

# 含非严格重复扰动的抗扰迭代学习控制

吕庆, 方勇纯<sup>†</sup>, 任逍

(南开大学 机器人与信息自动化研究所; 天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300071)

**摘要:** 针对一类含不确定参数及未知扰动的高阶非线性系统, 采用类Lyapunov方法, 结合部分限幅学习律和滑模控制的优点, 提出一种新的滑模鲁棒迭代学习控制算法. 根据系统中不确定量的特性, 将系统中的不确定性划分为两类: 仅沿时间轴变化的不确定性和仅沿迭代轴变化的不确定性. 前者采用迭代辨识方法处理, 后者采用迭代滑模技术解决. 在整个作业区间上, 随着迭代次数的增加, 控制算法确保系统的跟踪误差收敛到一个界内, 控制器信号无抖颤, 且闭环系统中其余变量一致有界. 当系统扰动仅沿时间轴变化时, 系统跟踪误差及其各阶导数沿迭代轴渐近收敛到0, 实现系统各个状态的精确跟踪. 相比利用连续函数近似法的传统滑模控制, 该算法对未知扰动具有更好的鲁棒性. 理论证明和仿真结果都说明了该算法的有效性.

**关键词:** 迭代学习控制; 滑模控制; 参数辨识; 收敛性; 鲁棒性; 抗扰性

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Anti-disturbance iterative learning control for nonlinear systems with time-iteration-varying disturbances

LÜ Qing, FANG Yong-chun<sup>†</sup>, REN Xiao

(Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics; Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300071, China)

**Abstract:** For a class of higher-order nonlinear systems with parametric uncertainties and unknown disturbances, we propose a novel sliding-mode robust iterative learning control algorithm base on the Lyapunov-like method, which successfully combines the advantages of partially-saturated learning mechanism and sliding mode technique. Uncertainties within the system are classified into two categories, the only time-varying uncertainty and the only iteration-varying uncertainty. The former is treated by using the iterative identification technique, while the latter is dealt with by employing an iterative sliding mode law. In the entire time interval, it is guaranteed that, along the iteration axis, the designed chattering-free controller ensures that the tracking error converges to a given bound, while all the remaining signals are bounded. In addition, tracking errors and their derivatives converge asymptotically to zero along the iterative axis in the case of only time-dependent perturbation, which implies accurate tracking for the system states. Compared with the saturation-approximation-based conventional sliding-mode mechanism, the proposed novel control technique presents better robustness against unknown disturbances. Theoretical analysis and simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** iterative learning control; sliding mode control; parameter identification; convergence; robustness; anti-disturbance

### 1 引言(Introduction)

对于有限时间区间上重复运行的控制系统来说, 利用迭代学习控制手段可以实现系统输出精确跟踪期望输出<sup>[1]</sup>. 从众多已有的研究成果不难看出, 大多数迭代学习控制律利用系统跟踪误差<sup>[2-5]</sup>或其微分<sup>[1, 6-8]</sup>, 参数估计律<sup>[9-11]</sup>, 沿时间轴和迭代轴两个方向不断修正自身, 实现系统跟踪误差为0, 达到精确跟踪的效果.

迭代学习控制的鲁棒性是评价迭代学习控制器设计的一项重要指标. 学习控制的鲁棒性最早是由 Arimoto于1986年提出, 此后许多学者对其进行了深入地讨论. 文献[12]指出: 迭代学习控制的鲁棒性问题是当系统存在初态偏差、状态干扰和测量噪声时, 系统的收敛性和稳定性问题. 起初, 设计鲁棒迭代学习控制器常常采用 $H_\infty$ 控制技术. 文献[13]指出设计迭代学习控制器的问题可以归结为设计 $H_\infty$ 最优控制

器问题. 这种方法允许设计者通过引入权重函数对学习性能和鲁棒性能进行折中. 文献[14]针对含不确定性的多输入多输出系统提出一种基于反馈的迭代学习控制, 通过线性分式变换, 把含不确定性被控对象分解为已知部分和不确定部分. 所提出的收敛条件等价于反馈控制系统鲁棒性条件. 文献[15]针对控制输入和系统输出含有迭代域未知扰动情况, 提出基于 $H_\infty$ 技术的高阶迭代学习控制器. 然而, 基于 $H_\infty$ 方法提出的迭代学习控制算法具有因果性, 而性能更好的迭代学习控制器应具有非因果性<sup>[16-17]</sup>. 基于此, Wang 在文献[18]、Chien 在文献[19]、Bu 等人在文献[20]中针对离散系统都引入了误差的非因果项针对状态干扰或测量噪声进行了鲁棒控制器设计.

对于连续系统而言, 滑模控制中设计的滑模面可以看做离散系统中引入的非因果项. 滑模控制策略属于变结构控制方法, 出现于20世纪50年代, 经历了60年的发展, 已经形成了一个相对独立的研究分支. 滑模控制的优点在于: 控制器输出在动态过程中根据系统当前的状态(如偏差及其各阶导数等)有目的的不断变化, 迫使系统按照预定“滑动模态”的状态轨迹运动. 由于滑动模态可以进行设计且与对象参数及扰动无关, 这就使得变结构控制具有快速响应, 对参数变化及扰动不灵敏的特征<sup>[21]</sup>. 从理论上而言, 滑模控制通过不断切换控制方向来实现误差的收敛, 即使存在模型的误差情况下, 滑模控制仍然能够实现系统的完美控制, 但这是以控制器的跳变作为代价的<sup>[22]</sup>. 实际系统中, 一旦控制输入信号抖动, 执行器将无法正常工作, 甚至损坏执行器件<sup>[23]</sup>. 文献[24-28]利用高阶滑模控制技术消除了控制器输出不连续、抖动现象. 相比于利用连续函数近似法<sup>[29-30]</sup>解决滑模控制的抖动问题, 高阶滑模控制技术更显优势. 然而, 遗憾的是, 大多数研究成果对于未知扰动的处理仅是笼统地假设一个界<sup>[23-28]</sup>, 没有针对扰动的内部结构进行合理假设.

事实上, 历次 $[0, T]$ 内扰动, 可以看做是仅随时间变化的扰动与随迭代次数、时间均变化扰动的叠加. 对于仅随时间变化的扰动, 可用迭代辨识的方法获得对应的控制信号, 实现抗扰. 而对于随迭代次数、时间均变化的扰动, 可采用滑模控制技术进行抗扰, 并获得相应的控制量.

