

# 非参数不确定系统约束迭代学习控制

孙明轩<sup>†</sup>, 张伟博, 严求真

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

**摘要:** 讨论一类非参数不确定系统的约束迭代学习控制问题. 构造二次分式型障碍李雅普诺夫函数(Barrier Lyapunov functions), 用于学习控制器设计. 控制方案采用鲁棒方法与学习机制相结合的手段处理非参数不确定性, 鲁棒方法对处理后的不确定性的界予以补偿, 学习机制对处理后的不确定性进行估计. 可实现系统状态在整个作业区间上完全跟踪参考轨迹, 并使得系统误差的二次型在迭代过程中囿于预设的界内, 进而在运行过程中实现状态约束. 提出的迭代学习算法包括部分限幅与完全限幅学习算法. 采用这种BLF约束控制系统有利于提高控制系统中设备安全性. 仿真结果用于验证所提出控制方法的有效性.

**关键词:** 收敛性; 迭代学习控制; 约束状态; 非参数不确定性

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Constrained iterative learning control of a class of non-parametric uncertain systems

SUN Ming-xuan<sup>†</sup>, ZHANG Wei-bo, YAN Qiu-zhen

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

**Abstract:** A Barrier-Lyapunov-function-based state-constrained iterative learning control is presented for a class of non-parametric uncertain systems. The suggested Barrier Lyapunov function (BLF) is a quadratic fraction, which is simple in form in comparison with the existing nonlinear ones. Through Lyapunov synthesis, the learning controller design is carried out. The nonparametric uncertainty of system dynamics are tackled through the robust treatment and learning mechanism. It is shown that the system state can track the reference trajectory over the entire time interval as iteration increases, while the quadratic tracking error, as a measure of the constraint, is enforced to stay in the pre-specified range. The constrained system state is in turn achieved. The performances of partially and fully saturated learning algorithms are characterized, respectively. The proposed learning control scheme is helpful for the effective protection of equipment in the closed-loop system, due to the employment of the Barrier Lyapunov function. Numerical results are presented to demonstrate the effectiveness of the learning control scheme.

**Key words:** convergence; iterative learning control; constrained state; non-parametric uncertainties

### 1 引言(Introduction)

迭代学习控制技术是20世纪80年代中期提出的<sup>[1]</sup>. 它通过重复运行不断修正控制输入, 对各种与迭代次数无关的干扰信号形成完全抑制作用, 使得受控对象在整个作业区间上实现对参考轨迹的完全跟踪. 实际中存在大量有限区间控制过程, 迭代学习控制因其所具有的这种跟踪性能, 是一种适用控制技术.

迭代学习控制的Lyapunov方法是近年来该领域的研究热点之一. 研究成果主要集中于线性参数化系统, 包括定常参数情形<sup>[2]</sup>、时变参数情形<sup>[3]</sup>下的给定参考轨迹跟踪、变轨迹跟踪问题<sup>[4-5]</sup>, 以及初值问题<sup>[6]</sup>. 已发表的文献中讨论的高阶内模允许参数沿迭代轴变化<sup>[7]</sup>. 为了处理非参数不确定性, 常采取鲁棒处理方

法. 文献[8]提出的鲁棒迭代学习控制方案中, 结合了变结构控制技术. 文献[9]讨论了含有结构/非结构不确定性的机器人系统. 文献[10]分别考虑有限区间上重复作业的控制系统与周期运行过程, 设计鲁棒学习控制器. 文献[11]讨论非参数化不确定系统的误差轨迹跟踪问题, 提出的鲁棒迭代学习控制算法可以实现对期望误差轨迹的跟踪. 近年来的研究成果还涉及强双曲分布参数系统的迭代学习控制<sup>[12]</sup>, 非最小相位系统的扩展Laguerre基函数迭代学习控制<sup>[13]</sup>等.

