第 31 卷第 6 期
2014 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 31 No. 6
Jun. 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.31111

一类内部点级联的PDE-ODE系统的边界控制

郭春丽[1†], 周中成[2]

(1. 四川文理学院 数学与财经学院, 四川 达州 635000; 2. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要: 本文运用backstepping方法研究了一类偏微分方程与常微分方程(PDE-ODE)级联系统的能稳性. 常见的级联系统在边界点$x=0$处级联, 而本文所讨论的级联系统在内部点$x_0\in(0,1)$处级联, 级联点的改变使得新系统的控制问题更加复杂. 针对新系统, 首先, 我们改进了backstepping方法中的常见变换, 改进后的变换与常见变换相比, 增加了变换中的核函数, 且得到的是带有多个相容性条件的核方程组, 给求解带来了困难. 文中运用了一系列的技巧解出核函数, 从而得到反馈控制器; 其次, 运用同样的方法找到改进变换的逆变换; 最后, 选择合适范数, 利用变换的有界性证明得到闭环系统的稳定性.

关键词: 偏微分方程与常微分方程(PDE-ODE)级联系统; 边界控制; 稳定性; backstepping方法

中图分类号: TP213　　　**文献标识码**: A

Boundary control for a partial differential equation-ordinary differential equation system cascaded at internal point

GUO Chun-li[1†], ZHOU Zhong-cheng[2]

(1. School of Mathematics and Finance, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou Sichuan 635000, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: Stabilization of a partial differential equation-ordinary differential equation (PDE-ODE) system cascaded at internal point is considered by boundary control. This system is more complicated than the conventional ones because the interconnection point is the internal point $x_0\in(0,1)$. For this new system, a new backstepping transformation is introduced, which contains four kernel functions. Because the number of kernels is increased, the kernel equations with the compatibility conditions are more complicated. Fortunately, the kernel equations can be solved by a series of mathematical tricks to obtain their solutions. Then, the feedback controller is developed by using these kernel functions. The inverse transformation is derived by using the same procedure. Finally, we choose a proper norm and establish the stability of the closed-loop system by the boundedness of the transformation and the inverse transformation.

Key words: PDE-ODE cascaded system; boundary control; stability; backstepping method

1　引言(Introduction)

分布参数系统有着广泛的应用背景, 如热传导与波的传播过程, 化学反应器中的物质分布, 各种梁、板、壳等弹性体的运动和金融系统等等. 由于实际生活和工程的需要, 分布参数系统的控制得到广泛关注, 研究分布参数控制系统有着重大意义. 分布参数控制系统有点控制、分布式控制、边界控制等, 边界反馈控制因容易实现而受到了更大的重视.

近年来, 用来描述热传导与波的传播过程的偏微分方程(PDE)控制系统也受到极大关注(见文献[1–4]), 偏微分方程的边界反馈控制的常用方法有Lyapunov函数法, damping法和backstepping方法等等. Krstic和Smyshlyaev等人首先将backstepping方法应用于偏微分方程的边界控制问题中(见文献[2–8]). 由于该方法大大减少了以往解决此类问题所需的计算量, 突破了求解过程过于复杂的局限性, 因此得到很大发展.

由于偏微分方程与常微分方程(ODE)级联系统在工程上有较为广泛的应用背景, 于是学者们开始运用backstepping方法研究这类级联系统的能稳性, 并取得了不少研究成果(见文献[9–11,16]), 同时PDE-ODE耦合控制系统也有部分研究(见文献[12–13]). 但现有的文献中所考虑到的控制系统均是两类方程在边界点$x=0$处级联或耦合, 如文献[11]中研究了如下级联:

$$\begin{cases}\dot X(t)=AX(t)+Bu_x(0,t),\\ u_t(x,t)=u_{xx}(x,t),\end{cases}$$

收稿日期: 2013−10−23; 录用日期: 2014−02−21.
†通信作者. E-mail: gcl_1_2@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301427); 中央高校基本业务费资助项目(XDJK2014B021); 四川省教育厅资助项目(13ZB0101).

此时, 涉及到的级联系统是两类方程在边界点$x=0$处以Neumann边界形式级联.

又如文献[13]中研究的是如下耦合

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)+Bu(0,t),\\ u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+CX(t),\end{cases}$$

此时, 文献考虑的也是两类方程在边界点$x=0$处以Dirichlet边界形式耦合的控制系统. 而对于两类方程级联或耦合在内部点的控制系统目前还没有涉及到. 本文研究一类PDE-ODE级联系统

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)+Bu(x_0,t),\ t>0,\\ u_t(x,t)=u_{xx}(x,t),\ x\in(0,1),\ t>0,\\ u_x(0,t)=0,\ t>0,\\ u(1,t)=U(t),\ t>0,\end{cases}\tag{1}$$

其中: $A=\mu I_n,\mu\neq 0,X(t)\in\mathbb{R}^n$是常微分方程状态变量, $u(x,t)\in\mathbb{R}$是偏微分方程状态变量; $U(t)$是控制量. 假设系统(A,B)能控(若$\mu=0$系统不可控). 系统控制的目的是寻找控制量$U(t)$, 使得系统(1)在控制器$U(t)$作用下是稳定的.