基于上述内容, 本文将迭代学习控制与滑模控制相结合, 在克服滑模控制器抖动问题基础上, 设计对未知扰动更具鲁棒性的控制器. 通过构造类Lyapunov函数, 证明了该控制器可确保闭环系统中各个变量一致有界. 当系统仅含沿时间轴变化的扰动时, 借助相关引理, 可以证明本文提出的滑模鲁棒迭代学习控制器保证系统跟踪误差及其各阶导数渐近收敛到0.

本文其他部分组织如下: 第2节介绍了本文考虑的

单输入单输出高阶非线性系统. 为便于控制器设计和分析, 第2节给出相关的合理假设以及证明稳定性、收敛性用到的引理. 第3节针对第2节提出的非线性系统设计了滑模鲁棒迭代学习控制器. 第4节进行了系统稳定性与收敛性分析. 第5节给出了仿真结果. 第6节是对本文设计思想的总结.

## 2 问题的提出与准备(Problem formulation)

考虑如下—类单输入单输出高阶非线性系统(1), 并假设其在 $t \in [0, T]$ 上重复运行:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k}, \\ \dot{x}_{2,k} = x_{3,k}, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1,k} = x_{n,k}, \\ \dot{x}_{n,k} = \boldsymbol{\theta}^T(t)\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_k, t) + b(\mathbf{x}_k, t)u_k(t) + w_k(t), \\ y_k(t) = x_{1,k}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $k = 1, 2, \dots$  表示迭代次数;  $\mathbf{x}_k = (x_{1,k}(t), x_{2,k}(t), \dots, x_{n,k}(t))^T \in \mathbb{R}^n$  表示可量测的系统状态;  $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  表示未知时变向量函数, 且各分量有界;  $b(\mathbf{x}_k, t) \in \mathbb{R}$  表示被控系统的控制方向, 是已知的非零函数;  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_k(t), t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  为结构已知的向量函数; 且当 $\mathbf{x}_k(t)$ 有界时,  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_k(t), t)$ 有界;  $w_k(t) \in \mathbb{R}$  表示不确定干扰;  $u_k(t) \in \mathbb{R}$  表示控制输入;  $y_k(t) \in \mathbb{R}$  表示系统的输出.

为叙述方便, 首先做如下定义:

定义系统的跟踪误差:

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t) = y_d(t) - x_{1,k}(t). \quad (2)$$

定义滑模面:

$$\sigma_k(t) = c_1 e_k(t) + c_2 \dot{e}_k(t) + \dots + c_n e_k^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e_k^{(i-1)}(t), \quad (3)$$

其中 $c_i (i = 1, \dots, n)$ 是Hurwitz多项式系数.  $c_n = 1$ 对上式两端求得

$$\dot{\sigma}_k(t) = c_1 \dot{e}_k(t) + c_2 \ddot{e}_k(t) + \dots + c_n e_k^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e_k^{(i)}(t). \quad (4)$$

进一步处理, 得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_k(t) = & c_1(\dot{y}_d - \dot{y}_k) + c_2(\ddot{y}_d - \ddot{y}_k) + \dots + \\ & c_{n-1}(y_d^{(n-1)} - y_k^{(n-1)}) + (y_d^{(n)} - y_k^{(n)}) = \\ & c_1(\dot{y}_d - \dot{x}_{2,k}) + c_2(\ddot{y}_d - \ddot{x}_{3,k}) + \dots + \\ & c_{n-1}(y_d^{(n-1)} - x_{n,k}) + \\ & (y_d^{(n)} - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_k, t) - b(\mathbf{x}_k, t)u_k - w_k(t)) = \\ & \sum_{i=1}^n c_i y_d^{(i)} - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1,k} - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_k, t) - \end{aligned}$$

$$b(\mathbf{x}_k, t)u_k - w_k(t). \quad (5)$$

定义符号函数

$$\text{sgn}(\sigma_k(t)) = \begin{cases} -1, & \sigma_k(t) < 0, \\ +1, & \sigma_k(t) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

定义饱和向量函数:

$$\text{sat}_{\bar{\psi}_i}(\psi_i(t)) = \begin{cases} \psi_i(t), & |\psi_i(t)| \leq \bar{\psi}_i, \\ \bar{\psi}_i \text{sgn}(\psi_i(t)), & |\psi_i(t)| > \bar{\psi}_i, \end{cases} \quad (7)$$

这里:  $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_r(t))^T$ ,  $r \geq 1$ ,  $\bar{\psi}_i$  表示第  $i$  个饱和函数的界, 且  $\bar{\psi}_i > 0$ .

为便于控制器设计, 这里给出本文用到的3条假设:

**假设1** 期望输出轨迹  $y_d(t)$  及其各阶导数  $\dot{y}_d(t)$ ,  $\ddot{y}_d(t), \dots, y_d^{(n)}(t)$  均存在.

**假设2** 未知扰动  $w_k(t)$  满足下式:

$$w_k(t) = d(t) + D_k(t),$$

其中:  $|d(t)| \leq b_d$ ,  $|D_k(t)| \leq b_D$ . 未知的  $d(t)$  仅沿时间轴变化, 与迭代次数无关; 而未知的  $D_k(t)$  与迭代次数和时间均有关. 这里,  $b_d, b_D$  均表示未知的正常数.

**注1** 假设2的意义在于充分考虑了目前已有的抗扰技术成果. 在迭代过程中, 无论不确定性组成部分偏向  $d(t)$ , 还是偏向  $D_k(t)$ , 都可获得良好的抗扰效果.

**注2**  $w_k(t)$  可以视为状态扰动、控制信号扰动、测量噪声等的综合. 具体而言,  $w_k(t) \triangleq b(\mathbf{x}_k, t)\varpi_k(t)$ , 且  $\varpi_k(t)$  与  $w_k(t)$  性质类似.

**假设3** 初始条件满足

$$e_k(0) = \dot{e}_k(0) = \ddot{e}_k(0) = \dots = e_k^{(n)}(0) = 0,$$

即:  $\sigma_k(0) = 0$ ,  $\dot{\sigma}_k(0) = 0$ .