为了增强系统的鲁棒性, 在设计学习控制器时, 常采用饱和函数或投影算法对控制量或参数估值进行限幅<sup>[14-15]</sup>. 在应用场合, 考虑到实际设备的承受极限, 以及可能由此引发的设备安全问题, 仅仅对控制输入

和参数的估计值进行限幅是不够的,有必要采取措施对系统状态/输出的幅值予以约束.例如飞机降落时,若其着陆速度过大,需要的滑跑距离太长,可能导致事故发生;又如直线电机运行时,若动子位移过大,可能撞击导轨端部,致使电机损坏.文献[16]提出运动控制系统在速度受限情形下的积分反演设计,采用BLF函数(Barrier Lyapunov function)设计控制器.文献[17]针对单输入单输出严格反馈系统,采用BLF设计自适应控制器.文献[18]针对含参数和非参数不确定系统,基于BLF设计学习控制器.

本文讨论一类非参数不确定系统的约束迭代学习控制问题,构造形式简单的二次分式型BLF函数函数(quadratic-fraction BLF, QFBLF),用于学习控制器设计.分析表明,该控制方案能够实现系统状态沿整个作业区间对参考轨迹的完全跟踪.同时,系统误差二次型在迭代过程中囿于预设的界内,从而实现迭代过程中对系统状态的约束.

## 2 问题的提法(Problem formulation)

考虑在时间区间 $[0, T]$ 上重复运行的不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k) + g(\mathbf{x}_k)u_k, \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $k (= 0, 1, 2, \dots)$  为重复作业次数,  $\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})^T \in \mathbb{R}^n$  为可量测的系统状态,  $u_k \in \mathbb{R}$  为控制输入,  $f(\mathbf{x}_k)$  与  $g(\mathbf{x}_k)$  为未知的光滑函数.

给定区间 $[0, T]$ 上的参考信号  $\mathbf{x}_d = (x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd})^T$ , 记  $u_d$  为产生  $\mathbf{x}_d$  的期望控制输入, 满足

$$\begin{cases} \dot{x}_{id} = x_{i+1d}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{nd} = f(\mathbf{x}_d) + g(\mathbf{x}_d)u_d. \end{cases} \quad (2)$$

定义跟踪误差

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d = (e_{1,k}, e_{2,k}, \dots, e_{n,k})^T. \quad (3)$$

由式(1)与式(2)知

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}(c^T \mathbf{e}_k + f_k - f_d + g_k u_k - g_d u_d), \quad (4)$$

此处,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \cdots & -c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

以及  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n)^T$ ,  $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为Hurwitz多项式  $p(s) = s^n + c_n s^{n-1} + \dots + c_2 s + c_1$  的系数. 存在适当维数的正定对称矩阵  $P$  与  $Q$ , 使得

$$PA + A^T P = -Q. \quad (5)$$

系统(1)满足下列假设:

**假设1** 存在已知连续函数  $g_{\min}(\mathbf{x}_k)$  使得  $0 < g_{\min}(\mathbf{x}_k) \leq g(\mathbf{x}_k)$ .

**假设2** 函数  $f(\cdot)$  与  $g(\cdot)$  满足下述条件:

$$|f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_d)| \leq \alpha_f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d) \|\mathbf{e}_k\|, \quad (6)$$

$$|g(\mathbf{x}_k) - g(\mathbf{x}_d)| \leq \alpha_g(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d) \|\mathbf{e}_k\|, \quad (7)$$

其中  $\alpha_f(\cdot, \cdot)$  和  $\alpha_g(\cdot, \cdot)$  为非负连续函数.

**假设3** 对于第  $k (k = 0, 1, 2, \dots)$  次迭代, 系统状态初始值  $\mathbf{x}_k(0)$  与参考信号的初始值  $\mathbf{x}_d(0)$  相等, 即  $\mathbf{e}_k(0) = 0$ .

本文的控制任务是, 设计学习控制器  $u_k$ , 使得在整个学习过程中系统误差囿于某预置范围内, 以实现系统状态的幅值限制, 保证所有闭环信号有界; 经过足够多次迭代, 实现  $\mathbf{x}_k$  在作业区间上对  $\mathbf{x}_d$  的完全跟踪.

为表达简便, 在不引起混淆之处, 文中略去函数的时间自变量  $t$ .

## 3 控制器设计与性能分析(Controller design and performance analysis)

这一节, 本文提出一类二次分式型BLF函数, 并基于这类函数进行学习控制器设计.

### 3.1 二次分式型BLF函数(QFBLF functions)

为设计约束迭代学习控制器, 本文提出一类形式简单的二次分式型BLF函数, 其典型形式为

$$V_k(t) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k}{b_e - \mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k}, \quad (8)$$

其中  $b_e > 0$ .

