情形分两种情况进行仿真.

仿真时采用与文献[9]相同的系统模型、参考轨迹和初始值条件.  $f(t, \mathbf{x})$ 对于控制算法来说未知, 仿真时取 $f(t, \mathbf{x}) = -0.38x_2 + x_1 + \delta$ , 其中 $\delta = -0.8x_1^3 + 2.1\cos(1.8t)$ , 与文献[9]相同.

期望轨迹为

$$\begin{cases} r_1(t) = -0.2 + \cos(2\pi t), \\ r_2(t) = -2\pi \sin(2\pi t), \\ r_3(t) = -4\pi^2 \cos(2\pi t), \end{cases} \quad (51)$$

系统状态初值为

$$\begin{cases} x_1(0, k) = 0.5 + 0.1 \text{rand} \neq 0.8, \\ x_2(0, k) = 0. \end{cases} \quad (52)$$

取 $T_p = 0.2$ , 采用与文献[9]相同的过渡时间和相同的评价指标

$$J_1(k) = \lg \max_{t \in [0, T]} |e_1(t, k)|, \quad (53)$$

$$J_2(k) = \lg \max_{t \in [0, T]} |e_2(t, k)|. \quad (54)$$

首先根据边界条件计算矩阵 $P$ 和多项式系数矩阵 $M$ , 然后根据式(4)计算校正后的期望轨迹 $\mathbf{z}^T$ .

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}(t, k), z_3(t, k)]^T &= [z_1(t, k) \ z_2(t, k) \ z_3(t, k)], \\ \mathbf{h}_p^T &= [x_1(0, k) \ x_2(0, k) \ r_1(T_p) \ r_2(T_p) \ r_3(T_p)], \\ [\mathbf{z}(t, k), z_3(t, k)]^T &= M P^{-1} \mathbf{h}_p, \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_P^2 & T_P^3 & T_P^4 \\ 0 & 0 & 2T_P^1 & 3T_P^2 & 4T_P^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6T_P & 12T_P^2 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 & 4t^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6t^1 & 12t^2 \end{bmatrix}.$$

**情形 1**  $b(t, \mathbf{x})$ 已知, 并设 $b(t, \mathbf{x}) = 1$ .

采用定理1的算法, 取滑动面误差系数 $c_0 = 3$ ,  $c_1 = 3$ 和 $c_2 = 1$ , 反馈增益 $\beta = 10$ , 学习增益 $q = 20$ , 迭代20次后结果如图1-4所示.