为便于控制器性能分析与证明, 下面给出本文用到的定义和引理.

**定义**<sup>[31]</sup> 设函数序列  $\{\sigma_k(t)\}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , 当  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , 且  $|t_1 - t_2| < \delta$  时, 若  $|\sigma_k(t_1) - \sigma_k(t_2)| < \varepsilon$  恒成立, 则称函数列  $\{\sigma_k(t)\}$  在  $t \in [0, T]$  上等度连续.

**注3**<sup>[31]</sup> 等度连续是对一致连续性的一种刻划, 满足一致连续就满足了等度连续.

**引理1**<sup>[32]</sup>

$$\begin{aligned} & (\psi - \text{sat}_{\bar{\psi}}(\hat{\psi}_k))^T (\psi - \text{sat}_{\bar{\psi}}(\hat{\psi}_k)) \leq \\ & (\psi - \hat{\psi}_k)^T (\psi - \hat{\psi}_k), \end{aligned}$$

这里  $\hat{\psi}_k = \hat{\psi}_k(t)$  表示对  $\psi = \psi(t)$  第  $k$  次估计.

**引理2**<sup>[22]</sup>  $e_k(t), \dot{e}_k(t), \dots, e_k^{(n-1)}(t)$  均有界的一个充分条件是式(3)中  $\sigma_k(t)$  有界.

**引理3**<sup>[31]</sup>  $\sigma_k(t)$  在  $[0, T]$  上等度连续的一个充分条件是  $\dot{\sigma}_k(t)$  在  $[0, T]$  上一致有界.

**引理4**<sup>[31]</sup> 若  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma_k^2(\tau) d\tau = 0$ , 且  $\sigma_k(t)$  在区间  $[0, T]$  上等度连续, 则  $\sigma_k(t)$  逐点收敛至零.

**引理5**<sup>[31]</sup> 设  $\sigma_k(t)$  在区间  $[0, T]$  上逐点收敛于零, 则  $\sigma_k(t)$  在区间  $[0, T]$  上等度连续的充要条件是  $\sigma_k(t)$  在区间  $[0, T]$  上一致收敛于零.

**引理6**<sup>[22]</sup>  $e_k(t), \dot{e}_k(t), \dots, e_k^{(n-1)}(t)$  收敛的一个充分条件是式(3)中  $\sigma_k(t)$  收敛.

### 3 迭代学习控制器设计(Iterative learning controller design)

针对式(1)描述的高阶非线性系统, 设计滑模鲁棒迭代学习控制器. 设计目标为: 在有状态扰动和控制输入扰动的情况下, 随着迭代次数的增加, 控制算法均可确保系统的跟踪误差收敛到一个界内, 控制信号无抖颤, 闭环系统其余变量一致有界. 考虑到迭代学习控制器设计方案中经常使用的Lyapunov函数形式, 结合本文的控制目标, 控制器设计如下:

$$\begin{aligned} u_k(t) = & b^{-1}(\mathbf{x}_k, t) \left[ \sum_{i=1}^n c_i y_d^{(i)} - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1,k} - \right. \\ & \hat{\theta}_k^T(t) \xi(\mathbf{x}_k, t) - \nu_k(t) + \alpha \sigma_k(t) - \\ & \left. \hat{d}_k(t) + \lambda |\sigma_k(t)|^{\frac{2}{3}} \text{sgn}(\sigma_k(t)) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k(t) = & \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(t)) - q \xi(\mathbf{x}_k, t) (\gamma \sigma_k(t) + \\ & \beta_2 |\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t))), \end{aligned} \quad (9)$$

$\bar{\theta}$  表示估计  $\theta(t)$  的限幅值.

$$\dot{\nu}_k(t) = -\beta_2 |\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t)) - \beta_1 \sigma_k(t), \quad (10)$$

且有

$$\begin{aligned} v_k(0) &= 0, \\ \hat{d}_k(t) &= \text{sat}_{\bar{d}}(\hat{d}_{k-1}(t)) - p (\beta_2 |\sigma_k(t)|^{m-1} \times \\ & \text{sgn}(\sigma_k(t)) + \gamma \sigma_k(t)), \end{aligned} \quad (11)$$

$\bar{d}$  是估计  $d(t)$  的限幅值.

这里  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, p, q > 0$ ,  $m > 1$ .

由附录中的证明可知,  $|\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t))$  是关于时间  $t$  的连续函数. 因此, 本文设计的迭代学习控制器(8)–(11)是连续的, 不会出现抖颤现象.

为叙述方便, 引入如下记号:

$$\tilde{\theta}_k(t) = \theta(t) - \hat{\theta}_k(t), \quad (12)$$

$$\tilde{d}_k(t) = d(t) - \hat{d}_k(t). \quad (13)$$

将式(8)代入式(5), 得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_k(t) = & -\tilde{\theta}_k^T(t) \xi(\mathbf{x}_k, t) + \nu_k(t) - \alpha \sigma_k(t) - \\ & \tilde{d}_k(t) - D_k(t) - \lambda |\sigma_k(t)|^{\frac{2}{3}} \text{sgn}(\sigma_k(t)). \end{aligned} \quad (14)$$

### 4 稳定性和收敛性分析(Analysis of stability and convergence)

系统(1)的收敛性和稳定性结果总结如下:

**定理** 在假设1-3及控制律(8)-(11)的作用下, 因此  
单输入单输出高阶非线性系统(1)具有下述性质:

1) 闭环系统中所有变量在 $[0, T]$ 内一致有界, 系统控制器输出无抖颤. 系统沿迭代轴全局渐近稳定.

2) 当 $D_k(t) \equiv 0$ 时, 随着迭代次数增加, 系统跟踪误差及其各阶导数沿迭代轴一致收敛到0.

**证** 构造Lyapunov函数

$$V_k(t) = V_k^{(1)}(t) + V_k^{(2)}(t) + V_k^{(3)}(t) + V_k^{(4)}(t) + V_k^{(5)}(t), \quad (15)$$

其中:

$$V_k^{(1)}(t) = \frac{\gamma}{2}\sigma_k^2(t), \quad (16)$$

$$V_k^{(2)}(t) = \frac{1}{2q} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T(\tau) \tilde{\theta}_k(\tau) d\tau, \quad (17)$$

$$V_k^{(3)}(t) = \frac{1}{2}\nu_k^2(t), \quad (18)$$

$$V_k^{(4)}(t) = \eta |\sigma_k(t)|^m, \quad (19)$$

$$V_k^{(5)}(t) = \frac{1}{2p} \int_0^t \tilde{d}_k^2(\tau) d\tau, \quad (20)$$

这里:  $\eta > 0, m > 1$ .