应用BLF函数(8)时, 需假设实现时系统所受到的各种干扰无法使得

$$\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k > b_e$$

成立. 否则会导致  $V_k(t)$  负定, 致使系统发散. 这时, 可考虑如下形式的二次分式型BLF函数:

$$V_k(t) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k}{(b_e - \mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k)^2}. \quad (9)$$

正定的  $V_k(t)$  也可以有多种多样的形式, 例如:

$$V_k(t) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k}{(b_e - \|\mathbf{e}_k\|_P)^2}, \quad (10)$$

其中  $\|\mathbf{e}_k\|_P = \sqrt{\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k}$ .

本文以式(8)为例, 说明控制器设计方法及闭环系统性能. 采用其他形式BLF函数的学习控制器设计与闭环系统性能分析, 可依照进行.

### 3.2 部分限幅学习(Partially-saturated learning)

对于由式(8)给出的  $V_k(t)$ , 它关于时间的导数为

$$\dot{V}_k(t) = \frac{1}{2} \sigma_k (\dot{\mathbf{e}}_k^T P \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k^T P \dot{\mathbf{e}}_k), \quad (11)$$

式中  $\sigma_k = b_e / (b_e - \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{e}_k)^2$ . 由式(4)知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{P} \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}_k) = \\ & -\frac{1}{2} \mathbf{e}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}(\mathbf{c}^T \mathbf{e}_k + f_k - f_d) + \\ & \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}(g_k u_k - g_d u_d). \end{aligned}$$

记矩阵  $\mathbf{Q}$  的最小特征值为  $\lambda_Q$ , 则

$$-\frac{1}{2} \mathbf{e}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_k \leq -\frac{\lambda_Q}{2} \|\mathbf{e}_k\|^2.$$

由假设2知

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}(\mathbf{c}^T \mathbf{e}_k + f_k - f_d) \leq \\ & |\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}|(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|) \|\mathbf{e}_k\| \leq \\ & \left(\frac{\sqrt{\lambda_Q}}{2} \|\mathbf{e}_k\|\right)^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_Q}} |\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}|(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)\right]^2 \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}(g_k u_k - g_d u_d) = \\ & \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}(g_k u_k - g_k u_{dk} + g_k u_{dk} - g_d u_{dk} + \\ & g_d u_{dk} - g_d u_d) \leq \\ & \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}(g_k u_k - g_k u_{dk} + g_d u_{dk} - g_d u_d) + \\ & |\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}| u_{dk} |\alpha_{gk}| \|\mathbf{e}_k\| \leq \\ & \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}(g_k u_k - g_k u_{dk} + g_d u_{dk} - g_d u_d) + \\ & \left(\frac{\sqrt{\lambda_Q}}{2} \|\mathbf{e}_k\|\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_Q}} |\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}| \alpha_{gk} u_{dk}\right)^2. \end{aligned}$$

将以上4个式子代入式(11),

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(t) & \leq \\ & \sigma_k [\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} \left( \frac{1}{\lambda_Q} \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} ((\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)^2 + (\alpha_{gk} u_{dk})^2) + \right. \\ & \left. g_k (u_k - u_{dk}) + g_d (u_{dk} - u_d) \right)]. \end{aligned} \quad (12)$$

由此, 可设计第  $k$  次迭代时的控制律

$$\begin{aligned} u_k & = u_{dk} - \frac{1}{g_{\min} \lambda_Q} \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} ((\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)^2 + \\ & (\alpha_{gk} u_{dk})^2), \end{aligned} \quad (13)$$

以及学习律

$$u_{dk} = \text{sat}(u_{dk-1}) - \gamma \sigma_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}, \quad (14)$$

式中:  $\gamma > 0$  为增益,  $u_{d-1} = 0$ ,  $\text{sat}(\cdot)$  表示饱和函数, 其定义为

$$\text{sat}(\cdot) = \begin{cases} \cdot, & |\cdot| \leq \bar{u}, \\ \bar{u}, & \cdot > \bar{u}, \\ -\bar{u}, & \cdot < -\bar{u}, \end{cases}$$

其中  $\bar{u}$  为该函数的限幅值, 满足  $\bar{u} \geq |u_d|$ .

