

随机激励下单杆柔性关节机械臂的建模与控制

刘振国^{1†}, 武玉强²

(1. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096; 2. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要: 机械系统如移动机器人、机械臂等在运动过程中通常会受到随机干扰. 针对随机激励下单杆柔性机械臂的数学建模和控制问题, 目前还没有相关的研究. 本文引入随机干扰, 建立了一个具有未知参数的随机动力学模型. 然后通过坐标变换, 将该模型化成一个4阶系统. 在此基础上, 结合自适应理论, 动态面方法和Lyapunov方法, 设计了一种新的控制器. 这种控制器有效地避免了传统方法中的过参数估计和复杂性爆炸的问题, 同时可以保证跟踪误差在均方意义下任意小, 且闭环系统的所有信号依概率有界. 最后通过一个仿真例子验证了本文理论的有效性.

关键词: 自适应系统; 柔性关节机械臂; 随机扰动; 位置跟踪; 动态面控制

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Modeling and control for single-link flexible-joint arm with random disturbances

LIU Zhen-guo^{1†}, WU Yu-qiang²

(1. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China;

2. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

Abstract: Mechanical systems such as mobile robots, manipulators are usually vulnerable to the random noises in the movement process. For the mathematical modeling and control problems of single link flexible joint arm under random disturbances, there is no related research achievement up to now. For these systems, we adequately introduce some random noises to build a stochastic dynamic model with uncertain parameters. Then, by using the coordinate transformation, we transform this model to a fourth-order nonlinear system. On this basis, we employ the adaptive control theory, the dynamic surface method and Lyapunov method to build up a new controller. This controller effectively avoids the over-parameterization and the explosion of complexity in routine controllers, and ensures the mean-square value of the tracking error to be arbitrarily small and all the signals in the closed-loop system to be bounded in probability. Finally, an example in the simulation is given to show the effectiveness of the presented theory.

Key words: adaptive systems; flexible joint arm; random disturbances; position tracking; dynamic surface control

1 引言(Introduction)

近20年来, 柔性关节机器人的控制问题被广泛研究^[1-7], 许多方法被相继提出. 例如, 奇异扰动方法^[2], 无源化方法^[3-4], 滑模方法^[5]等. 但是大多数研究只考虑确定干扰的影响. 而机器人系统在实际的控制过程中, 会受到多种不确定的干扰, 例如测量噪声, 建模误差等等. 有时为了保证系统有好的响应, 或者为了提高系统性能, 控制工程师们不能直接忽略这些干扰的存在. 因此, 很有必要考虑在这些不确定干扰存在情况下的某些柔性关节机器人控制问题.

随机控制理论是一种处理多种扰动的有效工具, 近年来逐渐趋于完善并成熟^[6-12]. 在此背景下, 一些学者开始研究机械系统在随机干扰下的建模与控制

问题. 例如, 文献[13]利用神经网络方法, 研究了随机干扰下的机械手模型, 并设计了状态反馈控制器. 文献[14-15]分别提出了随机哈密顿系统模型和随机拉格朗日动态模型, 并借助于反步法, 研究了这两种模型的自适应跟踪控制问题. 文献[16]基于无源化的方法, 研究并给出了随机哈密顿系统的稳定框架. 查阅现有的文献可以发现, 至今没有相关文章研究随机欠驱动机械系统. 考虑到柔性关节机器人固有的欠驱动性质, 研究这类系统的建模和控制问题有一定的理论意义和应用价值.

本文研究随机激励下单杆柔性关节机械臂的建模与控制问题. 怎样合理地引入随机干扰建立相应的动力学模型, 并设计自适应控制器保证均方意义下跟

踪误差任意小且使得闭环系统是均方意义下指数实际稳定的并不是一个简单的问题. 本文的工作包括3个方面. 首先, 通过合理地引入随机干扰, 建立了一个随机单连杆柔性关节机械臂动力模型. 然后, 引入一个新的坐标变换, 将原系统转化成一个新的非线性系统, 并利用自适应动态面方法递归的设计控制器. 最后, 用一个定理总结本文的结果.

为叙述方便, 对文中所使用符号做如下说明: \mathbb{R} 表示实数集; \mathbb{R}^n 表示 n 维实数空间; $C^i(\mathbb{R}^n)$ 表示 \mathbb{R}^n 上具有 i 次偏导数的所有连续函数集; E 表示数学期望; $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹; $|\cdot|$ 表示标量的绝对值或向量的范数; B 是 r 维独立维纳过程.

2 系统建模及问题描述(System modeling and problem formulation)

考虑悬挂在随机变化的平面上的单连杆柔性节点机械臂, 如图1所示. 其中: 杆长为 l , 关节质量为 m , 弹簧弹性系数为 k , 电动机转动惯量为 J , 重力加速度为 g , 连杆角位置为 q_1 , 转子角位置为 q_2 . 类似于文献[1], 需要做以下假设: 电机的动能主要取决于自身转动; 转子/齿轮惯量是关于转子转动轴对称的. 下面将给出动力学模型.