本文研究的PDE-ODE级联控制系统(1)与现有文献[9–13]相比, 控制系统(1)的最大区别在于系统(1)中两类方程在内部点$x_0\in(0,1)$处级联, 由于级联点$x_0\in(0,1)$为内部点不再是边界点$x=0$, 因此, 在用backstepping方法设计反馈控制器时, 直接运用该方法中的常用变换不能设计出反馈控制器$U(t)$. 文中为了设计出控制器$U(t)$, 首先, 改进了backstepping方法中的常见变换, 改进后的变换与常见变换相比, 变换中核函数的个数从两个增加到四个, 这就使得含有核函数的方程组更加复杂, 文中运用了一系列数学技巧解出核函数, 从而得到反馈控制器; 其次, 运用同样的方法找到改进变换的逆变换; 最后, 选择合适范数, 利用变换和逆变换的有界性证明得到闭环系统的稳定性.

2 控制设计(Control design)

首先, 针对控制系统(1), 为了运用backstepping方法设计反馈控制器$U(t)$, 引入改进的变换

$$\begin{aligned}w(x,t)=&u(x,t)-p(x)\int_0^{x_0}q(y)u(y,t)\mathrm{d}y-\\&\int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\psi(x)X(t),\end{aligned}\tag{2}$$

其中$p(x),q(y),k(x,y)$和$\psi(x)$是待定核函数.

变换(2)将原控制系统(1)转化为指数稳定的目标系统

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=(A+BK)X(t)+Bw(x_0,t),t>0,\\ w_t(x,t)=w_{xx}(x,t),\ x\in(0,1),t>0,\\ w_x(0,t)=0,t>0,\\ w(1,t)=0,t>0,\end{cases}\tag{3}$$

该变换思想来源于文献[11,14–15].

其次, 在变换(2)中令$x=1$, 并由目标系统(3)中的边界条件$w(1,t)=0$, 可得反馈控制器

$$\begin{aligned}U(t)=&p(1)\int_0^{x_0}q(y)u(y,t)\mathrm{d}y+\\&\int_0^1 k(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y+\psi(1)X(t).\end{aligned}\tag{4}$$

最后, 为了证明闭环系统(1)在反馈控制器(4)作用下是稳定的, 需要找到变换(2)的逆变换, 然后选取恰当状态空间与合适的范数, 利用原变换和逆变换的有界性, 证明闭环系统的稳定性.

3 核函数的计算(Computation of kernels)

为了找到控制器$U(t)$, 需求解出变换(2)中的核函数$p(x),q(y),k(x,y),\psi(x)$. 由变换(2)将控制系统(1)转化为目标系统(3), 可得到核函数满足的方程组, 求解该方程组就可找到核函数, 从而得到控制器(4).

在变换(2)两边同时关于x求偏导, 有

$$\begin{aligned}w_x(x,t)=&u_x(x,t)-p'(x)\int_0^{x_0}q(y)u(y,t)\mathrm{d}y-\\&k(x,x)u(x,t)-\int_0^x k_x(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\\&\psi'(x)X(t)\end{aligned}\tag{5}$$

和

$$\begin{aligned}w_{xx}(x,t)=&u_{xx}(x,t)-p''(x)\int_0^{x_0}q(y)u(y,t)\mathrm{d}y-\\&k'(x,x)u(x,t)-k(x,x)u_x(x,t)-\\&k_x(x,x)u(x,t)-\int_0^x k_{xx}(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\\&\psi''(x)X(t),\end{aligned}\tag{6}$$

其中$k'(x,x)$表示函数$k(x,x)$关于x的导数,

$$k_x(x,x)=\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=x};k_y(x,x)=\frac{\partial k(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=x}.$$

类似地, 在变换(2)两边同时关于t求偏导, 有

$$\begin{aligned}&w_t(x,t)=\\&u_t(x,t)-p(x)\int_0^{x_0}q(y)u_t(y,t)\mathrm{d}y-\\&\int_0^x k(x,y)u_t(y,t)\mathrm{d}y-\psi(x)\dot{X}(t)=\\&u_{xx}(x,t)-p(x)\int_0^{x_0}q(y)u_{yy}(y,t)\mathrm{d}y-\\&\int_0^x k(x,y)u_{yy}(y,t)\mathrm{d}y-\psi(x)\left(AX(t)+Bu(x_0,t)\right)=\\&u_{xx}(x,t)-p(x)q(x_0)u_x(x_0,t)+p(x)q'(x_0)u(x_0,t)-\\&p(x)q'(0)u(0,t)-\int_0^{x_0}p(x)q''(y)u(y,t)\mathrm{d}y-\\&k(x,x)u_x(x,t)+k_y(x,x)u(x,t)-k_y(x,0)u(0,t)-\\&\int_0^x k_{yy}(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\\&\psi(x)AX(t)-\psi(x)Bu(x_0,t).\end{aligned}\tag{7}$$