为便于叙述, 下面分5步证明定理成立.

**第1步**

$$V_k^{(1)}(t) - V_{k-1}^{(1)}(t) = \frac{\gamma}{2}\sigma_k^2(t) - \frac{\gamma}{2}\sigma_{k-1}^2(t) = \gamma \int_0^t \sigma_k(\tau) \dot{\sigma}_k(\tau) d\tau + \frac{\gamma}{2}\sigma_k^2(0) - \frac{\gamma}{2}\sigma_{k-1}^2(t). \quad (21)$$

将式(14)代入上式, 结合假设3, 得

$$V_k^{(1)}(t) - V_{k-1}^{(1)}(t) = -\gamma \int_0^t \sigma_k(\tau) \tilde{\theta}_k^T(\tau) \xi(\mathbf{x}_k, \tau) d\tau - \frac{\gamma}{2}\sigma_{k-1}^2(t) + \gamma \int_0^t \sigma_k(\tau) \nu_k(\tau) d\tau - \alpha \gamma \int_0^t \sigma_k^2(\tau) d\tau + \gamma \int_0^t \sigma_k(\tau) \hat{d}_k(\tau) d\tau - \gamma \int_0^t \sigma_k(\tau) d(\tau) d\tau - \gamma \int_0^t \sigma_k(\tau) D_k(\tau) d\tau - \lambda \gamma \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{\frac{5}{3}} d\tau. \quad (22)$$

**第2步** 根据引理1, 可知

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}_k^T(t) \tilde{\theta}_k(t) - \tilde{\theta}_{k-1}^T(t) \tilde{\theta}_{k-1}(t) \leq \\ & \tilde{\theta}_k^T(t) \tilde{\theta}_k(t) - (\theta(t) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(t)))^T \cdot \\ & (\theta(t) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(t))) = \\ & -(\hat{\theta}_k(t) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(t)) + 2\tilde{\theta}_k(t))^T \cdot \\ & (\hat{\theta}_k(t) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(t))) = \\ & -(\hat{\theta}_k(t) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(t)))^T \cdot \\ & (\hat{\theta}_k(t) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(t))) - \\ & 2\tilde{\theta}_k^T(t) (\hat{\theta}_k(t) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(t))), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & V_k^{(2)}(t) - V_{k-1}^{(2)}(t) \leq \\ & -\frac{1}{2q} \int_0^t (\hat{\theta}_k(\tau) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(\tau)))^T \cdot \\ & (\hat{\theta}_k(\tau) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(\tau))) d\tau - \\ & \frac{1}{q} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T(\tau) (\hat{\theta}_k(\tau) - \text{sat}_{\tilde{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(\tau))) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

**第3步**

$$V_k^{(3)}(t) - V_{k-1}^{(3)}(t) = \frac{1}{2}\nu_k^2(t) - \frac{1}{2}\nu_{k-1}^2(t) = \int_0^t \nu_k(\tau) \dot{\nu}_k(\tau) d\tau + \frac{1}{2}\nu_k^2(0) - \frac{1}{2}\nu_{k-1}^2(t). \quad (25)$$

将式(10)代入上式, 得

$$\begin{aligned} & V_k^{(3)}(t) - V_{k-1}^{(3)}(t) = \\ & -\beta_1 \int_0^t \nu_k(\tau) \sigma_k(\tau) d\tau - \frac{1}{2}\nu_{k-1}^2(t) - \\ & \beta_2 \int_0^t \nu_k(\tau) |\sigma_k(\tau)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

**第4步**

$$V_k^{(4)}(t) - V_{k-1}^{(4)}(t) = \eta |\sigma_k(t)|^m - \eta |\sigma_{k-1}(t)|^m, \quad (27)$$

因为

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} |\sigma_k(t)|^m = m |\sigma_k(t)|^{m-1} \dot{\sigma}_k(t) \text{sgn}(\sigma_k(t)), \quad (28) \\ & V_k^{(4)}(t) - V_{k-1}^{(4)}(t) = \\ & m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} \dot{\sigma}_k(\tau) \text{sgn}(\sigma_k(\tau)) d\tau + \\ & \eta |\sigma_k(0)|^m - \eta |\sigma_{k-1}(t)|^m. \end{aligned} \quad (29)$$

将式(14)代入上式, 结合假设3得

$$\begin{aligned} & V_k^{(4)}(t) - V_{k-1}^{(4)}(t) = \\ & -m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} \tilde{\theta}_k^T(\tau) \xi(\mathbf{x}_k, \tau) \times \\ & \text{sgn}(\sigma_k(\tau)) d\tau + \\ & m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} \nu_k(\tau) \text{sgn}(\sigma_k(\tau)) d\tau - \\ & \alpha m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^m d\tau + \\ & m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} \hat{d}_k(\tau) \text{sgn}(\sigma_k(\tau)) d\tau - \\ & m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} d(\tau) \text{sgn}(\sigma_k(\tau)) d\tau - \\ & m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} D_k(\tau) \text{sgn}(\sigma_k(\tau)) d\tau - \\ & \lambda m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-\frac{1}{3}} d\tau - \eta |\sigma_{k-1}(t)|^m. \end{aligned} \quad (30)$$