**情形 2**  $b(t, \mathbf{x})$ 未知, 但有粗略估计 $b_0(t, \mathbf{x}) = 1$ . 仿真取 $b(t, \mathbf{x}) = 1 + 0.5 \sin t + 0.3x_1^2$ .

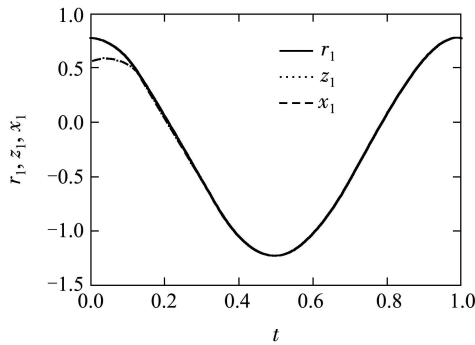


图 1 情形1: 迭代20次的 $r_1, z_1$ 和 $x_1$

Fig. 1 Case 1:  $r_1, z_1$  and  $x_1$  at 20 iterations

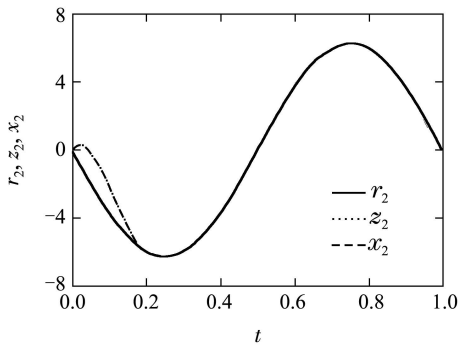


图 2 情形1: 迭代20次的 $r_2, z_2$ 和 $x_2$

Fig. 2 Case 1:  $r_2, z_2$  and  $x_2$  at 20 iterations

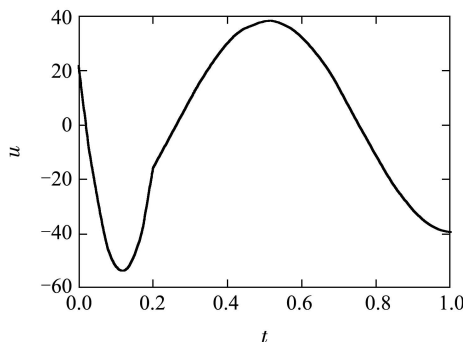


图 3 情形1: 迭代20次的控制输入 $u$

Fig. 3 Case 1: control input  $u$  at 20 iterations

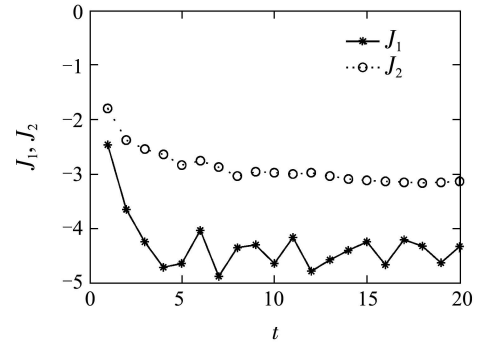


图 4 情形1:  $J_1(k)$ 和 $J_2(k)$

Fig. 4 Case 1:  $J_1(k)$  and  $J_2(k)$

采用定理1算法, 采用与情形1相同的算法和参数, 迭代20次后结果如图5-8所示.

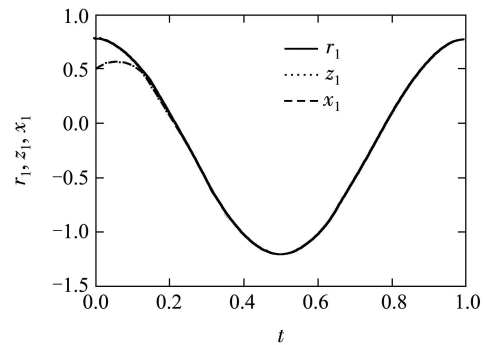


图 5 情形2: 迭代20次的 $r_1, z_1$ 和 $x_1$

Fig. 5 Case 2:  $r_1, z_1$  and  $x_1$  at 20 iterations

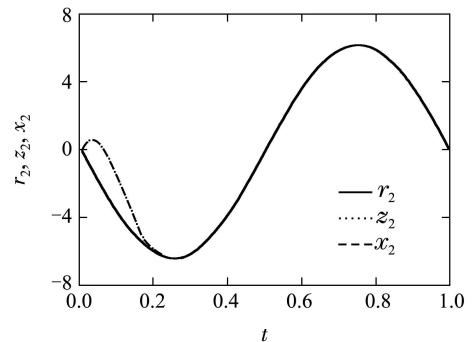


图 6 情形2: 迭代20次的 $r_2, z_2$ 和 $x_2$

Fig. 6 Case 2:  $r_2, z_2$  and  $x_2$  at 20 iterations

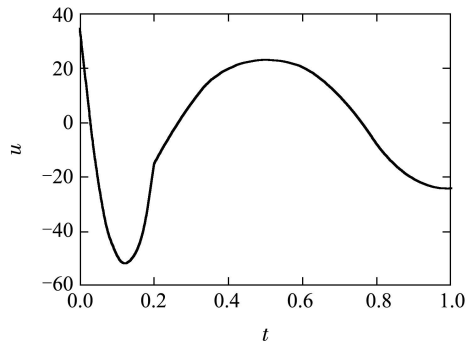
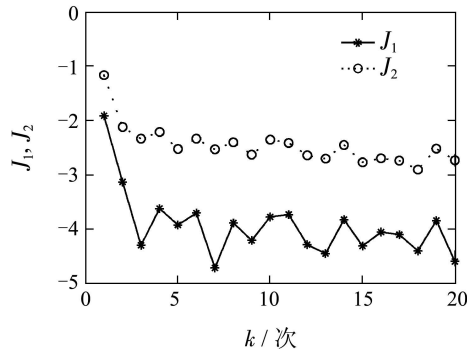


图 7 情形2: 迭代20次的控制输入 $u$

Fig. 7 Case 2: control input  $u$  at 20 iterations

图 8 情形2:  $J_1(k)$ 和 $J_2(k)$ Fig. 8 Case 2:  $J_1(k)$  and  $J_2(k)$ 

上述仿真结果中 $z_i$ 和 $x_i$ 几乎重合, 经过过渡时间之后, 系统状态完全跟踪参考信号. 本文的情形1与参考文献[9]的Case 3情形的模型一样, 采用的控制方法不同, 两种仿真结果的对比可以看出, 尽管本文算法的仿真系统模型的不确定项结构和参数都未知, 不满足参考文献[9]算法所需的线性参数化条件, 但是同样可以得到与参考文献[9]相同的跟踪精度和收敛速度, 此外, 本文算法还适用控制通道增益 $b(t, \boldsymbol{x})$ 只有粗略估计的情形.