由式(6)(7)和$w_t = w_{xx}$, 有

$$
\begin{aligned}
&w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = \\
&2k'(x,x)u(x,t) - p(x)q(x_0)u_x(x_0,t) + \\
&\int_0^{x_0} \left(p''(x)q(y) - p(x)q''(y)\right) u(y,t)\mathrm{d}y - \\
&\left(p(x)q'(0) + k_y(x,0)\right) u(0,t) + \\
&\int_0^{x} \left(k_{xx}(x,y) - k_{yy}(x,y)\right) u(y,t)\mathrm{d}y + \\
&\left(p(x)q'(x_0) - \psi(x)B\right) u(x_0,t) + \\
&\left(\psi''(x) - \psi(x)A\right)X(t) = 0,
\end{aligned} \tag{8}
$$

因此, 选取核函数$p(x), q(y), k(x,y)$ 满足方程组

$$
\begin{cases}
k_{xx}(x,y) - k_{yy}(x,y) = 0, \\
k'(x,x) = 0, k_y(x,0) = -p(x)q'(0), \\
p''(x)q(y) = p(x)q''(y), \\
q(x_0) = 0, \\
\psi''(x) - \psi(x)A = 0, \\
p(x)q'(x_0) - \psi(x)B = 0.
\end{cases}
$$

由式(5)和目标系统中的边界条件$w_x(0,t) = 0$, 有

$$
\begin{aligned}
w_x(0,t) =& u_x(0,t) - p'(0)\int_0^{x_0} q(y)u(y,t)\mathrm{d}y - \\
& k(0,0)u(0,t) - \psi'(0)X(t) = 0.
\end{aligned}
$$

故$k(0,0) = 0, p'(0) = 0, \psi'(0) = 0$. 由$k'(x,x) = 0$, $k(0,0) = 0$, 可得$k(x,x) = 0$.

由式(2)和目标系统(3)中$X(t)$所满足的方程, 有

$$
\begin{aligned}
\dot{X}(t) =& AX(t) + Bu(x_0,t) = \\
& \left(A + B\psi(x_0)\right) X(t) + Bw(x_0,t) + \\
& B\int_0^{x_0} \left(p(x_0)q(y) + k(x_0,y)\right) u(y,t)\mathrm{d}y = \\
& (A + BK)X(t) + Bw(x_0,t),
\end{aligned}
$$

从而得到 $\psi(x_0) = K, p(x_0)q(y) + k(x_0,y) = 0$, 故$k(x,y), p(x), q(y)$和$\psi(x)$满足耦合方程组

$$
\begin{cases}
k_{xx}(x,y) - k_{yy}(x,y) = 0, \\
k(x,x) = 0, k_y(x,0) = -p(x)q'(0), \\
p''(x)q(y) = p(x)q''(y), \\
q(x_0) = 0,\ p'(0) = 0, \\
p(x_0)q(y) + k(x_0,y) = 0, \\
\psi''(x) - \psi(x)A = 0, \\
\psi'(0) = 0,\ \psi(x_0) = K, \\
p(x)q'(x_0) - \psi(x)B = 0.
\end{cases} \tag{9}
$$

为了求解出核函数, 首先, 将方程组(9)分拆成3个方程组, 核函数$k(x,y)$满足方程组

$$
\begin{cases}
k_{xx}(x,y) - k_{yy}(x,y) = 0, \\
k(x,x) = 0, \\
k_y(x,0) = -p(x)q'(0),
\end{cases} \tag{10}
$$

核函数$p(x), q(y)$ 满足方程组

$$
\begin{cases}
p''(x)q(y) = p(x)q''(y), \\
q(x_0) = 0,\ p'(0) = 0,
\end{cases} \tag{11}
$$

$\psi(x)$满足方程

$$
\begin{cases}
\psi''(x) - \psi(x)A = 0, \\
\psi(x_0) = K,\ \psi'(0) = 0,
\end{cases} \tag{12}
$$

同时核函数需满足相容性条件

$$
p(x_0)q(y) + k(x_0,y) = 0 \tag{13}
$$

和

$$
p(x)q'(x_0) - \psi(x)B = 0. \tag{14}
$$

其次, 由方程组(10)–(12)分别解出核函数$p(x)$, $q(y), \psi(x), k(x,y)$, 最后, 选取恰当的待定参数使得两相容性条件成立.