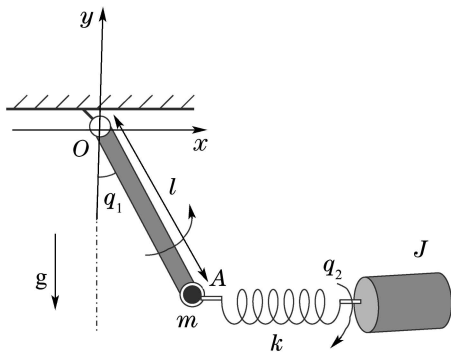


图1 单连杆柔性关节机械臂

Fig. 1 The single-link flexible joint arm

关节A的坐标为 $x = l \sin q_1, y = -l \cos q_1$. 由此可以得到系统的动能为

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_2^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{q}_2^2. \quad (1)$$

系统的势能等于

$$U(q) = -mgl \cos q_1 + \frac{1}{2}k(q_1 - q_2)^2. \quad (2)$$

由式(1)-(2), 可得拉格朗日函数为

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{q}_2^2 + mgl \cos q_1 - \frac{1}{2}k(q_1 - q_2)^2. \quad (3)$$

根据文献[7, 15], 广义力可以分解成控制力、耗散力以

及随机激励力. 假设模型中耗散力为零, 那么拉格朗日方程可以表示为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + \Lambda(q, \dot{q})\xi, \quad (4)$$

其中: 控制力为 $u \in \mathbb{R}$, 随机激励力(注1)为 $\Lambda(q, \dot{q})\xi$. 利用式(3)(4), 可得动态方程

$$M(q)\ddot{q} + F(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + \Lambda(q, \dot{q})\xi, \quad (5)$$

其中:

$$M(q) = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix},$$

$$F(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} mgl \sin q_1 + k(q_1 - q_2) \\ -k(q_1 - q_2) \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -ml \cos q_1 & -ml \sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

把 ξ 替换为 $\frac{dB}{dt}$, 方程(5)可以改写为

$$\begin{cases} dq = \dot{q}dt, \\ dq = (M(q)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} - M(q)^{-1}F(q, \dot{q}))dt + M(q)^{-1}\Lambda(q, \dot{q}) \circ dB, \end{cases} \quad (6)$$

其中: B 是 r 维独立维纳过程. 由 $M(q), \Lambda(q, \dot{q})$ 的定义可得, 式(6)的Wong-Zakai校正项等于零. 假设白噪声的功率谱密度 ξ 等于 $\frac{\Sigma}{2\pi}$, 即有 $dB = \Sigma dW$ 成立. 那么相应的Itô随机微分方程可以表示为

$$\begin{cases} dq = \dot{q}dt, \\ dq = (M(q)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} - M(q)^{-1}F(q, \dot{q}))dt + M(q)^{-1}\Lambda(q, \dot{q})\Sigma dW. \end{cases} \quad (7)$$

注1 方程(4)中随机干扰力的引入类似于文献[16]中的方法. 设悬挂点 o 的加速度为 ξ_o (随机变量). 可以将此加速度分解成水平方向的加速度 ξ_1 和竖直方向的加速度 ξ_2 , 由此可得关节A的加速度 $a_A = \xi_1 \cos q_1 + \xi_2 \sin q_1$, 那么环境对关节A施加的力矩等于

$$\tau_A = -ma_A l = -ml \cos q_1 \xi_1 - ml \sin q_1 \xi_2.$$

为简化模型, 这里考虑施加在转子上的随机干扰为 ξ_3 , 并假设没有其他耗散力或转矩施加于系统.

注2 这里的扰动 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$ 的独立标准Wiener过程向量. 并且不难发现, 式(7)中的所有函数都是局部Lipschitz的.

与现有的文献相比, 本文的工作主要表现在:

1) 考虑了更一般情况下的柔性关节机器人的建模与控制问题. 现有的工作如文献[2-5]都是基于文献[1]提出的确定模型, 没有考虑随机干扰. 本文通过合理的引入随机干扰, 给出了相应的随机模型, 并研究了系统参数未知情况下的控

制问题.

2) 考虑的机械系统是欠驱动的, 经过坐标变换之后, 系统的维数比文献[14-16]更高. 尽管这些文献考虑了随机干扰下机械系统的建模与控制问题, 但是系统都是全驱动的, 没有给出相应的欠驱动系统的控制方法.

3) 采用改进的动态面方法, 提出了一种新的自适应控制器. 考虑随机干扰时, 现有的方法如无源化方法^[2-4]等不好直接应用.

控制目标: 给定所需的参考轨迹 $q_d \in C^2(\mathbb{R})$, 满足 $q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d$ 都有一个常数上界. 定义连杆角位置跟踪误差为 $z_1 = q_1 - q_d$. 如果可以, 对系统(7)设计一个自适应状态反馈控制器, 使得误差 z_1 尽可能接近于零, 并且保证闭环系统所有信号在概率意义下有界.