**第5步** 根据引理1, 可得

$$\begin{aligned} & \tilde{d}_k^2(t) - \tilde{d}_{k-1}^2(t) \leq \\ & \tilde{d}_k^2(t) - (d(t) - \text{sat}_{\tilde{d}}(\hat{d}_{k-1}(t)))^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(\hat{d}_k(t) - \text{sat}_{\bar{d}}(\hat{d}_{k-1}(t)) + 2\tilde{d}_k(t)) \cdot \\
 & (\hat{d}_k(t) - \text{sat}_{\bar{d}}(\hat{d}_{k-1}(t))) = \\
 & -(\hat{d}_k(t) - \text{sat}_{\bar{d}}(\hat{d}_{k-1}(t)))^2 - \\
 & 2\tilde{d}_k(t)(\hat{d}_k(t) - \text{sat}_{\bar{d}}(\hat{d}_{k-1}(t))), \tag{31}
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 & V_k^{(5)}(t) - V_{k-1}^{(5)}(t) \leq \\
 & -\frac{1}{2p} \int_0^t (\hat{d}_k(\tau) - \text{sat}_{\bar{d}}(\hat{d}_{k-1}(\tau)))^2 d\tau - \\
 & \frac{1}{p} \int_0^t \tilde{d}_k(\tau)(\hat{d}_k(\tau) - \text{sat}_{\bar{d}}(\hat{d}_{k-1}(\tau)))d\tau. \tag{32}
 \end{aligned}$$

由式(22)(24)(26)(30)(32), 并做进一步放大, 得

$$\begin{aligned}
 & V_k(t) - V_{k-1}(t) \leq \\
 & -\alpha\gamma \int_0^t \sigma_k^2(\tau)d\tau - \gamma \int_0^t \sigma_k(\tau)\tilde{\theta}_k^T(\tau)\xi(\mathbf{x}_k, \tau)d\tau + \\
 & \gamma \int_0^t \sigma_k(\tau)\nu_k(\tau)d\tau - \gamma \int_0^t \tilde{d}_k(\tau)\sigma_k(\tau)d\tau - \\
 & \frac{1}{q} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T(\tau)(\hat{\theta}_k(\tau) - \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}(\tau)))d\tau - \\
 & \beta_1 \int_0^t \nu_k(\tau)\sigma_k(\tau)d\tau - \\
 & \beta_2 \int_0^t \nu_k(\tau)|\sigma_k(\tau)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(\tau))d\tau - \\
 & m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} \tilde{\theta}_k^T(\tau)\xi(\mathbf{x}_k, \tau)\text{sgn}(\sigma_k(\tau))d\tau + \\
 & m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} \nu_k(\tau)\text{sgn}(\sigma_k(\tau))d\tau - \\
 & m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1} \tilde{d}_k(\tau)\text{sgn}(\sigma_k(\tau))d\tau - \\
 & \frac{1}{p} \int_0^t \tilde{d}_k(\tau)(\hat{d}_k(\tau) - \text{sat}_{\bar{d}}(\hat{d}_{k-1}(\tau)))d\tau + \\
 & \gamma b_D \int_0^t |\sigma_k(\tau)|d\tau + m\eta b_D \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-1}d\tau - \\
 & \lambda\gamma \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{\frac{5}{3}}d\tau - \lambda m\eta \int_0^t |\sigma_k(\tau)|^{m-\frac{1}{3}}d\tau. \tag{33}
 \end{aligned}$$

将参数学习律(9)和未知扰动学习律(11)代入上式, 且取 $\gamma = \beta_1$ ,  $\beta_2 = m\eta$ . 当 $|\sigma_k(t)|^{\frac{2}{3}} \geq \frac{b_D}{\lambda}$ 时, 得

$$V_k(t) - V_{k-1}(t) \leq -\alpha\beta_1 \int_0^t \sigma_k^2(\tau)d\tau, \tag{34}$$

即

$$V_k(t) \leq V_{k-1}(t), |\sigma_k(t)|^{\frac{2}{3}} \geq \frac{b_D}{\lambda}, \tag{35}$$

可见

$$|\sigma_k(t)| < \left(\frac{b_D}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{36}$$

由于 $V_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上连续, 结合上式, 可知 $V_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界. 故 $\sigma_k(t), \nu_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界. 根据式(10)可知,  $\dot{\nu}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 一致有界. 根据引理2, 系统跟踪误差 $e_k(t)$ 及各阶导数 $\dot{e}_k(t), \ddot{e}_k(t), \dots, e_k^{(n-1)}(t)$ 在 $[0, T]$ 上均一致有界. 结合假设1, 可推知系统各个状态 $x_{1,k}(t), x_{2,k}(t), \dots, x_{n,k}(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上均一致有界. 这样, 参数学习律(9)和扰动学习

律(11)的限幅作用确保 $\hat{\theta}_k(t), \hat{d}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界. 从式(8)可知, 控制器 $u_k(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上也一致有界的. 根据式(14),  $\dot{\sigma}_k(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上一致有界. 性质1证毕.

值得指出的是, 当 $D_k(t) \equiv 0$ 时, 仍然采用控制器式(8)-(11), 此时, 式(33)不再含有带 $b_D$ 的两项. 对于 $\forall \sigma_k(t) \in \mathbb{R}$ , 式(34)依然成立. 考虑整个工作时间 $[0, T]$ 内, 在式(34)中, 令 $t = T$ , 得

$$V_k(T) - V_{k-1}(T) \leq -\alpha\beta_1 \int_0^T \sigma_k^2(\tau)d\tau. \tag{37}$$

进一步处理, 得

$$\int_0^T \sigma_k^2(\tau)d\tau \leq -\frac{1}{\alpha\beta_1}(V_k(T) - V_{k-1}(T)). \tag{38}$$

因为 $V_k(T) \geq 0$ , 且 $V_k(T)$ 沿迭代轴单调递减且有下界, 所以 $V_k(T)$ 逐点收敛. 因此, 当 $D_k(t) \equiv 0$ 时,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma_k^2(\tau)d\tau = 0. \tag{39}$$

由引理3及 $\dot{\sigma}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界, 可知 $\sigma_k(t)$ 等度连续. 依据引理4及式(39)可知, 随着迭代次数的增加,  $\sigma_k(t)$ 在工作区间 $[0, T]$ 沿迭代轴逐点收敛于零. 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k(t) = 0, t \in [0, T]. \tag{40}$$

根据引理5,  $\sigma_k(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上沿迭代轴一致收敛于0. 根据引理6,  $e_k(t)$ 及其各阶导数沿迭代轴一致收敛为零. 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k^{(i)}(t) = 0, t \in [0, T], \tag{41}$$

其中 $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , 表示导数的阶数.

证毕.

更一般的情况,  $d(t)$ 与 $D_k(t)$ 是同时存在的. 从抗扰效果分析来看, 不同性质的扰动采用更有针对性的抗扰方法, 比单纯采用一种笼统的抗扰方法效果更佳.