由文献[4], 可得方程组(10)的解为

$$
k(x,y) = \int_0^{x-y} p(s)q'(0)\mathrm{d}s, \tag{15}
$$

由方程(11), 可得

$$
\frac{p''(x)}{p(x)} = \frac{q''(y)}{q(y)} = \gamma, \tag{16}
$$

其中γ是待定常数. 根据γ的符号, 下面分两种情况分别讨论方程(9)的解.

i) 当$\gamma = \lambda^2 > 0$时的情况:

此时, $p(x), q(y)$满足如下方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{p''(x)}{p(x)} = \dfrac{q''(y)}{q(y)} = \lambda^2, \\
q(x_0) = 0, p'(0) = 0,
\end{cases} \tag{17}
$$

解方程组(17)可得

$$
\begin{cases}
p(x) = \alpha \mathrm{e}^{\lambda x} + \alpha \mathrm{e}^{-\lambda x}, \\
q(y) = \beta \mathrm{e}^{\lambda y} - \beta \mathrm{e}^{\lambda(2x_0 - y)},
\end{cases} \tag{18}
$$

其中α, β和λ是待定参数, 则由式(15)可得

$$
\begin{aligned}
k(x,y) =& \int_0^{x-y} p(s)q'(0)\mathrm{d}s = \\
& \alpha\beta(1 + \mathrm{e}^{2\lambda x_0})(\mathrm{e}^{\lambda(x-y)} - \mathrm{e}^{-\lambda(x-y)}).
\end{aligned} \tag{19}
$$

下面通过验证相容性条件(13)和(14), 得到方程(12)的解以及待定参数需要满足的条件.

由式(18)(19), 有

$$
\begin{aligned}
& p(x_0)q(y) + k(x_0,y) = \\
& \alpha\beta\left(\mathrm{e}^{\lambda x_0} + \mathrm{e}^{-\lambda x_0}\right)\left(\mathrm{e}^{\lambda y} - \mathrm{e}^{\lambda(2x_0 - y)}\right) + \\
& \alpha\beta\left(1 + \mathrm{e}^{2\lambda x_0}\right)\left(\mathrm{e}^{\lambda(x_0 - y)} - \mathrm{e}^{-\lambda(x_0 - y)}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

故相容性条件(13)满足. 由式(14)(18), $\psi(x_0)=K$, 有

$$p(x_0)q'(x_0)-\psi(x_0)B=\\ 2\lambda\alpha\beta\mathrm{e}^{\lambda x_0}\left(\mathrm{e}^{\lambda x_0}+\mathrm{e}^{-\lambda x_0}\right)-KB=0,$$

因此, 要使相容性条件(14)成立. α,β需满足

$$\alpha\beta=\frac{KB}{2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x_0}\left(\mathrm{e}^{\lambda x_0}+\mathrm{e}^{-\lambda x_0}\right)}, \tag{20}$$

将式(20)代入式(14), 可得方程组(12)的解为

$$\psi(x)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\mathrm{e}^{\lambda x_0}+\mathrm{e}^{-\lambda x_0}}K. \tag{21}$$

在式(21)两边关于x求导, 有

$$\psi'(x)=\lambda\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\mathrm{e}^{\lambda x_0}+\mathrm{e}^{-\lambda x_0}}K,$$

$$\psi''(x)=\lambda^2\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\mathrm{e}^{\lambda x_0}+\mathrm{e}^{-\lambda x_0}}K,$$

从而$\psi'(0)=0$. 将$\psi(x)$和$\psi''(x)$代入式(12), 得到λ满足$\lambda^2K-KA=0$, 则$\lambda^2-\mu=0$. 因此, 当α,β满足式(20)和$\lambda^2=\mu$时, 方程组(9)的解为式(18)(19)和(21).

ii) 当$\gamma=-\lambda^2<0$时的情况:

方程组(11)变为

$$\begin{cases}\dfrac{p''(x)}{p(x)}=\dfrac{q''(y)}{q(y)}=-\lambda^2,\\ q(x_0)=0, p'(0)=0.\end{cases} \tag{22}$$

下面分两种情况讨论方程组(22)的解.

1) $\sin(\lambda x_0)\neq 0$.

解方程组(22)有

$$\begin{cases}p(x)=\alpha\cos(\lambda x),\\ q(y)=\beta\left(\cos(\lambda y)-\cot(\lambda x_0)\sin(\lambda y)\right).\end{cases} \tag{23}$$

从而有

$$k(x,y)=\int_0^{x-y}p(s)q'(0)\mathrm{d}s=\\ -\alpha\beta\cot(\lambda x_0)\sin\left(\lambda(x-y)\right). \tag{24}$$

由式(23)–(24), 有

$$p(x_0)q(y)+k(x_0,y)=\\ \alpha\beta\cos(\lambda x_0)\left(\cos(\lambda y)-\cot(\lambda x_0)\sin(\lambda y)\right)-\\ \alpha\beta\cot(\lambda x_0)\sin\left(\lambda(x_0-y)\right)=0.$$

从而, 相容性条件 (13) 满足. 又由式 (23) 和 $\psi(x_0)=K$, 有

$$p(x_0)q'(x_0)-\psi(x_0)B=\\ -\lambda\alpha\beta\cos(\lambda x_0)\frac{1}{\sin(\lambda x_0)}-KB=\\ -\lambda\alpha\beta\cot(\lambda x_0)-KB.$$

因此, 为满足相容性条件(14), 只需取

$$\alpha\beta=-\frac{\tan(\lambda x_0)}{\lambda}KB. \tag{25}$$

由式(14)(25), 可得

$$\psi(x)=\frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda x_0)}K, \tag{26}$$

在上式两边关于x求导, 有

$$\psi'(x)=-\lambda\frac{\sin(\lambda x)}{\cos(\lambda x_0)}K,$$

$$\psi''(x)=-\lambda^2\frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda x_0)}K,$$

从而$\psi'(0)=0$. 将$\psi(x)$和$\psi''(x)$代入式(12), 则λ应满足$\lambda^2K+KA=0$, $\lambda^2+\mu=0$. 因此, 当$\alpha\beta$满足式(25)和$\lambda^2=-\mu$时, 方程组(9)的解为式(23)(24)和(26).