## 5 结论(Conclusion)

为解决非零初始误差的迭代学习控制问题, 本文通过规划过渡过程修正参考轨迹来达到零初始误差条件, 把任意初始值问题转化为零误差的变期望轨迹问题. 在此基础上提出了适合一类结构未知的不确定非线性时变系统的闭环迭代学习控制算法, 该算法比自适应迭代学习控制方法具有更宽的适用范围, 本文应用类Lyapunov方法给出了详细证明, 仿真结果表明本文所提出算法是有效的.

## 参考文献(References):

- [1] UCHIYAMA M. Formation of high speed motion pattern of mechanical arm by trial [J]. *Transactions of the Society of Instrumentation and Control Engineers*, 1978, 19(5): 706 – 712.
- [2] PORTER B, MOHAMED S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial state shifting [J]. *International Journal of Systems Science*, 1991, 22(2): 447 – 454.
- [3] LEE K H, BIEN Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error [J]. *International Journal of Control*, 1996, 64(3): 345 – 359.
- [4] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1999. (SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control* [M]. Beijing: Press of National Defense Industry, 1999.)
- [5] PARK K H. An Average operator-based PD-type iterative learning control for variable initial state error [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 865 – 869.
- [6] 阮小娥, 赵建永. 具有初始状态不确定性的非线性系统脉冲补偿迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 993 – 1000. (RUAN Xiaoe, ZHAO Jianyong. Pulse compensated iterative learning control to nonlinear systems with initial state uncertainty [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 993 – 1000.)
- [7] SUN M X, WANG D W. PI iterative learning control with initial rectifying action [J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1177 – 1182.
- [8] LI X D, CHOW T W S, HO J K L, et al. Iterative learning control with initial rectifying action for nonlinear continuous systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2009, 3(1): 49 – 55.
- [9] 孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法 [J]. *自动化学报*, 2013, 39(3): 251 – 262. (SUN Mingxuan, YAN Qiuzhen. Error tracking of iterative learning control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 251 – 262.)
- [10] YIN C K, XU J X, HOU Z S. An ILC scheme for a class of nonlinear systems with time-varying parameters subject to second-order internal model [C] // *Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*. Shanghai: IEEE, 2009: 452 – 457.
- [11] YIN C K, XU J X, HOU Z S. A high-order internal model based iterative learning control for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2665 – 2670.
- [12] 朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制 [J]. *自动化学报*, 2010, 36(3): 454 – 458. (ZHU Sheng, SUN Mingxuan, HE Xiongiong. Iterative learning control of strict-feedback nonlinear time-varying systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(3): 454 – 458.)
- [13] XU J X, XU J. On initial conditions in iterative learning control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(9): 1349 – 1354.
- [14] PARK B H, KUC T Y, LEE J S. Adaptive learning control of uncertain robotic systems [J]. *International Journal of Control*, 1996, 65(5): 725 – 744.
- [15] XU J X. Recent advances in iterative learning control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(1): 132 – 142.
- [16] XU J X, XU J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2004, 34(1): 589 – 597.
- [17] CHI R H, HOU Z S, XU J X. Adaptive ILC for a class of discrete-time systems with iteration-varying trajectory and random initial condition [J]. *Automatica*, 2008, 44(8): 2207 – 2213.
- [18] 曹伟, 戴学丰. 非线性系统在任意初态下的闭环迭代学习控制 [J]. *系统仿真学报*, 2011, 23(5): 965 – 968. (CAO Wei, DAI Xuefeng. Closed-loop iterative learning control with arbitrary initial state of nonlinear systems [J]. *Journal of System Simulation*, 2011, 23(5): 965 – 968.)
- [19] 王晔, 刘山. 期望轨迹可变的非线性时变系统迭代学习控制 [J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2009, 43(5): 839 – 843. (WANG Ye, LIU Shan. Iterative learning control of non-identical desired trajectories for a class of nonlinear time-varying systems [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2009, 43(5): 839 – 843.)
- [20] 王洪斌, 王艳. 带有初始误差的机械手轨迹跟踪的快速迭代学习控制 [J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(1): 165 – 171. (WANG Hongbin, WANG Yan. Rapid ILC control of manipulator trajectory tracking with initial error [J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2011, 31(1): 165 – 171.)
- [21] 李静, 胡云安. 时变非线性系统直接自适应迭代学习控制 [J]. *系统工程与电子技术*, 2012, 34(1): 154 – 159. (LI Jing, HU Yun'an. Direct adaptive iterative learning control of time-varying nonlinear systems [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(1): 154 – 159.)

## 作者简介:

李向阳 (1969–), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为学习控制、嵌入式系统、工业自动化, E-mail: xyangli@scut.edu.cn.