### 5 仿真算例(Numerical simulation)

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k}, \\ \dot{x}_{2,k} = \theta^T(t)\xi(\mathbf{x}_k, t) + b(\mathbf{x}_k, t)u(t) + w_k(t), \end{cases} \tag{42}$$

其中:

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} 3te^{-t} \\ \sin t \cos^2(2t) \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$\xi(\mathbf{x}_k, t) = \begin{pmatrix} \sin(x_{1,k}(t)) \\ \cos(x_{2,k}(t)) \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$b(\mathbf{x}_k, t) = 5 \sin(2x_1(t)) \cos(x_2(t)) + 6, \tag{45}$$

$$d(t) = 20 \sin t \cos(6t), \tag{46}$$

$$D_k(t) = 2 \sin(kt + \frac{\pi}{3}) \cos(2t + \frac{k\pi}{7}). \tag{47}$$

期望轨迹定义为

$$y_d(t) = \sin^2(4t) + 0.1(t + 2). \tag{48}$$

则期望轨迹的导数为

$$\dot{y}_d(t) = 8 \sin(4t) \cos(4t) + 0.1. \quad (49)$$

定义历次迭代系统跟踪误差的最大值:

$$e_{k,\text{sup}} = \sup_{t \in [0, T]} |y_d(t) - y_k(t)| = \sup_{t \in [0, T]} |y_d(t) - x_{1,k}(t)|. \quad (50)$$

定义历次迭代系统跟踪误差导数的最大值:

$$\dot{e}_{k,\text{sup}} = \sup_{t \in [0, T]} |\dot{y}_d(t) - \dot{y}_k(t)| = \sup_{t \in [0, T]} |\dot{y}_d(t) - \dot{x}_{2,k}(t)|, \quad (51)$$

这里控制器参数选取情况为:  $q = 0.1, \eta = 1, m = 2, \beta_1 = 2, \beta_2 = 2, \gamma = \beta_1, \alpha = 4, p = 4, \lambda = 1$ ; 仿真时间  $T = 1$  s.

图1为系统实际输出跟踪期望输出的过程. 图2为历次迭代系统输出偏离期望输出的最大值曲线. 其定义式如式(50)所示. 从图2可以看出, 随着迭代次数的增加, 系统跟踪误差收敛到一个界内.

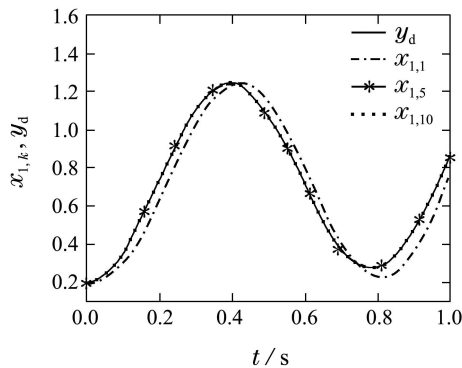


图1 期望输出与实际跟踪曲线

Fig. 1 The reference trajectory and system outputs

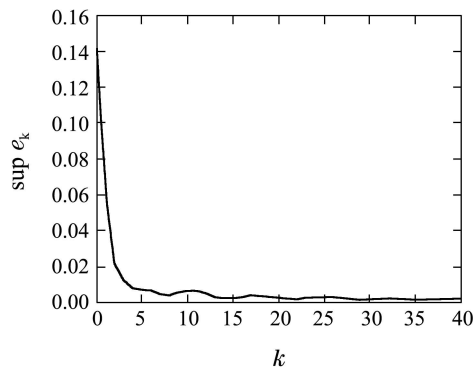


图2 历次迭代系统输出偏离期望输出最大值曲线  
Fig. 2 The maximum errors between system outputs and desired outputs each iteration

图3为系统跟踪误差导数跟踪期望轨迹导数的过程. 图4为历次迭代下, 系统跟踪误差导数偏离期望导数的最大值曲线. 其定义式如式(51)所示. 从图4可看出, 系统跟踪误差的导数收敛到一个界内. 图5为第40次迭代时控制器输出, 控制器无颤.

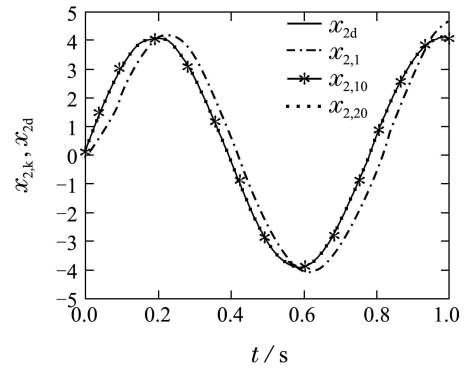


图3 系统实际输出导数跟踪期望导数曲线  
Fig. 3 Derivative tracking process between system outputs and reference trajectory

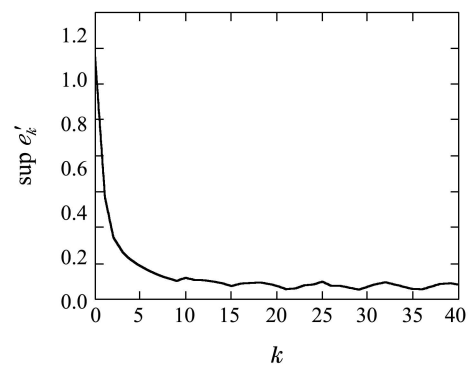


图4 历次迭代系统输出导数偏离期望导数的最大值曲线  
Fig. 4 The maximum derivative errors between system outputs and reference trajectory each iteration

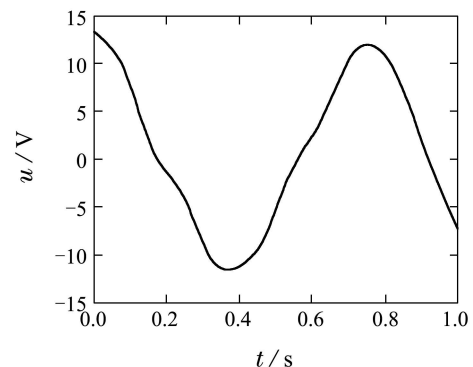


图5 第40次迭代控制器输出  
Fig. 5 Control outputs at the 40th iteration

当  $D_k(t) \equiv 0$  时, 即: 扰动不随迭代次数变化而变化时, 仿真结果如下.

