

## 线性定常系统的Petri网解耦控制

万 军<sup>1,2†</sup>, 赵不赓<sup>1</sup>

(1. 江苏大学 电气信息工程学院, 江苏 镇江 212013; 2. 常州大学 城市轨道交通学院, 江苏 常州 213164)

**摘要:** 将Petri网与现代控制理论相结合, 应用于连续系统的性能分析如可控性、可观性和稳定性等已日益普遍, 但Petri网应用于系统的解耦控制研究很少. 提出了广义连续自控网系统的形式化定义, 描述了线性定常系统的广义连续自控网系统模型并分析了广义连续自控网系统模型与状态空间描述的等效性. 基于状态反馈动态解耦的基本原理, 探讨了利用Petri网模型结构实现线性定常系统解耦控制的新方法. 该方法采用图的遍历算法, 可有效的判断系统的可解耦性以及实现解耦控制律, 避免了传统解耦控制方法中计算所需的大量矩阵运算. 最后给出了两个具体的应用实例.

**关键词:** 线性定常系统; Petri网; 广义连续自控网系统; 解耦; 模型结构; 状态反馈

**中图分类号:** TP301      **文献标识码:** A

## Petri nets decoupling control for linear time-invariant systems

WAN Jun<sup>1,2†</sup>, ZHAO Bu-hui<sup>1</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China;

2. School of Urban Railway Transportation, Changzhou University, Changzhou Jiangsu 213164, China)

**Abstract:** It is increasingly common for Petri nets to combine with modern control theory and to be applied to continuous system performance analysis, such as controllability, observability and stability. However, Petri nets are rarely used in system decoupling control. The formal definition of one new class of Petri nets called generalized continuous cyber net system is developed. A generalized continuous cyber net system model for a linear time-invariant system is depicted and its equivalence with state space description model is analyzed. Based on the state feedback dynamic decoupling principles, a new decoupling control method for linear time-invariant systems is explored by using the Petri nets model structures. Graph traversal algorithms are used in this method, which can effectively determine whether the coupling system can be decoupled and achieve the decoupling control rule, thus avoiding a large number of matrix operations in the traditional decoupling control methods. Two application examples are given.

**Key words:** linear time-invariant system; Petri nets; generalized continuous cyber net system; decoupling; model structures; state feedback

### 1 引言(Introduction)

耦合是生产过程控制系统中普遍存在的现象. 耦合使系统控制困难、控制品质下降, 严重时甚至会使系统无法运行, 因此通常需要进行解耦控制. 解耦的实质是通过对一个具有耦合的多输入多输出控制系统配以适当的补偿器, 将耦合限制在一定的程度或解耦为多个独立的单输入单输出系统<sup>[1]</sup>. 系统的解耦控制一直是控制理论领域中受到特别关注的问题. 近年来, 随着控制理论的发展, 已经衍生出了多种解耦方法, 但在理论研究上还不十分完善, 其可解耦的判断、算法的稳定性以及收敛性还没有统一的定论<sup>[2]</sup>. 传统解耦方法已得到一定的应用<sup>[3]</sup>, 基于状态反馈和

输入变换的解耦方法, 既可以实现系统解耦, 又可以进行极点配置使系统的动静态性能指标满足特定的要求, 是广泛采用的一种方法. 文[4]提出了针对线性定常系统的输入输出能量解耦方法, 即寻求状态反馈与输入变换控制律, 使得解耦后任何一个输入的能量主要控制对应的一个输出的能量. 文[5]对线性定常系统输入输出解耦问题提出了一种基于状态和输出的比例反馈新方法, 解耦时减少了求解线性代数方程的个数. 文[6]对基于矩阵分式描述和输入变换状态反馈的奇异系统提出了一种输入输出解耦法. 文[7-8]利用MATLAB语言编写了函数来实现求解线性系统的解耦控制算法. 但目前的解耦算法求解过程较为复杂,

收稿日期: 2013-11-13; 录用日期: 2014-04-14.

†通信作者. E-mail: 13815074795@139.com; Tel.: +86 13815074795.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61070058); 江苏高校优势学科建设工程资助项目(苏政办发(2011)6号); 江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(CXLX13.665).

计算量较大,寻求简单易行的有效解耦方法具有实际意义.

Petri网已被扩展到连续领域对连续系统建模,并被用来研究系统的稳定性、可控性、可观性和状态反馈控制器的设计.法国学者R. David等人将Petri网中的托肯的数量和有向弧的权扩展到正实数,引出了连续Petri网<sup>[9]</sup>.文[10-11]研究了可变速率连续Petri网(variable speed continuous PN, VCPN)用于连续系统建模问题,其中文[10]讨论了一种单输入库所可变速率连续Petri网(single input place-variable speed continuous PN, SIP-VCPN)的状态空间表达式,并分析了其稳定性.文[11]定义了一种用于线性系统建模的线性可变速率连续Petri网(linear variable speed continuous PNs, LVCPNs),并将可控性概念引入了连续Petri网.文[12-13]分别研究了连续Petri网的可控性和可观性.文[14]提出了微分Petri网(differential Petri nets, DPN),可将混杂系统中连续系统部分和离散事件系统部分置于统一的框架内建模,文[15-17]分别讨论了微分Petri网应用于切换线性系统中的稳定性分析、观测器和状态反馈控制器设计.自控网系统又称自修正系统,它是一种有向弧的权受控的Petri网,从而能更清楚地表现系统参数受系统状态的影响.文[18]将自控网系统进行了扩展,使其与混杂Petri网相结合,使混杂Petri网的建模能力得到增强.文[19]提出了一种自控连续Petri网模型并用来描述和分析具有连续变量的系统.但迄今为止鲜见有Petri网应用于系统解耦控制方法的研究.