3 主要结果(Main results)

在控制器设计之前, 定义 $x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = q_2, x_4 = \dot{q}_2$, 则方程(7)可改写为

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 dt, \\ dx_2 = (\frac{k}{ml^2} x_3 + f_1(x_1, x_2)) dt + g_1(x_1, x_2) dW, \\ dx_3 = x_4 dt, \\ dx_4 = (\frac{1}{J} u + f_2(x)) dt + g_2(x_3, x_4) dW, \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$f_1 = -\frac{k}{ml^2} x_1 - \frac{g}{l} \sin x_1, f_2 = \frac{k}{J} (x_1 - x_3), \\ g_1 = \frac{1}{ml^2} A_1 \Sigma, g_2 = \frac{1}{J} A_2 \Sigma, A = (A_1^T, A_2^T)^T.$$

定义

$$\theta = \max\{2, \frac{2g^2}{a^2 l^2}, \frac{1}{a}, \frac{\|\Sigma\|^4}{a^{\frac{4}{3}} k^2 m^2 l^4}, \frac{\|\Sigma\|^4}{J^2}, \frac{k^2}{J^2}\},$$

其中 $a = k/ml^2$. 下面给出控制器的设计过程.

步骤 1 考虑如下坐标变换 $z_1 = x_1 - q_d, z_2 = \dot{z}_1 + c_1 z_1$. 利用Itô公式可得

$$\begin{cases} dz_1 = (z_2 - c_1 z_1) dt, \\ dz_2 = (\frac{k}{ml^2} x_3 + \bar{f}_1) dt + g_1 dW, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\bar{f}_1 = f_1 - \ddot{q}_d + c_1 z_2 - c_1^2 z_1$. 选择第 1 个虚拟控制

$$x_3^*(x_1, x_2, q_{1d}, \dot{q}_{1d}, \hat{\theta}) = -(c_2 + \frac{27}{4c_1^3} + \delta_1 + \delta_2 + \omega_1 \hat{\theta}) z_2 =: -v_1 z_2, \quad (10)$$

其中:

$$\omega_1 = x_1^2 + \sin^2 x_1 + \frac{1}{4\delta_3^{\frac{7}{3}}} + c_1 + \frac{3c_1^{\frac{7}{3}}}{4} + \frac{9}{8\delta_4};$$

参数 c_2, δ_1, δ_2 是设计的正常数; 变量 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的估计, 将在随后给出. 将虚拟控制 x_3^* 通过一阶滤波器

$$\tau_3 \dot{\bar{x}}_3 + \bar{x}_3 = x_3^*, \bar{x}_3(0) = x_3^*(0), \quad (11)$$

其中 τ_3 是一个正常数. 由式(11)可得滤波虚拟控制 \bar{x}_3 .

步骤 2 定义动态面 $z_3 = x_3 - \bar{x}_3$, 并定义误差 $\zeta_1 = \bar{x}_3 - x_3^*$, 利用Itô公式可得

$$dz_3 = (x_4 + \frac{1}{\tau_3} \zeta_1) dt, \quad (12)$$

选择第 2 个虚拟控制

$$x_4^*(e_3, \chi_1) = -(c_3 + \epsilon_1 + \epsilon_2) z_3 - \frac{1}{\tau_3} \zeta_1, \quad (13)$$

其中: $\epsilon_1 \geq \frac{1}{32\delta_2^3}, \epsilon_2, c_3$ 是设计的正常数. 将虚拟控制 x_4^* 通过一阶滤波器

$$\tau_4 \dot{\bar{x}}_4 + \bar{x}_4 = x_4^*, \bar{x}_4(0) = x_4^*(0), \quad (14)$$

其中 τ_4 是一个正常数. 由式(14)可得滤波虚拟控制 \bar{x}_4 .

步骤 3 定义动态面 $z_4 = x_4 - \bar{x}_4$, 并定义误差 $\zeta_2 = \bar{x}_4 - x_4^*$, 利用Itô公式可得

$$dz_4 = (\frac{1}{J} u + \bar{f}_2) dt + g_2 dW, \quad (15)$$

其中 $\bar{f}_2 = f_2 + \frac{1}{\tau_4} \zeta_2$. 假设 $J \leq b$, 选择实际控制律及自适应律为

$$\begin{cases} u = -bv_2 z_4, \\ \dot{\hat{\theta}} = \gamma(\omega_1 z_2^4 + \omega_2 z_4^4) - \sigma \hat{\theta}, \hat{\theta}(0) > 0, \end{cases} \quad (16)$$

其中: 函数 $v_2 = (c_4 + \sigma_1 + \sigma_2 + (3/4)\sigma_3^{-\frac{1}{3}}\tau_4^{-\frac{4}{3}} + \omega_2 \hat{\theta}), \omega_2 = (x_1 - x_3)^2 + \sigma_4$; 参数 $\sigma_1 \geq (1/32\epsilon_2^3), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 都是正实数.