将式(13)–(14)代入式(12),

$$\dot{V}_k(t) \leq \sigma_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} g_d (u_{dk} - u_d). \quad (15)$$

**定理 1** 在假设1–3下, 由系统(1), 控制律(13)和

学习律(14)组成的闭环系统中的所有变量有界, 在每次迭代运行时,  $\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{e}_k < b_e$  始终成立; 当迭代次数足够大时,  $\mathbf{x}_k$  完全跟踪  $\mathbf{x}_d$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0, t \in [0, T]$ .

**证** i) 先证明  $\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{e}_k < b_e$ . 考虑下述类Lyapunov 泛函

$$L_k(t) = V_k(t) + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t g(x_d(\tau)) [u_{dk}(\tau) - u_d(\tau)]^2 d\tau.$$

对上式两端求导:

$$\begin{aligned} \frac{dL_k}{dt} & = \dot{V}_k(t) + \frac{1}{2\gamma} g_d [u_{dk}(t) - u_d(t)]^2 \leq \\ & \sigma_k [\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} g_d (u_{dk} - u_d)] + \\ & \frac{1}{2\gamma} g_d [u_{dk}(t) - u_d(t)]^2. \end{aligned} \quad (16)$$

注意到

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} \sigma_k g_d (u_{dk} - u_d) + \frac{1}{2\gamma} g_d (u_{dk} - u_d)^2 = \\ & \frac{g_d}{2\gamma} (u_{dk} - u_d)(-u_d + 2\text{sat}(u_{dk-1}) - u_{dk}) = \\ & \frac{g_d}{2\gamma} [-u_{dk}^2 + 2\text{sat}(u_{dk-1})u_{dk} - \\ & u_d(2\text{sat}(u_{dk-1}) - u_d)] = \\ & -\frac{g_d}{2\gamma} [u_{dk} - \text{sat}(u_{dk-1})]^2 + \frac{g_d}{2\gamma} (\text{sat}(u_{dk-1}))^2 - \\ & \frac{g_d}{2\gamma} u_d [2\text{sat}(u_{dk-1}) - u_d]. \end{aligned} \quad (17)$$

结合式(16)与式(17), 可得

$$\begin{aligned} \frac{dL_k}{dt} & \leq \frac{g_d}{2\gamma} (\text{sat}(u_{dk-1}))^2 - \\ & \frac{g_d}{2\gamma} [u_{dk} - \text{sat}(u_{dk-1})]^2 - \\ & \frac{g_d}{2\gamma} u_d [2\text{sat}(u_{dk-1}) - u_d]. \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)右端的第2项非正, 其余两项有界, 从而

$$\frac{dL_k(t)}{dt} < +\infty, t \in [0, T]. \quad (19)$$

由假设3知  $L_k(0) = 0$ , 故

$$L_k(t) < +\infty, t \in [0, T], k = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

也即在  $[0, T]$  上,  $b_e - \mathbf{e}_k^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_k(t) \neq 0$  恒成立. 由于  $b_e - \mathbf{e}_k^T(0) \mathbf{P} \mathbf{e}_k(0) > 0$ , 故在  $[0, T]$  上,

$$b_e - \mathbf{e}_k^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_k(t) > 0,$$

即  $\mathbf{e}_k^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_k(t) < b_e$ . 则  $\mathbf{e}_k$  有界. 于是可推知  $\mathbf{x}_k, u_{dk}$  的有界性, 进而可以得到  $u_k$  的有界性.

ii) 再分析系统收敛性. 对于  $k > 0$ ,

$$\begin{aligned} & L_k - L_{k-1} = \\ & \frac{1}{2\gamma} \int_0^t g_d [(u_{dk} - u_d)^2 - (u_{dk-1} - u_d)^2] d\tau + \\ & V_k - V_{k-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

由假设3及式(15)知

$$V_k \leq \int_0^t \sigma_k [\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} g_d(u_{dk} - u_d)] d\tau. \quad (22)$$

将式(22)代入式(21),

$$\begin{aligned} L_k - L_{k-1} &\leq \\ &\frac{1}{2\gamma} \int_0^t g_d [(u_{dk} - u_d)^2 - (u_{dk-1} - u_d)^2] d\tau + \\ &\int_0^t \sigma_k [\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} g_d(u_{dk} - u_d)] d\tau - V_{k-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