本文对P/T系统和自控网系统定义进行了扩展,提出了广义连续自控网系统并引入了读写弧.通过借鉴现代控制理论的研究成果,研究了基于Petri网模型的解耦控制方法,并给出了两个应用实例.

## 2 广义连续自控网系统(Generalized continuous cyber net system)

### 2.1 广义自控网系统(Generalized cyber net system)

**定义1** 广义自控网系统.六元组 $\Sigma = (S, T; F, K, W, M_0)$ 构成广义自控网系统的条件是:

- 1)  $N = (S, T; F)$ 构成有向网,称为 $\Sigma$ 的基网;
- 2)  $K = \{K_L, K_H\}$ 称为 $N$ 上的容量函数.

$K_L: S \rightarrow \mathbb{R}; K_H: S \rightarrow \mathbb{R}; K_L, K_H$ 分别称为下界容量函数和上界容量函数; $\forall s \in S, K_L(s) < K_H(s)$ ,  $s$ 的容量可表示为 $[K_L(s), K_H(s)]$ .当 $K_L(s), K_H(s)$ 为无穷时,容量的闭区间变成开区间.

3)  $W: F \rightarrow \mathbb{R} \cup \text{Exp}(S)$ 称为 $N$ 上的权函数;其中 $\text{Exp}(S)$ 是 $S$ 元素的函数表达式集.

4)  $M: S \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 $N$ 的标识,  $M_0$ 为 $\Sigma$ 的初始标识.

图1(a)表示了一个广义自控网系统.有向弧的权函数写在对应的有向弧上.考虑该网系统,变迁 $t$ 发生时,库所 $s_1, s_2$ 中的标识值不发生任何改变,而库所 $s_3$ 标识

值只与 $s_1, s_2$ 标识值有关,与原有标识值无关.为了图形更加简洁,并突出这种特殊的读、写关系,用读弧和写弧来表示,它们是特殊的权控制弧.图1(b)是使用读写弧的广义自控网系统,图形上读弧和写弧用中间带有箭头的有向弧来表示.

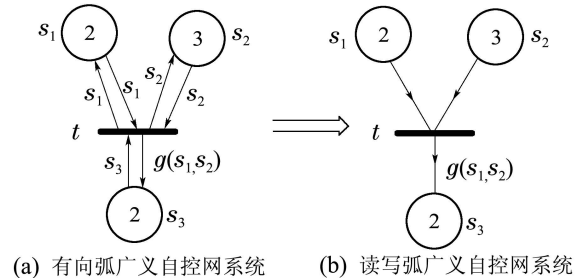


图1 广义自控网系统的示意图

Fig. 1 The sketch map of generalized cyber net system

**定义2** 变迁发生条件.

- 1) 标识 $M$ 下的权值定义为

$$\forall (x, y) \in S \times T \cup T \times S,$$

$$W_M(x, y) = \begin{cases} W(x, y), & W(x, y) \notin \text{Exp}(S), \\ e_M, & W(x, y) = e \wedge e \in \text{Exp}(S), \end{cases}$$

$e_M$ 是指将表达式 $e$ 中的 $s_i \in S$ 用其标识 $M(s_i)$ 代入的结果,其中 $i=1, 2, \dots, |S|$ ,即表示将权函数 $W(x, y)$ 中的各库所 $s_i$ 用 $M(s_i)$ 替代后得到的值.

- 2)  $t$ 在 $M$ 有发生权的条件是

$$\forall s \in \cdot t : (M(s) - W_M(s, t)) \in [K_L(s), K_H(s)] \wedge$$

$$\forall s \in t \cdot : (M(s) + W_M(t, s)) \in [K_L(s), K_H(s)],$$

$t$ 在 $M$ 有发生权记作 $M[t >]$ ,也称 $M$ 授权 $t$ 发生或 $t$ 在 $M$ 授权发生.

**定义3** 变迁发生后果.

若 $M[t >]$ ,则 $t$ 在 $M$ 可以发生,将标识 $M$ 改变为 $M$ 的后继 $M'$ ,  $M'$ 的定义如下:

$$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W_M(s, t), & s \in \cdot t - \cdot t, \\ M(s) + W_M(t, s), & s \in t \cdot - \cdot t, \\ M(s) - W_M(s, t) + W_M(t, s), & s \in \cdot t \cap t \cdot, \\ M(s), & t \notin \cdot t, \end{cases}$$

$M'$ 为 $M$ 的后继的事实记作 $M[t > M']$ .