2) $\sin(\lambda x_0)=0$.

解方程组(22), 有

$$p(x)=\alpha\cos(\lambda x),\quad q(y)=\beta\sin(\lambda y). \tag{27}$$

由式(27)可得

$$k(x,y)=\int_0^{x-y}p(s)q'(0)\mathrm{d}s=\\ \alpha\beta\sin\left(\lambda(x-y)\right). \tag{28}$$

类似地, 由式(27)(28)和$\sin(\lambda x_0)=0$, 有

$$p(x_0)q(y)+k(x_0,y)=\\ \alpha\beta\cos(\lambda x_0)\sin(\lambda y)+\alpha\beta\sin\left(\lambda(x_0-y)\right)=0.$$

从而, 相容性条件(13)满足. 由式(27)和$\psi(x_0)=K$, 有

$$p(x_0)q'(x_0)-\psi(x_0)B=\lambda\alpha\beta\cos^2(\lambda x_0)-KB.$$

因此, 为满足相容性条件(14), 只需取

$$\alpha\beta=\frac{KB}{\lambda\cos^2(\lambda x_0)}. \tag{29}$$

由式(14)(29), 有

$$\psi(x)=\frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda x_0)}K, \tag{30}$$

在式(30)两边同时关于x求导, 有

$$\psi'(x)=-\lambda\frac{\sin(\lambda x)}{\cos(\lambda x_0)}K,$$

$$\psi''(x)=-\lambda^2\frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda x_0)}K,$$

则有$\psi'(0)=0$. 又由上式和式(12)有$\lambda^2K+KA=0$, $\lambda^2+\mu=0$. 因此, 当$\alpha\beta$满足式(29)和$\lambda^2=-\mu$时, 方程组(9)的解为式(27)(28)和(30).

综上所述, 可得如下定理.

定理 1 对任意$A=\mu I_n(\mu\neq 0)$, 方程组(9)的解存在且满足$p(\cdot)\in C^2([0,1])$, $q(\cdot)\in C^2([0,x_0])$, $k(\cdot,\cdot)\in C^2(\mathbb{T})$和$\psi(\cdot)\in C^2([0,1])$. 其中

$$\mathbb{T}:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}.$$

4 逆变换和稳定性(Inverse transformation and stability)

为了证明控制系统(1)在控制器(4)作用下是稳定的, 需要找到变换(2)的逆变换. 本节首先找到变换(2)的逆变换, 然后利用变换(2)和逆变换的有界性证明闭环系统(1)的稳定性.

4.1 逆变换(Inverse transformation)

下面证明变换(2)是可逆的, 设逆变换具有如下形式

$$\begin{aligned}u(x,t)=&w(x,t)+m(x)\int_0^{x_0}n(y)w(y,t)\mathrm{d}y+\\&\int_0^x l(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y+\phi(x)X(t),\end{aligned}\tag{31}$$

其中$m(x)$, $n(y)$, $l(x,y)$和$\phi(x)$是待定核函数. 运用第3节同样的方法, 计算u_t和u_{xx}, 有

$$\begin{aligned}&u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)=\\&-2l'(x,x)w(x,t)+m(x)n(x_0)w_x(x_0,t)+\\&\int_0^{x_0}(m(x)n''(y)-m''(x)n(y))\,w(y,t)\mathrm{d}y+\\&(m(x)n'(0)+l_y(x,0))\,w(0,t)-\\&\int_0^x(l_{xx}(x,y)-l_{yy}(x,y))\,w(y,t)\mathrm{d}y-\\&(m(x)n'(x_0)-\phi(x)B)\,w(x_0,t)-\\&(\phi''(x)-\phi(x)(A+BK))\,X(t).\end{aligned}\tag{32}$$

为使系统(1)中$u_t=u_{xx}$成立, 取核函数$l(x,y)$, $m(x)$, $n(y)$, $\phi(x)$满足方程组

$$\begin{cases}l_{xx}(x,y)-l_{yy}(x,y)=0,\\l'(x,x)=0, l_y(x,0)=-m(x)n'(0),\\m''(x)n(y)=m(x)n''(y),\\n(x_0)=0,\\\phi''(x)-\phi(x)(A+BK)=0,\\m(x)n'(x_0)-\phi(x)B=0.\end{cases}\tag{33}$$

由逆变换(31)和系统(1)(3)中的边界条件, 有

$$\begin{aligned}u_x(0,t)=&w_x(0,t)+m'(0)\int_0^{x_0}n(y)w(y,t)\mathrm{d}y+\\&l(0,0)w(0,t)+\phi'(0)X(t)=0.\end{aligned}$$