图6为系统实际输出跟踪期望输出的过程. 图7为历次迭代系统输出偏离期望输出的最大值曲线. 其定义式如式(50)所示. 从图7可以看出, 随着迭代次数的增加, 系统跟踪误差收敛到零.

图8为系统跟踪误差导数跟踪期望轨迹导数的过程.

图9为历次迭代下, 系统跟踪误差导数偏离期望导数的最大值曲线. 其定义式如式(51)所示. 从图9可看出, 系统跟踪误差的导数渐近收敛到零. 图10为第40次迭代时控制器输出, 控制器无颤.

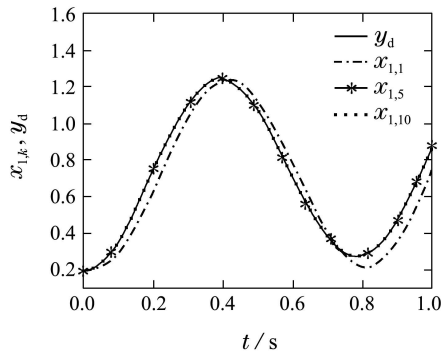


图6 期望输出与实际跟踪曲线

Fig. 6 The reference trajectory and system outputs

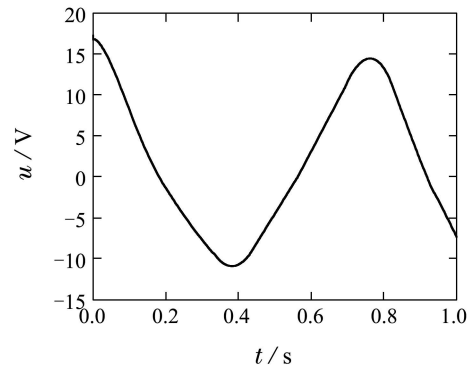


图10 第40次迭代控制器输出

Fig. 10 Control outputs at the 40th iteration

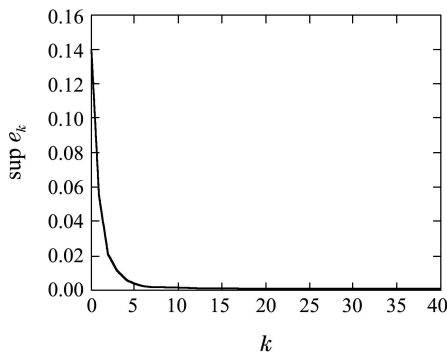


图7 历次迭代系统输出偏离期望输出最大值曲线

Fig. 7 The maximum errors between system outputs and desired outputs each iteration

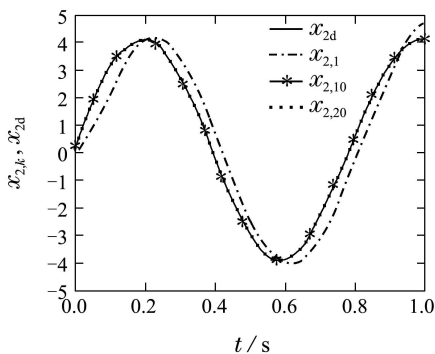


图8 系统实际输出导数跟踪期望导数曲线

Fig. 8 Derivative tracking process between system outputs and reference trajectory

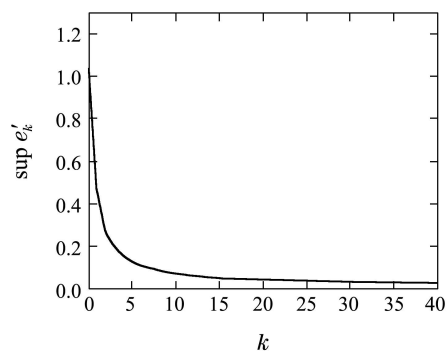


图9 历次迭代系统输出导数偏离期望导数的最大值曲线

Fig. 9 The maximum derivative errors between system outputs and reference trajectory each iteration

## 6 总结(Conclusions)

本文针对一类含不确定参数和未知扰动的单输入单输出高阶非线性系统,设计了滑模鲁棒迭代学习控制算法.对于可参数辨识的不确定性(仅沿时间轴变化),采用迭代学习辨识算法解决不确定性,获得相应的控制量;对于不可辨识的不确定性(沿迭代轴、时间轴均变化),采用迭代滑模算法削弱不确定性带来的系统跟踪误差,并获得相应的控制量.本文将未知扰动视为仅沿时间轴变化的扰动与随时间轴、迭代轴均变化扰动的叠加.这种处理方法的优点在于:不同性质的扰动采用不同的处理方法,最大限度地利用各种控制算法的优势,达到最佳的抗扰性能.

在后续研究中,针对含不确定项的仿射与非仿射非线性系统,笔者将研究新的带参数辨识系统的抗扰迭代学习控制,同时兼顾控制器参数选取的优化问题.

## 参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 12(2): 123 – 140.
- [2] 张玉东, 方勇纯. 一类输出饱和系统的学习控制算法研究 [J]. *自动化学报*, 2011, 37(1): 92 – 98. (ZHANG Yudong, FANG Yongchun. Learning control for systems with saturated output [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(1): 92 – 98.)
- [3] XU J X, YAN R. On initial conditions in iterative learning control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(9): 1349 – 1354.
- [4] SAAB S S. Selection of the learning gain matrix of an iterative learning control algorithm in presence of measurement noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1761 – 1774.
- [5] BU X H, YU F S, HOU Z S, et al. Robust iterative learning control for nonlinear systems with measurement disturbances [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2012, 23(6): 906 – 913.
- [6] 孙明轩, 黄保健, 张学智. 非线性系统的PD型迭代学习控制 [J]. *自动化学报*, 1998, 24(5): 711 – 714. (SUN Mingxuan, HUANG Baojian, ZHANG Xuezhi. PD-type iterative learning control for a class of nonlinear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(5): 711 – 714.)
- [7] LI X D, CHOW T W S, HO J K L, et al. Iterative learning control with initial rectifying action for nonlinear continuous systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2009, 3(1): 49 – 55.