若在广义自控网系统中,对 $\forall s \in S$ ,令 $K_L(s) = 0, K_H(s) = \infty$ ,且 $W: F \rightarrow \mathbb{N} \cup S$ ,则广义自控网系统就成为自控网系统.因此广义自控网系统状态方程可写成文[20]中给出的自控网系统的状态方程形式为

$$M' = M_0 + \rightarrow C \cdot U,$$

其中矩阵运算符“ $\rightarrow$ ”表替换加,  $C$ 为 $\Sigma$ 的关联矩

阵,  $U$  为并发步序列  $U_1 U_2 \cdots U_k$  的矩阵表示.

### 2.2 连续变迁与广义连续自控网系统(Continuous transition and generalized continuous cyber net system)

为使Petri网能够用来描述连续系统, 首先对Petri网中引入时间因素加以研究. 考察图2(a)所示的模型, 变迁  $t$  由时间脉冲CP控制. CP时序如图2(b)所示.

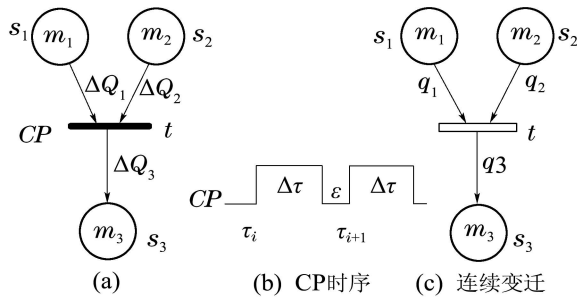


图2 连续变迁示意图

Fig. 2 The sketch map of continuous transition

在时刻  $\tau_i$ , 时间事件发生, 则变迁  $t$  接受该事件而发生. 经过  $\Delta\tau$  后,  $t$  发生结束, 库所  $s_j (j = 1, 2, 3)$  中标识变化量为  $\Delta Q_i$ . 当  $\Delta\tau \rightarrow 0$  时,  $s_j$  中标识变化的瞬时速度为  $\Delta Q_j / \Delta\tau \rightarrow q_j$ . 假设  $\epsilon$  是  $\Delta\tau$  的高阶无穷小量, 则  $\tau_{k+1} \rightarrow \tau_k + \Delta\tau, k = 0, 1, \dots, n$ . 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $s_j$  中的标识变化量为  $\sum_{i=0}^n q_{ji} \cdot \Delta\tau \rightarrow \int_{\tau_0}^{\tau_n} q_j d\tau$ . 从而可以视为在时间区间  $[\tau_0, \tau_n]$  内, 变迁  $t$  在时间事件的驱动下持续无穷次发生(相当于恒发生事件<sup>[21]</sup>), 称此类型的变迁为连续变迁, 符号如图2(c)所示. 与连续变迁相连的有向弧的权表示瞬时速度.

**定义4** 广义连续自控网系统. 六元组  $\Sigma = (S, T; F, K, W, M_0)$  构成广义连续自控网系统的条件是

- 1)  $N = (S, T; F)$  构成有向网, 称为  $\Sigma$  的基网;
- 2)  $K = \{K_L, K_H\}$  称为  $N$  上的容量函数.

$K_L: S \rightarrow \mathbb{R}; K_H: S \rightarrow \mathbb{R}; K_L, K_H$  分别称为下界容量函数和上界容量函数;  $\forall s \in S, K_L(s) < K_H(s)$ ,  $s$  的容量可表示为  $[K_L(s), K_H(s)]$ . 当  $K_L(s), K_H(s)$  为无穷时, 容量的闭区间变成开区间.

3)  $W: F \rightarrow \mathbb{R} \cup \text{Exp}(S, t)$  称为  $N$  上的权函数; 其中  $\text{Exp}(S, t)$  是  $S$  和时间  $t$  的函数表达式集.

4)  $M: S \rightarrow \mathbb{R}$  称为  $N$  的标识,  $M_0$  为  $\Sigma$  的初始标识.

广义连续自控网系统的状态方程为

$$M(t) = M(t_0) + \rightarrow C \cdot U, M(t_0) = M_0,$$

其中并发步  $U$  表示为一列向量: 以  $T$  元为序标量, 分量元素为积分算子, 用以表示变迁在  $t_0$  至  $t$  期间发生次数的测度. 由于连续变迁的发生是一个持续的过程, 需用  $M(t)$  代入到  $C$  中表达式计算. 例如对于图2(c)所示

的模型, 从  $t_0$  开始的任一时刻  $t$ , 系统标识  $M(t)$  为

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ M_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(t_0) \\ M_2(t_0) \\ M_3(t_0) \end{bmatrix} + \rightarrow \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} \left[ \int_{t_0}^t (\cdot) d\tau \right] = \begin{bmatrix} M_1(t_0) - \int_{t_0}^t q_1(t) d\tau \\ M_2(t_0) - \int_{t_0}^t q_2(t) d\tau \\ M_3(t_0) - \int_{t_0}^t q_3(t) d\tau \end{bmatrix}.$$

### 3 线性定常系统的广义连续自控网系统模型(Generalized continuous cyber net system model of linear time-invariant system)

基于广义连续自控网系统建立的系统模型包含5种图形要素: 库所、变迁、普通弧、读弧和写弧. 其中, 库所集  $S$  从结构上划分为3类: 代表外部输入的系统输入库所、表示内部状态的状态库所和系统输出库所, 用符号表示为  $S = \{u, x, y\}$ , 其中:  $u$  代表系统输入库所集,  $x$  代表状态库所集,  $y$  代表系统输出库所集.