为使上式成立, 取 $m'(0)=0, l(0,0)=0, \phi'(0)=0$. 由$l'(x,x)=0$和$l(0,0)=0$, 可得$l(x,x)=0$. 又由

$$\begin{aligned}&\dot X(t)=AX(t)+Bu(x_0,t)=\\&AX(t)+B\Big(w(x_0,t)+\int_0^{x_0}l(x_0,y)w(y,t)\mathrm{d}y+\\&m(x_0)\int_0^{x_0}n(y)w(y,t)\mathrm{d}y+\phi(x_0)X(t)\Big)=\\&(A+B\phi(x_0))\,X(t)+Bw(x_0,t)+\\&B\int_0^{x_0}(m(x_0)n(y)+l(x_0,y))\,w(y,t)\mathrm{d}y=\\&(A+BK)X(t)+Bw(x_0,t),\end{aligned}\tag{34}$$

可得 $m(x_0)n(y)+l(x_0,y)=0$, $\phi(x_0)=K$. 综上可知$l(x,y)$, $m(x)$, $n(y)$, $\phi(x)$ 满足方程组

$$\begin{cases}l_{xx}(x,y)-l_{yy}(x,y)=0,\\l(x,x)=0, l_y(x,0)=-m(x)n'(0),\\m''(x)n(y)=m(x)n''(y),\\n(x_0)=0,\ m'(0)=0,\\m(x_0)n(y)+l(x_0,y)=0,\\\phi''(x)-(A+BK)\phi(x)=0,\\\phi(x_0)=K,\ \phi'(0)=0,\\m(x)n'(x_0)-\phi(x)B=0.\end{cases}\tag{35}$$

采用第3节类似的方法, 可证得如下定理, 从而得到变换(2)的逆变换为(31).

定理 2 对任意$A=\mu I_n(\mu\neq 0)$, 方程组(35) 的解存在且满足$m(\cdot)\in C^2([0,1])$, $n(\cdot)\in C^2([0,x_0])$, $l(\cdot,\cdot)\in C^2(\mathbb{T})$ 和$\phi(\cdot)\in C^2([0,1])$. 其中

$$\mathbb{T}:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}.$$

4.2 稳定性(Stability)

定理 3 由控制系统(1)和(4)组成的闭环系统是指数稳定的, 即存在正数σ和ρ, 使得

$$\|X(t)\|^2+\|u(t)\|_{L^2}^2\leqslant\sigma(\|X(0)\|^2+\|u(0)\|_{L^2}^2)\mathrm{e}^{-\rho t}$$

成立, 其中: $\|\cdot\|_{L^2}$是平方可积范数, $\|\cdot\|$是欧几里得范数, $\|u(t)\|_{L^2}^2$表示$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2$.

证 首先, 证明目标系统(3)是指数稳定的. 定义Lyapunov函数

$$V(t):=X(t)^{\mathrm T}PX(t)+\frac{a}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2,$$

其中矩阵$P=P^{\mathrm T}>0$是Lyapunov方程

$$P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm T}P=-Q$$

的解, Q为给定的正定矩阵, $a>0$是待定常数.

对$V(t)$关于t求导, 有

$$\begin{aligned}\dot V(t)=&\dot X(t)^{\mathrm T}PX(t)+X(t)^{\mathrm T}P\dot X(t)+\\&a\int_0^1 w_t(x,t)w(x,t)\mathrm{d}x=\\&X(t)^{\mathrm T}\big(P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm T}P\big)X(t)+\\&2X(t)^{\mathrm T}PBw(x_0,t)+\\&a\int_0^1 w_{xx}(x,t)w(x,t)\mathrm{d}x=\\&-X(t)^{\mathrm T}QX(t)+2X(t)^{\mathrm T}PBw(x_0,t)-\\&a\|w_x(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

由Young不等式, 可得

$$X(t)^{\mathrm T}PBw(x_0,t)\leqslant$$

$$\frac{4}{a}\|X(t)^{\mathrm{T}}PB\|^2+\frac{a}{16}w(x_0,t)^2. \tag{36}$$

又由Agmon不等式和$w(1,t)=0$, 可知

$$\begin{aligned}&w(x_0,t)^2\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|w(x,t)|^2\leqslant\\&w(1,t)^2+2\|w(t)\|_{L^2}\|w_x(t)\|_{L^2}\leqslant\\&2\|w(t)\|_{L^2}\|w_x(t)\|_{L^2},\end{aligned} \tag{37}$$

再由Poincaré不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\|w(t)\|_{L^2}=(\int_0^1 w(x,t)^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}\leqslant\\&(2w(1,t)^2+4\int_0^1 w_x(x,t)^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}=\\&2\|w_x(t)\|_{L^2},\end{aligned} \tag{38}$$