- [8] HUANG D Q, XU J X, LI X F, et al. D-type anticipatory iterative learning control for a class of inhomogeneous heat equations [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2397 – 2408.
- [9] CHIEN C J, TAYEBI A. Further results on adaptive iterative learning control of robot manipulators [J]. *Automatica*, 2008, 44(3): 830 – 837.
- [10] 李俊民, 王元亮, 李新民. 未知时变时滞非线性参数化系统自适应迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(6): 861 – 868. (LI Junmin, WANG Yuanliang, LI Xinmin. Adaptive iterative learning control for nonlinear parameterized-systems with unknown time-varying delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 861 – 868.)
- [11] 孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法 [J]. *自动化学报*, 2013, 39(3): 251 – 262. (SUN Mingxuan, YAN Qizhen. Error tracking of iterative learning control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 251 – 262.)
- [12] 方忠, 韩正之, 陈彭年. 迭代学习控制新进展 [J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(2): 161 – 166. (FANG Zhong, HAN Zhengzhi, CHEN Pengnian. Recent developments of iterative learning control [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 161 – 166.)
- [13] ROOVER D. Synthesis of a robust iterative learning controller using an  $H_\infty$  approach [C] // *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*. Kobe Japan: IEEE, 1996, 12: 3044 – 3049.
- [14] DOH T Y, MOON J H. Feedback-based iterative learning control for uncertain linear MIMO systems [C] // *The 5th Asian Control Conference*. Melbourne, Australia: IEEE, 2004: 198 – 203.
- [15] MOORE K L, CHEN Y Q, AHN H S. Algebraic  $H_\infty$  design of higher-order iterative learning controllers [C] // *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Limassol, Cyprus: IEEE, 2005, 6: 1213 – 1218.
- [16] NORRLOF M, GUNNARSSON S. A note on causal and CITE iterative learning control algorithms [J]. *Automatica*, 2005, 41(3): 45 – 50.
- [17] 姜晓明, 王岩, 陈兴林. 鲁棒迭代学习控制律的优化设计方法 [J]. *电机与控制学报*, 2013, 17(3): 110 – 116. (JIANG Xiaoming, WANG Yan, CHEN Xinglin. Optimal design method of robust iterative learning control [J]. *Electric Machines And Control*, 2013, 17(3): 110 – 116.)
- [18] WANG D W. Convergence and robustness of discrete time nonlinear systems with iterative learning control [J]. *Automatica*, 1998, 34(11): 1445 – 1448.
- [19] CHIEN C J. A discrete iterative learning control for a class of nonlinear time-varying systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(5): 748 – 752.
- [20] BU X H, YU F S, HOU Z S, et al. Robustness iterative learning control for nonlinear systems with measurement disturbances [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2012, 23(6): 906 – 913.
- [21] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展 [J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(3): 407 – 418. (LIU Jinkun, SUN Fuchun. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 407 – 418.)
- [22] 方勇纯, 卢桂章. 非线性系统理论 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 85 – 87. (FANG Yongchun, LU Guizhang. *Nonlinear System Theory* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 85 – 87.)
- [23] CHEN W, CHEN Y Q. Robust iterative learning control for output tracking via second-order sliding mode technique [C] // *American Control Conference*. Baltimore: IEEE, 2010, 7: 2051 – 2056.
- [24] BARTOLINI G, FERRARA A, USAI E. Chattering avoidance by second-order sliding mode control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(2): 241 – 246.
- [25] BARTOLINI G, FERRARA A, USAI E, et al. On multi-input chattering-free second-order sliding mode control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(9): 1711 – 1717.
- [26] LEVANT A. Universal single-input-signal-output sliding-mode controllers with finite-time convergence [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1447 – 1451.
- [27] SHAO J Y, QI X D, HAN R C, et al. Application of an iterative learning-sliding mode controller to inverse pendulum system [C] // *Proceedings of the 3rd International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Shanghai, China: IEEE, 2004, 8: 788 – 791.
- [28] ROOPAEI M, SHABANINIA F, KARIMAGHAEI P. Iterative sliding mode control [C] // *Proceedings of the International Conference on Hybrid Systems and Applications*. Lafayette, LA, USA: IEEE, 2008, 6: 256 – 271.
- [29] SLOTINE J J, SASTRY S S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surface with application to robotic manipulators [J]. *International Journal of Control*, 1983, 38(2): 465 – 492.
- [30] CHUNG S C Y, LIN C L. A transformed lure problem for sliding mode control and chattering reduction [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(3): 563 – 568.
- [31] 张冬梅, 孙明轩, 俞立. 基于观测器跟踪非一致轨迹的迭代学习控制器设计 [J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(5): 795 – 799. (ZHANG Dongmei, SUN Mingxuan, YU Li. Observer-based iterative learning control for non-identical trajectory tracking [J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 795 – 799.)
- [32] XU J X, JIN X. State-constrained iterative learning control for a class of MIMO systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(5): 1322 – 1327.

## 附录(Appendix)

控制器无抖颤的证明. 根据式(8)–(11)可知, 只要  $|\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t))$  连续, 即可说明控制器无抖颤.

1° 当  $\sigma_k(t) > 0$  时,  $|\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t)) = (\sigma_k(t))^{m-1}$  连续;

2° 当  $\sigma_k(t) < 0$  时,  $|\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t)) = (-1)^m \cdot (\sigma_k(t))^{m-1}$  连续.

易知,  $|\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t))$  在  $\sigma_k(t) = 0$  处的左右极限相等且为0. 可见,  $|\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t))$  在  $\sigma_k(t) = 0$  处极限存在且等于自身函数值0.

由此,  $|\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t))$  在  $\sigma_k(t) = 0$  处连续.

综上,  $|\sigma_k(t)|^{m-1} \text{sgn}(\sigma_k(t))$  在  $\sigma_k(t) \in \mathbb{R}$  处处连续.

## 作者简介:

吕庆 (1983–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为迭代学习控制及其在原子力显微镜中的应用, E-mail: lvq@robot.nankai.edu.cn;

方勇纯 (1973–), 男, 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 主要研究方向为非线性控制、机器人视觉伺服、无人机和桥式吊车等欠驱动系统控制, E-mail: yfang@robot.nankai.edu.cn;

任道 (1988–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制、原子力显微镜系统控制, E-mail: renx@robot.nankai.edu.cn;