注意到

$$\begin{aligned} (u_{dk} - u_d)^2 - (u_{dk-1} - u_d)^2 &\leq \\ (u_{dk} - u_d)^2 - (\text{sat}(u_{dk-1}) - u_d)^2 &= \\ (u_{dk} - 2u_d + \text{sat}(u_{dk-1}))(u_{dk} - \text{sat}(u_{dk-1})) &= \\ \gamma \sigma_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} (2u_d - u_{dk} - \text{sat}(u_{dk-1})) &\leq \\ 2\gamma \sigma_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} (u_d - u_{dk}), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\gamma} (u_{dk} - u_d)^2 - (u_{dk-1} - u_d)^2 + \\ &\sigma_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} (u_{dk} - u_d) \leq 0. \end{aligned}$$

将上述两式代入式(23),

$$L_k - L_{k-1} \leq -V_{k-1}. \quad (24)$$

取式(24)中的  $k = 1, 2, \dots, N$ , 并求和得

$$L_N(t) \leq L_0(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{e}_{j-1}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{j-1}}{b_e - \mathbf{e}_{j-1}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{j-1}}. \quad (25)$$

由i)知,  $0 \leq L_0(t) < +\infty$ , 因而  $0 \leq L_N(t) < +\infty$ . 根据级数收敛的必要条件知,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{e}_k = 0$ . 证毕.

由  $\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{e}_k < b_e$ , 可推得  $\lambda_P \|\mathbf{e}_k\|^2 < b_e$ , 即  $\|\mathbf{e}_k\| < \sqrt{b_e}/\sqrt{\lambda_P}$ ,  $\lambda_P$  为矩阵  $\mathbf{P}$  的最小特征值. 于是

$$\|\mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{e}_k\| + \|\mathbf{x}_d\| \leq \sqrt{b_e}/\sqrt{\lambda_P} + \|\mathbf{x}_d\|. \quad (26)$$

因此, 通过约束  $\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{e}_k$ , 实现了对  $\mathbf{x}_k$  的幅值限制.

### 3.3 完全限幅学习(Fully-saturated learning)

在第3.2节中, 设计学习律(14)时采用了部分限幅机制. 为了能做到将估值围于预先确定的范围内, 这一小节讨论完全限幅学习下的迭代学习控制问题. 为此, 采用如下形式的控制律:

$$\begin{aligned} u_k &= u_{dk} - \frac{1}{g_{\min} \lambda_Q} \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} ((\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)^2 + \\ &(\alpha_{gk} u_{dk})^2), \end{aligned} \quad (27)$$

以及学习律

$$u_{dk} = \text{sat}(\hat{u}_{dk}), \quad (28)$$

$$\hat{u}_{dk} = \text{sat}(\hat{u}_{dk-1}) - \gamma \sigma_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}, \quad (29)$$

其中  $\hat{u}_{d-1} = 0$ .

**定理2** 在假设1-3下, 由系统(1), 控制律(27)和学习律(28)-(29)组成的闭环系统的所有变量有界, 且在每次运行过程中,  $\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{e}_k < b_e$  成立; 当迭代次数足够大时,  $\mathbf{x}_k$  能够完全跟踪上  $\mathbf{x}_d$ , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}_k(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

证 i) 先证明  $\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{e}_k < b_e$ . 计算  $L_k$  对时间  $t$  的导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dL_k}{dt} &\leq \sigma_k [\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} g_d(u_{dk} - u_d)] + \\ &\frac{1}{2\gamma} g_d [u_{dk}(t) - u_d(t)]^2, \end{aligned} \quad (30)$$

这里

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} \sigma_k g_d(u_{dk} - u_d) = \\ &\frac{g_d}{\gamma} (u_{dk} - u_d) (2\gamma \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} \sigma_k) = \\ &\frac{g_d}{\gamma} (u_{dk} - u_d) (2\text{sat}(\hat{u}_{dk-1}) - 2\hat{u}_{dk}). \end{aligned} \quad (31)$$