最后, 由式(36)–(38), 可得

$$\begin{aligned}\dot V(t)\leqslant&-X(t)^{\mathrm{T}}QX(t)-a\|w_x(t)\|_{L^2}^2+\\&2(\frac{4}{a}\|X(t)^{\mathrm{T}}PB\|^2+\frac{a}{16}w(x_0,t)^2)\leqslant\\&-X(t)^{\mathrm{T}}QX(t)-a\|w_x(t)\|_{L^2}^2+\\&2(\frac{4}{a}\|X(t)^{\mathrm{T}}PB\|^2+\frac{a}{4}\|w_x(t)\|_{L^2})\leqslant\\&-X(t)^{\mathrm{T}}QX(t)+\frac{8}{a}\|X(t)^{\mathrm{T}}PB\|^2-\\&\frac{a}{2}\|w_x(t)\|_{L^2}^2\leqslant\\&-X(t)^{\mathrm{T}}QX(t)+\frac{8}{a}\|X(t)^{\mathrm{T}}PB\|^2-\\&\frac{a}{8}\|w(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

因此, 取

$$a=\frac{16\lambda_{\max}(PBB^{\mathrm{T}}P)}{\lambda_{\min}(Q)},$$

可得

$$\begin{aligned}\dot V(t)\leqslant&-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2}\|X(t)\|^2-\frac{a}{8}\|w(t)\|_{L^2}^2\leqslant\\&-\min\{\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)},\frac{1}{4}\}V(t)\leqslant\\&-\rho V(t),\end{aligned}$$

其中$\rho=\min\{\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)},\frac{1}{4}\}$. 从而, 有

$$V(t)\leqslant V(0)\mathrm{e}^{-\rho t}, \tag{39}$$

即目标系统(3)是指数稳定的.

其次, 为了证明闭环系统(1)和(4)的稳定性, 需要找到闭环系统(1)的范数$\|((X(t),u(t))\|$与$V(t)$之间的关系. 由式(2), 有

$$\begin{aligned}&\|w(t)\|_{L^2}\leqslant\\&\|u(t)\|_{L^2}+\|\int_0^{x_0}p(x)q(y)u(y,t)\mathrm{d}y\|_{L^2}+\\&\|\int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y\|_{L^2}+\|\psi X(t)\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{40}$$

由Hölder不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\|\int_0^{x_0}p(x)q(y)u(y,t)\mathrm{d}y\|_{L^2}^2=\\&\int_0^1(\int_0^{x_0}p(x)q(y)u(y,t)\mathrm{d}y)^2\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^1(\int_0^{x_0}\big(p(x)q(y)\big)^2\mathrm{d}y\int_0^{x_0}u(y,t)^2\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^1\int_0^1\big(p(x)q(y)\big)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\cdot\int_0^1(\int_0^1 u(y,t)^2\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=\\&\xi_1^2\|u(t)\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{41}$$

其中$\xi_1=(\int_0^1\int_0^1\big(p(x)q(y)\big)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$. 同理, 有

$$\|\int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y\|_{L^2}^2\leqslant\xi_2^2\|u(t)\|_{L^2}^2, \tag{42}$$

其中$\xi_2=(\int_0^1\int_0^1 k(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$.

再由Schwartz不等式, 有

$$\begin{aligned}&\|\psi X(t)\|_{L^2}^2=\int_0^1\|\psi(x)X(t)\|^2\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^1\|\psi(x)\|^2\|X(t)\|^2\mathrm{d}x=\\&\int_0^1\|\psi(x)\|^2\mathrm{d}x\|X(t)\|^2=\\&\|\psi\|_{L^2}^2\|X(t)\|^2.\end{aligned} \tag{43}$$

因此, 由式(41)–(43), 可得

$$\begin{aligned}&\|w(t)\|_{L^2}\leqslant\\&(1+\xi_1+\xi_2)\|u(t)\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}\|X(t)\|.\end{aligned} \tag{44}$$

类似地, 由逆变换(31), 可得

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|_{L^2}\leqslant\\&(1+\eta_1+\eta_2)\|w(t)\|_{L^2}+\|\phi\|_{L^2}\|X(t)\|,\end{aligned} \tag{45}$$

其中,

$$\eta_1=(\int_0^1\int_0^1\big(m(x)n(y)\big)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta_2=(\int_0^1\int_0^1 l(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}.$$

由式(39)(45), 有

$$\begin{aligned}&\|X(t)\|^2+\|u(t)\|_{L^2}^2\leqslant\\&\|X(t)\|^2+\big((1+\eta_1+\eta_2)\|w(t)\|_{L^2}+\\&\|\phi\|_{L^2}\|X(t)\|\big)^2\leqslant\\&(1+2\|\phi\|_{L^2}^2)\|X(t)\|^2+2(1+\eta_1+\eta_2)^2\|w(t)\|_{L^2}^2\leqslant\\&\frac{1+2\|\phi\|_{L^2}^2}{\lambda_{\min}(P)}X(t)^{\mathrm{T}}PX(t)+\\&\frac{4(1+\eta_1+\eta_2)^2}{a}\frac{a}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2\leqslant\\&\delta(X(t)^{\mathrm{T}}PX(t)+\frac{a}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2)=\\&\delta V(t)\leqslant\delta V(0)\mathrm{e}^{-\rho t},\end{aligned} \tag{46}$$