注 3 系统(7)被转化成式(9), 这种形式的非线性系统可以用传统的反步法设计控制器. 然而, 该方法会使得控制器形式非常复杂. 因此, 这里采用一种较简单的改进的自适应动态面控制方法. 动态面方法的核心思想是通过引入滤波器, 避免了对虚拟控制反复求导, 从而避免了出现“复杂性爆炸”问题. 更多的细节内容, 请参考[17-18]及引文.

由 ζ_1, ζ_2 的定义及Itô公式得

$$\begin{cases} d\zeta_1 = (-\frac{1}{\tau_3} \zeta_1 + \phi_1(z_1, \dots, z_4, \zeta_1, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{\theta})) dt + \varphi_1(z_1, z_2, q_d, \dot{q}_d, \hat{\theta}) dW, \\ d\zeta_2 = (-\frac{1}{\tau_4} \zeta_2 + \phi_2(z_1, \dots, z_4, \zeta_1, \zeta_2, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{\theta})) dt + \varphi_2(z_1, z_2, q_d, \dot{q}_d, \hat{\theta}) dW, \end{cases} \quad (17)$$

其中函数 $\phi_1, \phi_2, \varphi_1, \varphi_2$ 定义为

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{\partial x_3^*}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial x_3^*}{\partial x_2} (\frac{k}{ml^2} x_3 + \bar{f}_1) - \frac{\partial x_3^*}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \sum_{i=0}^1 \frac{\partial x_3^*}{\partial q_d^{(i)}} q_d^{(i+1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^*}{\partial x_2^2} g_1 g_1^T, \\ \phi_2 &= -\frac{\partial x_4^*}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial x_4^*}{\partial x_2} (\frac{k}{ml^2} x_3 + \bar{f}_1) - \frac{\partial x_4^*}{\partial x_3} x_4 + \frac{1}{\tau_3} \frac{\partial x_4^*}{\partial \bar{x}_3} \zeta_1 - \frac{\partial x_4^*}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \sum_{i=0}^1 \frac{\partial x_4^*}{\partial q_d^{(i)}} q_d^{(i+1)} - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_4^*}{\partial x_2^2} g_1 g_1^T, \\ \varphi_1 = -\frac{\partial x_3^*}{\partial x_2} g_1, \varphi_2 = -\frac{\partial x_4^*}{\partial x_2} g_1.$$

联立式(9)(16)–(17), 可得下列误差系统

$$\begin{cases} dz_1 = (z_2 - c_1 z_1) dt, \\ dz_2 = \left(\frac{k}{ml^2} x_3 + \bar{f}_1\right) dt + G_1 dW, \\ dz_3 = \left(x_4 + \frac{1}{\tau_3} \zeta_1\right) dt, \\ dz_4 = \left(-b_2 J^{-1} v_2 z_4 + \bar{f}_2\right) dt + G_2 dW, \\ \dot{\theta} = \gamma(\omega_1 z_2^4 + \omega_2 z_4^4) - \sigma \hat{\theta}, \\ d\zeta_1 = \left(-\frac{1}{\tau_3} \zeta_1 + \phi_1\right) dt + \varphi_1 dW, \\ d\zeta_2 = \left(-\frac{1}{\tau_4} \zeta_2 + \phi_2\right) dt + \varphi_2 dW. \end{cases} \quad (18)$$

选择候选Lyapunov函数 $V = V_1 + V_2$, 其中:

$$V_1 = \frac{1}{4} z_1^4 + \frac{1}{4a} z_2^4 + \frac{1}{4} z_3^4 + \frac{1}{4} z_4^4 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^2, \quad (19)$$

$$V_2 = \frac{1}{4} \zeta_1^4 + \frac{1}{4} \zeta_2^4. \quad (20)$$

下面的定理给出了本文的主要结果.

定理 1 对于单连杆柔性关节机械臂动态系统(7), 可以设计自适应状态反馈控制器(16), 使得

1) 误差系统(18)在 $[t_0, \infty)$ 上存在惟一强解. 如果初始条件满足 $V(t_0) \leq \rho$, 其中 ρ 是正常数, 误差系统(18)是指数实际稳定的, 并且所有信号依概率有界.

2) 连杆角位置跟踪误差 $z_1(t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E|z_1|^2 \leq \left(\frac{4d}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

通过选择适当的参数, 可以使均方意义下误差的值任意小.