线性定常系统的广义连续自控网系统模型具有以下特点:

- 1) 变迁的输入弧类型均为读弧.
- 2) 状态库所的输入弧类型为普通弧, 且权函数为某个状态库所标识或系统输入库所标识的比例函数. 即:  $\forall s \in x, t \in \cdot s$ , 有

$$W(t, s) = k \cdot M(p), k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0, p \in (x \cup u).$$

3) 系统输出库所的输入弧类型为写弧, 且权函数为各状态库所标识的线性组合. 即:  $\forall s \in y, t \in \cdot y$ , 有  $W(t, s) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot M(p_i)$ , 其中:  $k_i \in \mathbb{R}, p_i \in x, n = |x|$ , 且  $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$  中至少有项不为0.

图3示例了一个二状态、二输入和二输出的线性定常系统的广义连续自控网系统模型, 其中  $u_1$  和  $u_2$  为系统输入库所,  $x_1$  和  $x_2$  为状态库所,  $y_1$  和  $y_2$  为输出库所,  $a_{ij}, b_{ij}$  和  $c_{ij}$  等均为任意实数.

为描述上的符号简洁, 在不引起歧义的前提下, 文中库所标识名用对应的库所名表示. 该网系统的状态方程表达式为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \rightarrow \begin{bmatrix} \int_{t_0}^t (\cdot) d\tau \\ \int_{t_0}^t (\cdot) d\tau \\ \int_{t_0}^t (\cdot) d\tau \\ \int_{t_0}^t (\cdot) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & b_{11}u_1 & b_{12}u_2 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & b_{21}u_1 & b_{22}u_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{t_0}^t (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2)d\tau \\ \int_{t_0}^t (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2)d\tau \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

而

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

式(1)和式(2)即为图3所示的广义连续自控网系统模型描述的线性定常系统在控制理论意义下的状态方程和输出方程. 由此可见, 对于线性定常系统, 通过其广义连续自控网系统模型可直观的导出等价的状态空间描述.

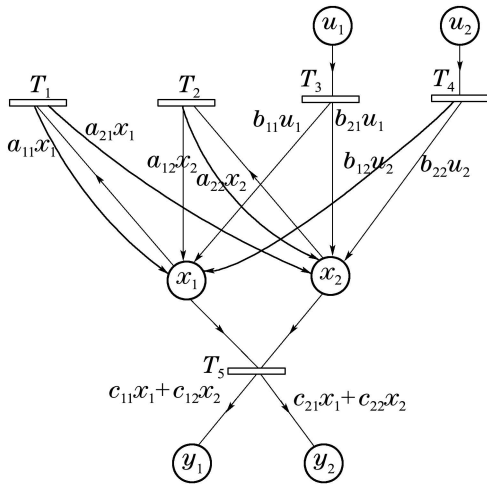


图3 线性定常系统的广义连续自控网系统模型

Fig. 3 Generalized continuous cyber net system model of linear time-invariant system

#### 4 解耦控制方法(Decoupling control method)

##### 4.1 状态反馈动态解耦的基本原理(Basic principles of state feedback dynamic decoupling)

设线性定常系统  $\Sigma_0 = (A, B, C)$  的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $x \in \mathbb{R}^n$  为状态向量,  $u \in \mathbb{R}^p$  为输入向量,  $y \in \mathbb{R}^q$  为输出向量,  $A, B$  和  $C$  为相应维数的常量阵, 在解耦系统中为保证一个输入量对应一个输出量, 要求  $p = q$ .

状态反馈动态解耦控制就是寻找一个状态反馈和

输入变换矩阵对  $\{K, L\}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , 使由控制率导出的闭环控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BLv, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (4)$$

其传递函数矩阵  $G_{KL}(S)$  为非奇异对角阵, 即

$$G_{KL}(S) = C(SI - A + BK)^{-1}BL = \text{diag}\{g_{11}(S), \dots, g_{pp}(S)\}, \quad g_{ii}(S) \neq 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

线性定常系统  $\Sigma_0 = (A, B, C)$  采用状态反馈能解耦的充分必要条件是判别矩阵  $E$  非奇异. 即

$$\det E = \det \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ \vdots \\ C_p A^{d_p} B \end{bmatrix} \neq 0, \quad (5)$$

其中:  $C_i$  为  $C$  的第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) 个行向量,  $d_i$  是满足不等式  $C_i A^k B \neq 0$  ( $k = 0, 1, \dots, p - 1$ ) 的一个最小整数  $k$ ,  $E_i = C_i A^{d_i} B$ .  $d_i$  和  $E_i$  为线性定常系统基于状态空间描述定义的两个结构特征量.

若  $\Sigma_0 = (A, B, C)$  是状态反馈能解耦的, 令

$$F = \det \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} B \\ \vdots \\ C_p A^{d_p+1} B \end{bmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

当选择

$$K = E^{-1}F, \quad L = E^{-1} \quad (7)$$

时, 则闭环系统(4)是一个积分型解耦系统.

##### 4.2 基于广义连续自控网系统模型的解耦控制方法(Decoupling control method based on generalized continuous cyber net system model)

假设本节讨论的系统模型中, 系统输入库所集为  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ , 状态库所集为  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 系统输出库所集为  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ .

首先给出模型结构方面的相关定义.

**定义 5** 通路. 模型中, 从输入库所或状态库所到输出库所的通路定义为一条由库所、变迁、普通弧、读弧和写弧连成的路径.

通路的具体表示由通路上库所和变迁组成, 且无需注明通路上的弧. 例如图3中,  $u_1$  到  $y_1$  的两条通路记为  $u_1 T_3 x_1 T_5 y_1$  和  $u_1 T_3 x_2 T_5 y_1$ .

在一条通路上, 若从变迁  $T$  到  $y_i$  的路径上, 所经过库所的数目为  $N$  ( $N \geq 0$ ), 则称  $T$  位于  $y_i$  的第  $N$  层. 同一个变迁在不同的通路层次不同. 例如在图3中的  $u_1 T_3 x_1 T_5 y_1$  和  $u_1 T_3 x_1 T_1 x_2 T_5 y_2$  两条通路上,  $T_3$  分别位于  $y_1$  的第1层和  $y_2$  的第2层. 从模型结构容易看出, 对于一个有  $n$  个状态库所的系统模型, 若通路上不包含环, 则该通路上的变迁的层次最大为  $n$ .

**定义6** 状态作用量. 在变迁 $T$ 到 $y_i \in y$ 的一条通路上,  $T$ 对 $y_i$ 的状态作用量为 $T$ 产生的包含状态库所标识值的变化量.  $y_i$ 的第 $\lambda$  ( $\lambda \geq 0$ )层状态作用量定义为到达 $y_i$ 的所有通路上, 位于 $y_i$ 的第 $\lambda$ 层的所有变迁对 $y_i$ 的状态作用量之和.

$T$ 对 $y_i$ 的状态作用量的计算规则为

1) 若 $T \in y_i$ , 则 $T$ 对 $y_i$ 的状态作用量为 $T$ 的输出弧的权函数值 $W(T, y_i)$ ;

2) 若 $T$ 的输出弧的权函数是状态库所 $x_i \in x$ 的函数, 且 $T$ 位于 $y_i$ 的第 $\lambda$ 层, 则 $x_i$ 经 $T$ 到 $y_i$ 的路径可表示为 $x_i T x_{\alpha 1} T_{\beta 1} x_{\alpha 2} \cdots x_{\alpha \lambda} T_{\beta \lambda} y_i$ .

根据第2节中模型特点描述可知,  $x_{\alpha i} \in x, i = 1, 2, \dots, \lambda$ . 各变迁输出弧的权函数表示如下:

$$W(T, x_{\alpha 1}) = K_0 x_i, W(T_{\beta 1}, x_{\alpha 2}) = K_1 x_{\alpha 1}, \dots, \\ W(T_{\beta \lambda}, y_i) = K_\lambda x_{\alpha \lambda} + f(x),$$

其中:  $K_0, K_1, \dots, K_\lambda$ 为常数,  $f(x)$ 表示除 $x_{\alpha \lambda}$ 外的关于其他状态库所的函数项. 因此 $T$ 对 $y_i$ 的状态作用量为 $\prod_{j=0}^{\lambda} K_j \cdot x_i$ .

**引理1**  $y_i \in y$ 的第 $\lambda$ 层状态作用量为 $C_i A^\lambda x$ , 其中 $C_i A^\lambda$ 为 $y_i$ 的第 $\lambda$ 层状态作用量向量.

**证** ① 若 $\lambda = 0$ , 输出库所 $y_i$ 的前集 $T$ 即为通过写弧与 $y_i$ 相连的变迁, 从而 $y_i$ 的第0层状态作用量为:  $W(T, y_i) = C_{i1}x_1 + C_{i2}x_2 + \dots + C_{in}x_n = C_i x$ .

② 若 $\lambda > 0$ , 假设 $C_i A^{\lambda-1}x$ 是 $y_i$ 的第 $\lambda - 1$ 层状态作用量.

令 $C_i A^{\lambda-1} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]$ , 其中 $s_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ , 则 $C_i A^{\lambda-1}x = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n$ . 根据状态作用量的计算规则, 可得 $y_i$ 的第 $\lambda$ 层状态作用量为

$$s_1(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n) + \\ s_2(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n) + \dots + \\ s_n(c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n) = \\ [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]Ax = C_i A^{\lambda-1}Ax = C_i A^\lambda x.$$

结论成立.

**定义7** 输入作用量. 在变迁 $T$ 到 $y_i \in y$ 的一条通路上,  $T$ 对 $y_i$ 的输入作用量定义为 $T$ 产生的包含系统输入库所标识值的变化量.  $y_i$ 的第 $\lambda$  ( $\lambda \geq 1$ )层输入作用量定义为到达 $y_i$ 的所有通路上, 位于 $y_i$ 的第 $\lambda$ 层的所有变迁对 $y_i$ 的输入作用量之和.

$T$ 对 $y_i$ 的输入作用量的计算规则为:

1) 若 $T$ 的输出弧的权函数未包含系统输入库所项, 则 $T$ 对 $y_i$ 的输入作用量为0;

2) 若 $T$ 的输出弧的权函数是 $u_i \in u$ 的函数, 且 $T$ 位于 $y_i$ 的第 $\lambda$ 层, 则 $u_i$ 经 $T$ 到 $y_i$ 的通路可表示成 $u_i T x_{\alpha 1} T_{\beta 1} x_{\alpha 2} \cdots x_{\alpha \lambda} T_{\beta \lambda} y_i$ .