当  $\hat{u}_{dk} \geq \bar{u}_d$  时,

$$(u_{dk} - u_d) \hat{u}_{dk} = (\bar{u}_d - u_d) \hat{u}_{dk} \geq 0;$$

当  $\hat{u}_{dk} \leq -\bar{u}_d$  时,

$$(u_{dk} - u_d) \hat{u}_{dk} = (-\bar{u}_d - u_d) \hat{u}_{dk} \geq 0.$$

于是

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} \sigma_k g_d(u_{dk} - u_d) \leq \\ &\frac{2g_d}{\gamma} (u_{dk} - u_d) \text{sat}(\hat{u}_{dk-1}) < +\infty. \end{aligned} \quad (32)$$

由饱和函数的性质知,

$$\frac{1}{2\gamma} g_d (u_{dk} - u_d)^2 < +\infty. \quad (33)$$

结合式(30)(32)-(33),

$$\frac{dL_k(t)}{dt} < +\infty, \quad t \in [0, T]. \quad (34)$$

于是,  $L_k(t)$  有界, 且  $\mathbf{e}_k^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_k(t) < b_e$ . 同时, 可推知闭环系统所有变量的有界性.

ii) 收敛性分析.

与定理1的证明过程类似, 可推知式(23)成立. 注意到

$$\begin{aligned} &(u_{dk} - u_d)^2 - (u_{dk-1} - u_d)^2 = \\ &-2(u_d - u_{dk})(u_{dk} - u_{dk-1}) - (u_{dk} - u_{dk-1})^2 \leq \\ &-2(u_d - u_{dk})(u_{dk} - u_{dk-1}), \end{aligned} \quad (35)$$

利用式(28)-(29)及式(35), 得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\gamma} (u_{dk} - u_d)^2 - (u_{dk-1} - u_d)^2 + \\ &\sigma_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b} (u_{dk} - u_d) \leq \\ &\frac{1}{\gamma} (u_d - u_{dk})(u_{dk-1} - u_{dk} - \gamma \sigma_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{P} \mathbf{b}) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\gamma}(u_d - \text{sat}(\hat{u}_{dk}))(\hat{u}_{dk} - \text{sat}(\hat{u}_{dk})). \quad (36)$$

结合式(23)与式(36), 得

$$L_k - L_{k-1} \leq -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_{k-1}^T P \mathbf{e}_{k-1}}{b_e - \mathbf{e}_{k-1}^T P \mathbf{e}_{k-1}} \leq 0. \quad (37)$$

至此, 类似于定理1的证明过程, 可证得相应的结果. 证毕.

可以看出, 学习律中采用限幅措施, 确保了  $\frac{dL_k}{dt}$  有界, 文中给出的完全限幅/部分限幅机制均可达到这一目的.

由定理1-2可以看出, 提出的约束迭代学习控制方法能够将系统状态限制于预定范围内, 这种方法恰好适于有限作业区间上运行的动态系统或过程.

#### 4 数值算例(Numerical simulation)

考虑如下动态系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k}, \\ \dot{x}_{2,k} = -0.1x_{2,k} - x_{1,k}^3 + \cos t + \\ \quad (1 + 0.01x_{1,k}^2 + 0.005x_{2,k}^2)u_k, \end{cases}$$

这里:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) &= -0.1x_{2,k} - x_{1,k}^3 + \cos t, \\ g(\mathbf{x}_k) &= 1 + 0.01x_{1,k}^2 + 0.005x_{2,k}^2. \end{aligned}$$

给定参考轨迹  $[12t^2(1-t), 24t(1-t) - 12t^2]^T$ . 假设1中的  $g_{\min}(\mathbf{x}_k) = 1$ .

采用控制律(27)、学习律(28)-(29)仿真. 仿真中, 取

$$\gamma = 1, b_e = 2.25, \bar{u} = 50, \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

假设2中:

$$\begin{cases} \alpha_{fk} = 0.1 + |x_{1d}^2 + x_{1,k}^2 + x_{1d}x_{1,k}|, \\ \alpha_{gk} = 0.01|x_{1d} + x_{1,k}| + 0.005|x_{2d} + x_{2,k}|. \end{cases} \quad (38)$$

迭代300次后, 仿真结果如图1-4所示. 从图1-2可以看出, 经过足够多次迭代,  $\mathbf{x}_k$  在整个作业区间上完全跟踪  $\mathbf{x}_d$ . 其中,  $J_k = \max_{t \in [0, T]} |\mathbf{e}_k^T(t) P \mathbf{e}_k(t)|$ . 由图3可以看出, 在迭代过程中,  $|\mathbf{e}_k^T(t) P \mathbf{e}_k(t)|, t \in [0, T]$  被约束于  $[0, b_e]$  区间内. 图4给出了学习过程收敛后获得的控制输入信号.