证 1) 沿系统(18), 函数 V_1 满足

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_1 = & -c_1 z_1^4 + z_1^3 z_2 + \frac{1}{a} z_2^3 \left(\frac{k}{ml^2} x_3 + \bar{f}_1\right) + \\ & \frac{3}{2a} \text{tr}\{g_1^T z_2^2 g_1\} + z_3^3 \left(x_4 + \frac{1}{\tau_3} \zeta_1\right) + \\ & z_4^3 J^{-1} u + z_4^3 \bar{f}_2 + \frac{3}{2} \text{tr}\{g_2^T z_4^2 g_2\} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta} \dot{\theta} = \\ & -c_1 z_1^4 + z_2^3 x_3^* + z_3^3 \left(x_4^* + \frac{1}{\tau_3} \zeta_1\right) + z_4^3 J^{-1} u + \\ & z_1^3 z_2 + z_2^3 (z_3 + \zeta_1 + \frac{1}{a} \bar{f}_1) + \frac{3}{2a} \text{tr}\{g_1^T z_2^2 g_1\} \\ & + z_3^3 (z_4 + \zeta_2) + z_4^3 \bar{f}_2 + \frac{3}{2} \text{tr}\{g_2^T z_4^2 g_2\} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (21)$$

利用Young不等式可得

$$z_1^3 z_2 \leq \frac{c_1}{4} z_1^4 + \frac{27}{4c_1^3} z_2^4. \quad (22)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} z_2^3 (z_3 + \zeta_1 + \frac{1}{a} \bar{f}_1) \leq & (\delta_1 + \delta_2 + (x_1^2 + \sin^2 x_1 + \frac{1}{4\delta_3^{\frac{1}{3}}} + c_1 + \frac{3c_1^{\frac{7}{3}}}{4}) \theta) z_2^4 + \\ & \frac{c_1}{4} z_1^4 + \frac{27}{32\delta_2^3} z_3^4 + \frac{27}{32\delta_2^3} \zeta_1^4 + \frac{1}{16\delta_1} + \frac{\delta_3}{4} |\bar{q}_{1d}|^4. \end{aligned} \quad (23)$$

由范数性质及Young不等式可推得

$$\begin{aligned} \frac{3}{2a} \text{tr}\{g_1^T z_2^2 g_1\} \leq & \frac{3}{2a} z_2^2 \left|\frac{1}{ml^2} A_1 \Sigma\right|^2 \leq \\ \frac{\delta_4}{2} + \frac{9|\Sigma|^4}{8\delta_4 k^2 m^2 l^4} z_2^4 \leq & \frac{9}{8\delta_4} \theta z_2^4 + \frac{\delta_4}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

由式(22)–(24), 并注意到 $\epsilon_1 \geq \frac{27}{32\delta_2^3}$, 有

$$\begin{aligned} z_1^3 z_2 + z_2^3 (z_3 + \zeta_1 + \frac{1}{a} \bar{f}_1) + \frac{3}{2a} \text{tr}\{g_1^T z_2^2 g_1\} \leq & \\ \frac{c_1}{2} z_1^4 + (v_1 - c_2) z_2^4 - \omega_1 \epsilon_2^4 \tilde{\theta} + \epsilon_1 z_3^4 + & \\ \frac{27}{32\delta_2^3} \zeta_1^4 + \frac{1}{16\delta_1} + \frac{\delta_3}{4} |\bar{q}_{1d}|^4 + \frac{\delta_4}{2}. & \end{aligned} \quad (25)$$

利用Young不等式有

$$z_3^3 (z_4 + \zeta_2) \leq \epsilon_2 z_3^4 + \frac{27}{32\epsilon_2^3} z_4^4 + \frac{27}{32\epsilon_2^3} \zeta_2^4 \quad (26)$$

及

$$\begin{aligned} z_4^3 \bar{f}_2 \leq & \left(\sigma_2 + \frac{3\sigma_3^{-\frac{1}{3}}}{4} \tau_4^{-\frac{4}{3}}\right) z_4^4 + z_4^4 (x_1 - x_3)^2 \theta + \\ & \frac{\sigma_2}{16} + \frac{\sigma_3}{4} \zeta_2^4 \end{aligned} \quad (27)$$

成立. 根据范数性质及Young不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \text{tr}\{g_2^T z_4^2 g_2\} \leq & \frac{3}{2} z_4^2 \left|\frac{1}{J} A_2 \Sigma\right|^2 \leq \\ \sigma_4 \theta z_2^4 + \frac{9}{32\sigma_4}. & \end{aligned} \quad (28)$$

由式(26)–(28), 并注意到 $\sigma_1 \geq 27/(32\epsilon_2^3)$, 有

$$\begin{aligned} z_3^3 (z_4 + \zeta_2) + z_4^3 \bar{f}_2 + \frac{3}{2} \text{tr}\{g_2^T z_4^2 g_2\} \leq & \\ \epsilon_2 z_3^4 + (v_2 - c_4) z_4^4 - \omega_2 z_4^4 \tilde{\theta} + & \\ \left(\frac{27}{32\epsilon_2^3} + \frac{\sigma_3}{4}\right) \zeta_2^4 + \frac{\sigma_2}{16} + \frac{9}{32\sigma_4}. & \end{aligned} \quad (29)$$