在该通路中, 变迁 $T$ 输出弧的权函数为 $W(T, x_{\alpha 1}) = K_0 u_i$ , 其余各变迁输出弧的权函数表示与定义6中相同.

$$\text{因此 } T \text{ 对 } y_i \text{ 的状态作用量为 } \prod_{j=0}^{\lambda} K_j \cdot u_i.$$

**引理2**  $y_i \in y$ 的第 $\lambda$ 层输入作用量为 $C_i A^{\lambda-1}Bu$ , 其中 $C_i A^{\lambda-1}B$ 为 $y_i$ 的第 $\lambda$ 层输入作用量向量.

**证** ① 若 $\lambda = 1$ , 则 $y_i$ 的第1层输入作用量中, 包含 $u_k$ 的项为

$$(c_{i1}b_{1k} + c_{i2}b_{2k} + \dots + c_{in}b_{nk}) \cdot u_k = \\ \sum_{j=1}^n c_{ij}b_{jk} \cdot u_k = C_i B_k u_k.$$

$y_i$ 的第1层输入作用量为

$$C_i B_1 u_1 + C_i B_2 u_2 + \dots + C_i B_p u_p = C_i B u.$$

② 若 $\lambda > 1$ , 由引理1可知,  $y_i$ 的第 $\lambda - 1$ 层状态作用量为 $C_i A^{\lambda-1}x$ .

令 $C_i A^{\lambda-1} = [s_1 s_2 \cdots s_n]$ , 其中 $s_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ . 则 $C_i A^{\lambda-1}x = [s_1 s_2 \cdots s_n]x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n$ . 根据输入作用量的计算规则, 可得 $y_i$ 的第 $\lambda$ 层输入作用量为

$$s_1(b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1p}u_p) + \\ s_2(b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2p}u_p) + \dots + \\ s_n(b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{np}u_p) = \\ [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]Bu = C_i A^{\lambda-1}Bu.$$

结论成立.

**定义8** 结构特征值. 广义连续自控网系统模型的结构特征值 $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )定义为 $y_i$ 的输入作用量向量不为0的最小层次数.

从模型图上可直观的得出: 从系统输入库所到达 $y_i$ 的所有通路上, 经过的最少状态库所数即为特征量 $L_i$ , 且 $L_i \geq 1$ .

**定义9** 结构特征向量. 广义连续自控网系统模型的结构特征向量 $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )定义为 $y_i$ 的第 $L_i$ 层输入作用量向量.

**引理3** 线性定常系统的基于广义连续自控网系统模型的结构特征量与基于状态空间描述的结构特征量满足如下关系:

$$I_i = E_i, L_i = d_i + 1, i = 1, 2, \dots, p.$$

**证** 若 $y_i$ 的输入作用量向量不为0的最小层次数

为 $L_i$ , 根据引理2有 $C_i A^{L_i-1} B \neq 0$ . 从而等价的基于状态空间描述的结构特征量为

$$d_i = L_i - 1, E_i = C_i A^{L_i-1} B = I_i.$$

**定理 1** 由广义连续自控网系统模型描述的线性定常系统能解耦的充分必要条件是模型的结构特征向量 $I_i (i = 1, 2, \dots, p)$ 组成的 $p \times p$ 维常量阵 $I = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}$ 为非奇异.

**证** 由引理3中 $I_i = E_i$ , 可知 $I = E$ . 根据式(5), 结论成立.

**定理 2** 若一个广义连续自控网系统模型 $\Sigma$ 满足定理1中的条件时, 则在 $\Sigma$ 等价的状态空间描述下, 设定新的参考输入 $v_i (i = 1, 2, \dots, p)$ , 使其值等于输出库所 $y_i$ 的第 $L_i$ 层输入作用量与状态作用量之和, 即可实现解耦.

**证** 模型 $\Sigma$ 中,  $y_i$ 的第 $L_i$ 层输入作用量和状态作用量分别为 $I_i u = C_i A^{d_i} B u$ 和 $C_i A^{L_i} x = C_i A^{d_i+1} x$ .

若 $v_i = C_i A^{d_i} B u + C_i A^{d_i+1} x$ , 从而

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ \vdots \\ C_p A^{d_p} B \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ C_p A^{d_p+1} \end{bmatrix} x.$$

令  $\begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ C_p A^{d_p+1} \end{bmatrix} = F$ , 则有  $v = Iu + Fx$ .

由于模型满足定理1中的条件, 即 $I$ 非奇异, 因此矩阵方程变换可得 $u = -I^{-1}Fx + I^{-1}v$ , 取 $K = I^{-1}F$ ,  $L = I^{-1}$ , 此即第4.1节中式(7)所描述的解耦控制律, 因此模型描述的线性定常系统可实现解耦.