为了比较, 采用下述无约束学习控制:

$$\begin{aligned} u_k &= u_{dk} - \frac{1}{g_{\min} \lambda_Q} \mathbf{e}_k^T P \mathbf{b} ((\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)^2 + \\ &\quad (\alpha_{gk} u_{dk})^2), \\ u_{dk} &= \text{sat}(\hat{u}_{dk}), \\ \hat{u}_{dk} &= \text{sat}(\hat{u}_{dk-1}) - \gamma \mathbf{e}_k^T P \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (39)$$

其中  $\hat{u}_{d-1} = 0$ . 在控制器(39)作用下的控制效果如图5所示. 而在图5中,  $J_k \leq b_e$  未满足. 与图3对比, 采用含约束学习控制达到了预期的、能够实现状态约束的控制性能.

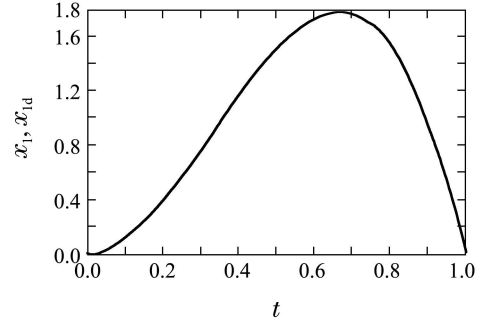


图1 状态  $x_1$  及其参考轨迹  $x_{1d}$

Fig. 1 State  $x_1$  and the reference trajectory  $x_{1d}$

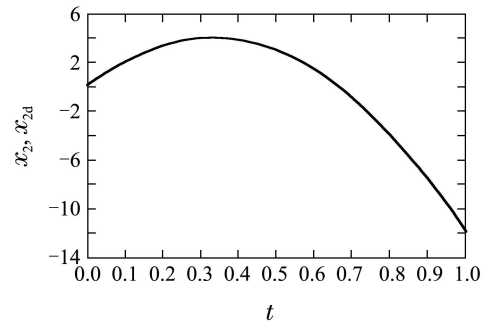


图2 状态  $x_2$  及其参考轨迹  $x_{2d}$

Fig. 2 State  $x_2$  and the reference trajectory  $x_{2d}$

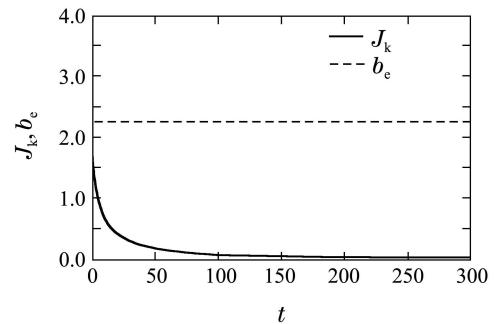


图3  $\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k$  随迭代次数变化的情况

Fig. 3 The variable  $\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k$  with respect to iteration

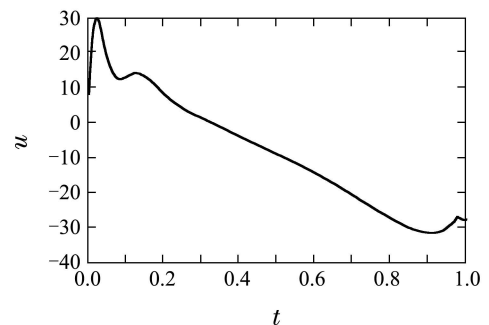


图4 控制输入

Fig. 4 Control input

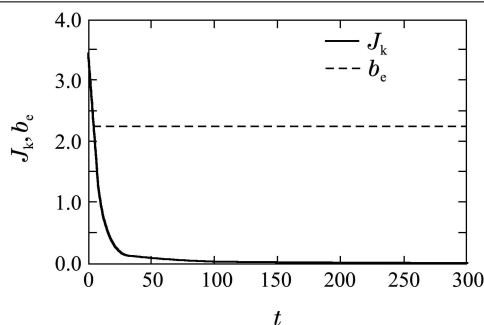


图5 无约束学习控制下的 $e_k^T P e_k$

Fig. 5 The variable  $e_k^T P e_k$  by the learning control (39) with no barrier functions