注意到 $J \leq b$, 有

$$z_4^3 J^{-1} u = -b v_2 z_4^3 J^{-1} z_4 \leq -v_2 z_4^4. \quad (30)$$

将式(25)(29)–(30)以及 x_3^*, x_4^*, u 代入式(21), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_1 \leq & -\frac{c_1}{2} z_1^4 - \sum_{i=2}^4 c_i z_i^4 - \frac{\sigma}{\kappa} \tilde{\theta} \dot{\theta} + \frac{27}{32\delta_2^3} \zeta_1^4 + \\ & \left(\frac{27}{32\epsilon_2^3} + \frac{\sigma_3}{4}\right) \zeta_2^4 + \frac{1}{16\delta_1} + \frac{\delta_3}{4} |\bar{q}_{1d}|^4 + \\ & \frac{\delta_4}{2} + \frac{\sigma_2}{16} + \frac{9}{32\sigma_4}. \end{aligned} \quad (31)$$

沿系统(18), 函数 V_2 满足

$$\mathcal{L}V_2 \leq \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{1}{\tau_{i+2}} \zeta_i^4 + \zeta_i^3 \phi_i + \frac{3}{2} \text{tr} \{ \varphi_i^T \zeta_i^2 \varphi_i \} \right). \quad (32)$$

定义集合:

$$\begin{aligned} \Omega_d &= \{ (q_d^T, \dot{q}_d^T, \ddot{q}_d^T)^T \in \mathbb{R}^{3n} \mid |q_d|^2 + |\dot{q}_d|^2 + |\ddot{q}_d|^2 \leq A \}, \\ \Omega_i &= \{ (z_1, z_2, z_3, z_4, \zeta_1, \zeta_2, \tilde{\theta})^T \in \mathbb{R}^7 \mid \\ &\quad \frac{1}{4} z_1^4 + \frac{1}{4a} z_2^4 + \frac{1}{4} \sum_{j=3}^4 z_j^4 + \\ &\quad \frac{1}{4} \sum_{j=1}^i \zeta_j^4 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^2 \leq \rho \}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

可知 Ω_d 及 Ω_i 都是紧集. 函数 A_i 和 C_i 都是连续函数, 则存在正常数 α_i, β_i , 使得在紧集 $\Omega_d \times \Omega_i$ 上, $|\phi_i| \leq \alpha_i, |\varphi_i| \leq \beta_i$. 类似于式(22), 可得

$$\zeta_i^3 \phi_i \leq \frac{\kappa_i}{4} \zeta_i^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{\kappa_i} \right)^3 \alpha_i^4, \quad (33)$$

其中 κ_i 是正常数. 同样, 利用Young不等式及一些范数性质, 有

$$\frac{3}{2} \text{tr} \{ \varphi_i^T \zeta_i^2 \varphi_i \} \leq \frac{3\kappa_{i+2}}{4} \zeta_i^4 + \frac{3}{4\kappa_{i+2}} \beta_i^4, \quad (34)$$

其中 κ_{i+2} 是正常数. 将式(33)–(34)代入式(32), 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_2 &\leq \left(-\frac{1}{\tau_3} + \frac{\kappa_1}{4} + \frac{3\kappa_3}{4} \right) \zeta_1^4 + \\ &\quad \left(-\frac{1}{\tau_4} + \frac{\kappa_2}{4} + \frac{3\kappa_4}{4} \right) \zeta_2^4 + \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4} \left(\frac{3}{\kappa_i} \right)^3 \alpha_i^4 + \frac{3}{4\kappa_{i+2}} \beta_i^4 \right), \quad (35) \end{aligned}$$

定义常数

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{16\delta_1} + \frac{\delta_3}{4} |\ddot{q}_{1d}|^4 + \frac{\delta_4}{2} + \frac{\sigma_2}{16} + \frac{9}{32\sigma_4} + \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4} \left(\frac{3}{\kappa_i} \right)^3 \alpha_i^4 + \frac{3}{4\kappa_{i+2}} \beta_i^4 \right) + \frac{1}{2\gamma} \sigma \theta^2, \end{aligned}$$

由于

$$-\frac{1}{\gamma} \sigma \tilde{\theta} \dot{\theta} = -\frac{1}{\gamma} \sigma \tilde{\theta} (\tilde{\theta} + \theta) \leq -\frac{1}{2\gamma} \sigma \tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\gamma} \sigma \theta^2. \quad (36)$$

利用式(31)(35)–(36)有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &\leq -\frac{c_1}{2} z_1^4 - \sum_{i=2}^4 c_i z_i^4 - \left(\frac{1}{\tau_3} - \frac{27}{32\delta_2^3} - \frac{\kappa_1}{4} - \right. \\ &\quad \left. \frac{3\kappa_3}{4} \right) \zeta_1^4 - \left(\frac{1}{\tau_4} - \frac{27}{32\epsilon_2^3} - \frac{\sigma_3}{4} - \frac{\kappa_2}{4} - \right. \\ &\quad \left. \frac{3\kappa_4}{4} \right) \zeta_2^4 - \frac{1}{2\gamma} \sigma \tilde{\theta}^2 + d. \quad (37) \end{aligned}$$