其中

$$\delta = \max\{\frac{1+2\|\phi\|_{L^2}^2}{\lambda_{\min}(P)}, \frac{4(1+\eta_1+\eta_2)^2}{a}\}.$$

最后, 由式(44), 可得

$$\|w(0)\|_{L^2} \leqslant (1+\xi_1+\xi_2)\|u(0)\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2}\|X(0)\|.$$

从而, 有

$$\begin{aligned}&V(0) = X(0)^{\mathrm{T}}PX(0) + \frac{a}{2}\|w(0)\|_{L^2}^2 \leqslant\\&\lambda_{\max}(P)\|X(0)\|^2 +\\&\frac{a}{2}\big((1+\xi_1+\xi_2)\|u(0)\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}\|X(0)\|\big)^2 \leqslant\\&(\lambda_{\max}(P)+a\|\psi\|_{L^2}^2)\|X(0)\|^2 +\\&a(1+\xi_1+\xi_2)^2\|u(0)\|_{L^2}^2 \leqslant\\&\tau(\|X(0)\|^2+\|u(0)\|_{L^2}^2),\end{aligned} \tag{47}$$

其中

$$\tau = \max\{\lambda_{\max}(P)+a\|\psi\|_{L^2}^2, a(1+\xi_1+\xi_2)^2\}.$$

因此, 令$\sigma = \delta\tau$, 由式(46)–(47), 可得

$$\|X(t)\|^2 + \|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \sigma(\|X(0)\|^2 + \|u(0)\|_{L^2}^2)\mathrm{e}^{-\rho t},$$

即闭环系统(1)是指数稳定的.

5 结论(Conclusion)

本文研究了一类PDE-ODE级联系统的控制问题, 考虑的是两类方程在内部点级联的情况, 文中运用边界控制的backstepping方法设计出反馈控制器. 在设计过程中, 改进了backstepping方法中的常见变换, 且运用一系列复杂的数学技巧计算出控制器中的未知核函数, 设计出反馈控制器的具体形式, 其次, 找到改进变换的逆变换, 最后, 证明了闭环系统的稳定性, 即验证了反馈控制器的有效性.

参考文献(References):

[1] 李晓光, 刘金琨. 面向偏微分方程的连续反演控制算法综述 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(7): 825 – 832.
(LI Xiaoguang, LIU Jinkun. Continuum backstepping control algorithms in partial differential equation orientation: a review [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(7): 825 – 832.)

[2] BOSKOVIC D M, KRSTIC M. Backstepping control of chemical tubular reactors [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2002, 26(7): 1077 – 1085.

[3] BOSKOVIC D M, KRSTIC M. Stabilization of a solid propellant rocket instability by state feedback [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(5): 484 – 495.

[4] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs* [M]. Philadelphia, American: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[5] KRSTIC M. Compensating actuator and sensor dynamics governed by diffusion PDEs [J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(5): 372 – 377.

[6] LIU W J. Boundary feedback stabilization of an unstable heat equation [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2003, 42(3): 1033 – 1043.

[7] 杜燕, 许跟起. 具有边界控制的线性Timoshenko型系统的指数稳定性 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(1): 33 – 39.
(DU Yan, XU Genqi. Exponential stability of a system of linear Timoshenkotype with boundary controls [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(1): 33 – 39.)

[8] 邬依林, 刘屿, 吴忻生. 基于时变内流的柔性立管自适应边界控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(5): 618 – 624.
(WU Yilin, LIU Yu, WU Xinsheng. Adaptive boundary control of aflexible rise rcoupled with time-varying internal fluid [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(5): 618 – 624.)

[9] KRSTIC M. Compensating a string PDE in the actuation or in sensing path of an unstable ODE [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1362 – 1368.

[10] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. Backstepping boundary control for first order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(9): 750 – 758.

[11] SUSTO G A, KRSTIC M. Control of PDE-ODE cascades with Neumann interconnections [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2010, 347(1): 284 – 314.

[12] TANG S X, XIE C K. State and output feedback boundary control for a coupled PDE-ODE system [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(8): 540 – 545.

[13] TANG S X, XIE C K. Stabilization for a coupled PDE-ODE control system [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, 348(8): 2142 – 2155.

[14] GUO C L, XIE C K, ZHOU Z C. Stabilization of a spatially noncausal reaction-diffusion equation by boundary control [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* , 2014, 24(1): 1 – 17.

[15] ZHOU Z C, GUO C L. Stabilization of linear heat equation with a heat source at intermediate point by boundary control [J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 448 – 456.

[16] KRSTIC M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems* [M]. Berlin, German: Birkhauser Boston, 2009.

作者简介:

郭春丽 (1987–), 女, 助教, 主要研究方向为分布式参数系统控制, E-mail: gcl_1_2@163.com;

周中成 (1978–), 男, 副教授, 主要研究方向为分布式参数系统控制, E-mail: zhouzc@amss.ac.cn.