## 5 结论(Conclusions)

本文构造二次分式型BLF函数,并基于这种Barrier函数,提出了能够实现状态约束的迭代学习控制算法.文中针对一类非参数不确定系统,讨论了部分限幅学习和完全限幅学习方案.所设计的学习控制器可实现系统状态在整个作业区间上完全跟踪参考轨迹,并使得系统误差的二次型在迭代过程中囿于预设的界内,实现了在整个运行过程中对系统状态的约束.值得指出的是,文中提出的二次分式型BLF函数及基于它的控制系统设计方法是新颖的,适用对于更广泛的动态系统,是值得进一步研究的课题.

## 参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.
- [2] FRENCH M, ROGERS E. Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique [J]. *International Journal of Control*, 2000, 73(10): 840 – 850.
- [3] QU Z, XU J X. Model-based learning controls and their comparisons using Lyapunov direct method [J]. *Asian Journal of Control*, 2002, 4(1): 99 – 110.
- [4] XU J X, XU J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2004, 34(1): 589 – 597.
- [5] 李俊民, 孙云平, 刘赞. 非一致目标跟踪的混合自适应迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(1): 100 – 104.  
(LI Junmin, SUN Yunping, LIU Yun. Hybrid adaptive iterative learning control of non-uniform trajectory tracking [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(1): 100 – 104.)
- [6] CHIEN C J. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(5): 724 – 732.
- [7] YIN C, XU J X, HOU Z S. A high-order internal model based learning control scheme for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2665 – 2670.
- [8] XU J X, QU Z. Robust iterative learning control for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(8): 983 – 988.
- [9] 杨胜跃, 罗安, 樊晓平. 不确定性机器人系统自适应鲁棒迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(5): 707 – 712.  
(YANG Shengyue, LUO An, FAN Xiaoping. Adaptive robust iterative learning control for uncertain robotic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(5): 707 – 712.)
- [10] 刘利, 孙明轩. 不确定时变系统的鲁棒学习控制算法 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(3): 323 – 328.  
(LIU Li, SUN Mingxuan. Robust learning control algorithms for uncertain time-varying systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(3): 323 – 328.)
- [11] 严求真, 孙明轩. 一类非线性系统的误差轨迹跟踪鲁棒学习控制算法 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(1): 23 – 30.  
(YAN Qizhen, SUN Mingxuan. Error trajectory tracking by robust learning control for nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(1): 23 – 30.)
- [12] 戴喜生, 田森平. 一阶强双曲分布参数系统的迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 1086 – 1089.  
(DAI Xisheng, TIAN Senping. Iterative learning control for first order strong hyperbolic distributed parameter systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1086 – 1089.)
- [13] 刘山, 刘杰. 非最小相位系统的扩展Laguerre基函数迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 985 – 992  
(LIU Shan, LIU Jie. Extended Laguerre basis function based iterative learning control for non-minimum phase systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 985 – 992.)
- [14] MARINO R, TOMEI P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1991 – 1996.
- [15] 孙明轩, 王郸维, 陈彭年. 有限区间非线性系统的重复学习控制 [J]. *中国科学: 信息科学*, 2010, 40(3): 433 – 444.  
(SUN Mingxuan, WANG Danwei, CHEN Pengnian. Repetitive learning control of nonlinear systems over finite intervals [J]. *China science: Information Sciences*, 2010, 40(3): 433 – 444.)
- [16] NGO K B, MAHONY R, JIANG Z P. Integrator backstepping design for motion systems with velocity constraint [C] // *The 5th Asian Control Conference*. Melbourne, Australia, 2004, 1: 141 – 146.
- [17] TEE K P, GE S S, TAY E H. Barrier Lyapunov Functions for the control of output-constrained nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 918 – 927.
- [18] XU J X, JIN X. State-constrained iterative learning control for a class of MIMO systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(5): 1322 – 1327.

## 作者简介:

孙明轩 (1961–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn;

张伟博 (1990–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: zhangwb1990@126.com;

严求真 (1972–), 男, 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: zjyqz@126.com.