选择参数使得

$$\begin{aligned} c_i > 0, \quad \frac{1}{\tau_3} &\geq \tau_1^* + \frac{27}{32\delta_2^3} + \frac{\kappa_1}{4} + \frac{3\kappa_3}{4}, \\ \frac{1}{\tau_4} &\geq \tau_2^* + \frac{27}{32\epsilon_2^3} + \frac{\sigma_3}{4} + \frac{\kappa_2}{4} + \frac{3\kappa_4}{4}, \end{aligned}$$

其中 $\tau_3^* > 0, \tau_4^* > 0$. 则

$$\mathcal{L}V \leq -\frac{c_1}{2} z_1^4 - \sum_{i=2}^4 c_i z_i^4 - \sum_{j=1}^2 \tau_j^* \zeta_j^4 - \frac{1}{2\gamma} \sigma \tilde{\theta}^2 + d. \quad (38)$$

则由式(38)可以推得

$$\mathcal{L}V \leq -cV + d, \quad (39)$$

其中 $c = \min \{ 2c_1, 4ac_2, 4c_3, 4c_4, \sigma, 4\tau_3^*, 4\tau_4^* \}$.

不难证明系统(7)中的所有函数都是局部Lipschitz的. 根据上面的证明过程, 可知误差系统(18)中的函数也是局部Lipschitz的. 由Lyapunov函数 V 的定义并注意到不等式(39), 可见文献[15]中引理1的所有条件都满足. 利用该引理可得误差系统(18)在 $[t_0, \infty)$ 上存在惟一强解, 并且是指数实际稳定的, 且所有信号依概率有界(见文献[15]注2).

2) 根据式(39)可推得

$$E|z_1|^2 \leq e^{-\frac{c}{2}(t-t_0)} \left(4V(t_0) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{4d}{c} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

利用式(40), 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} E|z_1|^2 \leq \left(\frac{4d}{c} \right)^{\frac{1}{2}}$ 成立. 且由于

$$\begin{aligned} c &= \min \{ 2c_1, 4ac_2, 4c_3, 4c_4, \sigma, 4\tau_3^*, 4\tau_4^* \}, \\ d &= \frac{1}{16\delta_1} + \frac{\delta_3}{4} |\ddot{q}_{1d}|^4 + \frac{\delta_4}{2} + \frac{\sigma_2}{16} + \frac{9}{32\sigma_4} + \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4} \left(\frac{3}{\kappa_i} \right)^3 \alpha_i^4 + \frac{3}{4\kappa_{i+2}} \beta_i^4 \right) + \frac{1}{2\gamma} \sigma \theta^2, \end{aligned}$$

可以选择 $\delta_3, \delta_4, \sigma_2$ 足够小, 且 $\delta_1, \sigma_4, \kappa_i, \gamma$ 足够大, 因为这些参数独立于 $c_1, 4ac_2, c_3, c_4, \sigma, \tau_3^*, \tau_4^*$.

4 仿真(Simulation)

在本节中, 设参考轨迹为 $q_d = 0.6 \sin(0.5t)$ rad. 系统参数设置为 $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $J = 1$ kg · m², $g = 9.8$ m/s², $k = 5$ Nm/rad; 初始条件为 $(q_1(0), \dot{q}_1(0), q_2(0), \dot{q}_2(0)) = (0, 0, 0, 0)$, 设计参数为

$$\begin{aligned} c_1 &= 5, \quad c_2 = c_3 = c_4 = 3, \quad \delta_1 = 25, \quad \delta_2 = 0.32, \\ \delta_3 &= 0.01, \quad \delta_4 = 1, \quad \tau_3 = 0.001, \quad \tau_4 = 0.03, \quad \epsilon_1 = 0.0025, \\ \epsilon_2 &= 2.5, \quad \sigma_3 = 0.1, \quad \sigma_4 = 1, \quad \gamma = 1 \times 10^{-5}; \end{aligned}$$

滤波初值为 $\bar{x}_3(0) = 1.3, \bar{x}_3(0) = 3.5$; 闭环系统响应如图2所示. 可见系统跟踪性能良好.