基于广义连续自控网系统模型 $\Sigma$ 进行系统解耦方法的实质为: 对 $\Sigma$ 进行化简操作得到等价的模型 $\Sigma'$ , 针对中每个输出库所 $y_i$ , 将其所有包含第 $L_i$ 层变迁的通路进行合并得到 $\Sigma'$ 的一条从输入库所 $v_i$ 到 $y_i$ 的通路,  $v_i$ 的标识为 $\Sigma'$ 中 $y_i$ 的第 $L_i$ 层输入作用量与状态作用量之和, 且 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 的模型特征量相同, 从而实现了 $v_i$ 对 $y_i$ 的单一控制.

**5 应用实例(Application examples)**

**实例 1** 考虑如下所示的线性定常系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

建立此系统的广义连续自控网系统模型如图4所示. 基于图的遍历算法, 可求得系统输入库所 $u_1$ 和 $u_2$ 到输出库所 $y_1$ 和 $y_2$ 的通路如表1所示. 从而可判断系统存在耦合现象.

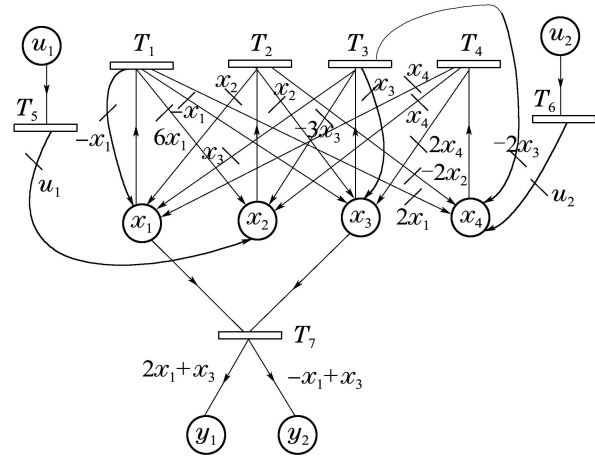


图4 实例1的广义连续自控网系统模型

Fig. 4 Generalized continuous cyber net system model in Example 1

表 1 图4模型中相关通路

Table 1 Paths in the model in Fig.4

通路描述	通路
$u_1$ 到 $y_i$ 通路 ( $i = 1, 2$ )	$u_1 T_5 x_2 T_2 x_1 T_7 y_i, u_1 T_5 x_2 T_2 x_3 T_7 y_i,$ $u_1 T_5 x_2 T_2 x_4 T_4 x_1 T_7 y_i,$ $u_1 T_5 x_2 T_2 x_4 T_4 x_3 T_7 y_i;$
$u_2$ 到 $y_i$ 通路 ( $i = 1, 2$ )	$u_2 T_6 x_4 T_4 x_1 T_7 y_i, u_2 T_6 x_4 T_4 x_3 T_7 y_i,$ $u_2 T_6 x_4 T_4 x_2 T_2 x_1 T_7 y_i,$ $u_2 T_6 x_4 T_4 x_2 T_2 x_3 T_7 y_i;$
状态库所经位于 $y_i$ 的 第 $L_i$ 层变迁到 $y_i$ 通路 ( $i = 1, 2$ )	$x_j T_j x_k T_k x_l T_l y_i$ ( $j = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3, 4;$ 且 $j, k$ 不同时为2和4; $l = 1, 3$ )

$u_1$ 到 $y_i$ 的最短通路(以弧数为单位)为 $u_1 T_5 x_2 T_2 x_1 T_7 y_i$ 和 $u_1 T_5 x_2 T_2 x_3 T_7 y_i$ ,  $u_2$ 到 $y_i$ 的最短通路为 $u_1 T_5 x_2 T_2 x_1 T_7 y_i$ 和 $u_1 T_5 x_2 T_2 x_3 T_7 y_i$ , 从而得出模型结构特征值为 $L_1 = 2$ 和 $L_2 = 2$ . 进而利用弧权函数进行计算可得,  $y_1$ 和 $y_2$ 的第2层输入作用量分别为 $u_1$ 和 $u_2$ .

因此模型的结构特征向量为 $I_1 = (1, 0), I_2 = (0, 1)$ . 满足定理1的解耦条件.

通过表1中所示的通路计算可得 $y_i$ 的第 $L_i$ 层状态作用量. 根据定理2, 在图4模型等价的状态空间描述下设计新的参考输入 $v_1$ 和 $v_2$ 如下, 即可实现解耦:

$$v_1 = u_1 + 6x_1 - 3x_3 + 2x_4,$$

$$v_2 = u_2 + 2x_1 - 2x_2 - 2x_3.$$

针对广义连续自控网系统模型, 建立其逆邻接表存储结构, 通过深度优先搜索算法, 即可查找系统输

入库所到达输出库所间的所有路径. 建立逆邻接表和查找路径的时间复杂度分别为 $O(v + e)$ 和 $O(v \cdot e)$ , 其中 $v$ 为库所个数,  $e$ 为所有库所相连的输入库所个数总和. 而计算 $y_i$ 的第 $L_i$ 层状态作用量问题等价于求 $y_i$ 和状态库所间长度为 $L_i$ 的所有路径, 采用广度优先搜索算法, 在 $O(L_i)$ 时间内即可生成, 避免了传统解耦控制算法中采用的大量矩阵运算.

**实例 2** 由质量块、弹簧、阻尼器组成的双输入双输出机械位移系统如图5所示, 系统输入量为外力 $u_1$ 和阻尼器气缸速度 $u_2$ , 输出量为质量块的位移和速度.  $m, k, f$ 分别为质量、弹簧刚度、阻尼系数;  $x$ 为质量块位移.