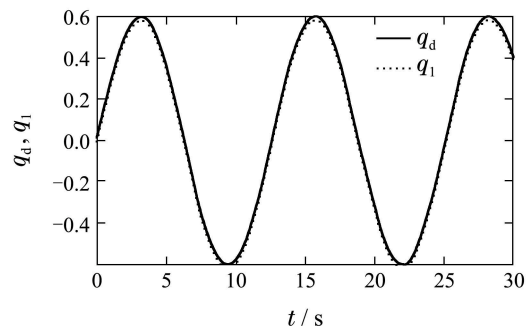


图 2 位置跟踪

Fig. 2 The position tracking

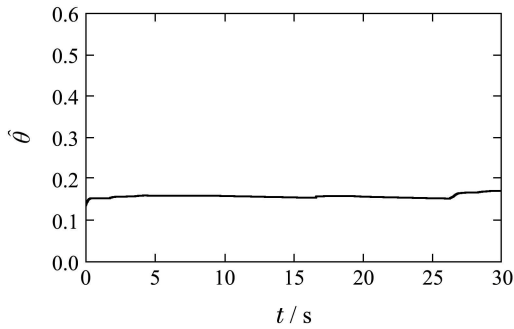


图3 自适应律

Fig. 3 The adaptive law

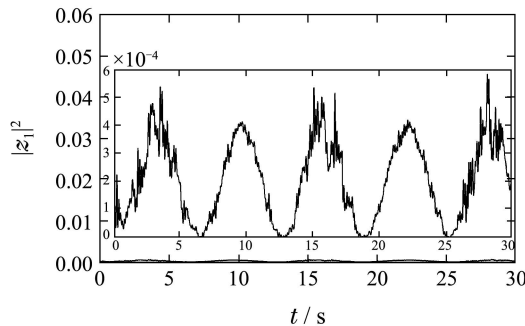


图4 均方误差

Fig. 4 The mean square of errors

5 结论(Conclusions)

本文研究了单连杆柔性关节机械臂在随机干扰下的建模与控制问题. 通过合理引入随机干扰, 建立了随机微分模型. 利用改进的自适应动态面控制方法设计了新的控制器, 该控制器可以使得均方意义下的跟踪误差任意小, 并且确保整个闭环系统是均方意义下实际稳定的. 未来的工作是考虑多连杆柔性关节机器人在随机干扰下的建模与控制问题.

参考文献(References):

- [1] SPONE M W. Modeling and control of elastic joint robots [J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1987, 109(4): 310 – 319.
- [2] GE S S. Adaptive controller design for flexible joint manipulators [J]. *Automatica*, 1996, 32(2): 273 – 278.
- [3] ALBU-SCHÄFFER A, OTT C, HIRZINGER G. A unified passivity based control framework for position, torque and impedance control of flexible joint robots [J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2007, 26(1): 23 – 30.
- [4] MORARESCU C I, BROGLIATO B. Passivity-based switching control of flexible-joint complementarity mechanical systems [J]. *Automatica*, 2010, 46(1): 160 – 166.
- [5] HUANG A C, CHEN Y C. Adaptive sliding control for single-link flexible-joint robot with mismatched uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2004, 12(5): 770 – 775.
- [6] DENG H, KRSTIC M, WILLIAMS R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(8): 1237 – 1253.
- [7] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制: Hamilton理论体系框架 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
(ZHU Weiqiu. *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control: a Framework of Hamiltonian Theory* [M]. Beijing: Science Press, 2003.)
- [8] ZHANG J F, LIU Y G. Practical output-feedback risk-sensitive control for stochastic nonlinear systems with stable zero-dynamics [J]. *SIAM: Journal on Control and Optimization*, 2006, 45(3): 885 – 926.
- [9] YU X, XIE X J. Output feedback regulation of stochastic nonlinear systems with stochastic iISS inverse dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(2): 304 – 320.
- [10] 余昭旭, 杜红彬. 时变时滞随机非线性系统的自适应神经网络跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(12): 1808 – 1812.
(YU Zhaoxu, DU Hongbin. Adaptive neural tracking control for stochastic nonlinear systems with time-varying delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(12): 1808 – 1812.)
- [11] WU Z J, CUI M Y, XIE X J, et al. Theory of Stochastic Dissipative Systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(7): 304 – 320.
- [12] 张东凯, 王朝立, 陈华. 随机非完整链式系统的自适应状态反馈镇定 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(11): 1479 – 1487.
(ZHANG Dongkai, WANG Chaoli, CHEN Hua. Adaptive state-feedback stabilization for stochastic nonholonomic chained systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(11): 1479 – 1487.)
- [13] PSILLAKIS H E, ALEXANDRIDIS A T. Adaptive neural motion control of n-link robot manipulators subject to unknown disturbances and stochastic perturbations [J]. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 2006, 153(2): 127 – 138.
- [14] CUI M Y, XIE X J, WU Z J. Dynamics modeling and tracking control of robot manipulators in random vibration environment [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1540 – 1545.
- [15] CUI M Y, WU Z J, XIE X J, et al. Modeling and adaptive tracking for a class of stochastic Lagrangian control systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(3): 770 – 779.
- [16] SATOH S, FUJIMOTO K. Passivity based control of stochastic port-Hamiltonian systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(5): 1139 – 1153.
- [17] ZHANG T P, GE S S. Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone in pure feedback form [J]. *Automatica*, 2008, 44(7): 1895 – 1903.
- [18] 王建国, 张秀宇, 林岩. 互联系统的分布输出反馈自适应动态面控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(10): 1265 – 1273.
(WANG Jianguo, ZHANG Xiuyu, LIN Yan. Output-feedback adaptive dynamic surface decentralized control for interconnected systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(10): 1265 – 1273.)

作者简介:

刘振国 (1986–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为非线性随机系统控制、非完整系统控制等, E-mail: lzg819@163.com;

武玉强 (1962–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统控制、随机非完整系统控制等, E-mail: yu.qiang.wu@126.com.