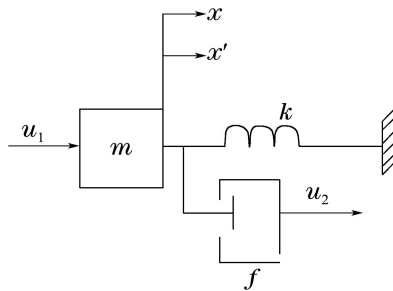


图 5 机械位移系统

Fig. 5 The sketch map of mechanical displacement system

根据牛顿力学原理, 系统所受外力 $u_1$ 与惯性力 $m\ddot{x}$ 、阻尼力 $f(\dot{x} - u_2)$ 和弹簧恢复力 $kx$ 构成平衡关系, 系统微分方程为:  $m\ddot{x} + f(\dot{x} - u_2) + kx = u_1$ .

建立此机械位移系统的广义连续自控网系统模型如图6所示, 其中状态库所 $x_1$ 和 $x_2$ 分别对应于质量块的位移和速度. 从图中可以分析:  $u_1$ 和 $u_2$ 到 $y_1$ 和 $y_2$ 存在4条通路, 分别为

$$u_1 T_3 x_2 T_1 x_1 T_5 y_1, u_2 T_4 x_2 T_1 x_1 T_5 y_1, \\ u_1 T_3 x_2 T_5 y_2 \text{ 和 } u_2 T_4 x_2 T_5 y_2,$$

显见系统存在耦合现象.

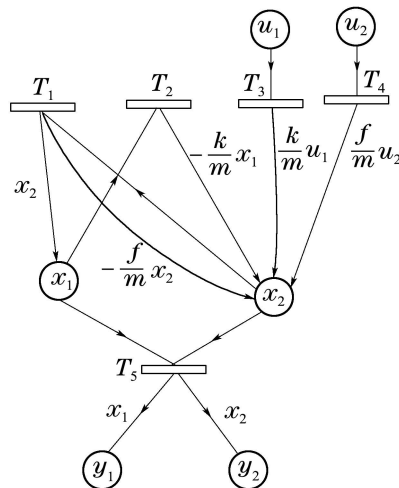


图 6 机械位移系统的广义连续自控网系统模型

Fig. 6 Generalized continuous cyber net system model of mechanical displacement system

由通路易得出模型结构特征值 $L_1 = 2$ 和 $L_2 = 1$ , 且 $y_1$ 的第2层输入作用量 $I_1$ 和 $y_2$ 的第1层输入作用量 $I_2$ 都为 $\frac{1}{m}u_1 + \frac{f}{m}u_2$ , 不满足定理1中的解耦条件, 此机械位移系统不能实现动态解耦.

## 6 结束语(Conclusions)

本文提出了一种广义连续自控网系统模型, 这种Petri网模型的状态方程与现代控制理论中系统的状态方程和输出方程具有等价关系, 从而用Petri网图形的方式描述系统中各输入量、状态量和输出量之间的拓扑关系. 借鉴现代控制理论研究成果, 服务于用Petri网图形的方式描述系统的解耦和控制器的设计, 进一步可以通过软件工具将控制器Petri网图形直接映射成逻辑电路. 下一步重点将拓展本文的研究方法, 在广义连续自控网系统的基础上研究混杂自控网系统理论, 从而实现对混杂系统的Petri网建模与控制.

## 参考文献(References):

- [1] 桑保华, 薛晓中. 多变量解耦控制方法 [J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(11): 13 - 16.  
(SANG Baohua, XUE Xiaozhong. A summary of multivariable decoupling control methods [J]. *Fire Control and Command Control*, 2007, 32(11): 13 - 16.)
- [2] 马平, 杨金芳, 崔长春, 等. 解耦控制的现状及发展 [J]. 控制工程, 2005, 12(11): 97 - 100.  
(MA Ping, YANG Jinfang, CUI Changchun, et al. Current situation and development of decoupling control [J]. *Control Engineering of China*, 2005, 12(11): 97 - 100.)
- [3] 达成莉. 多变量系统解耦现状的分析 [J]. 工业控制计算机, 2011, 24(12): 69 - 71.  
(DA Chengli. Current situation and development of decoupling control on MIMO system [J]. *Industrial Control Computer*, 2011, 12(11): 97 - 100.)
- [4] 毛维杰, 褚健. 线性定常系统的输入输出能量解耦 [J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 146 - 148.  
(MAO Weijie, CHU Jian. Input-output energy decoupling of linear time-invariant systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(1): 146 - 148.)
- [5] PARASKEVOPOULOS P N, KOUMBOULIS F N. A new approach to the decoupling problem of linear time-invariant systems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 1992, 329(2): 347 - 369.
- [6] VAFIADIS D, KARCANIAS N. Decoupling and pole assignment of singular systems: a frequency domain approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(8): 1555 - 1560.
- [7] 李康伟, 王宏力. 多变量线性系统解耦控制算法研究 [J]. 计算机测量与控制, 2007, 15(3): 346 - 348.  
(LI Kangwei, WANG Hongli. Study on decoupling control algorithm of linear multi-variable systems [J]. *Computer Measurement & Control*, 2007, 15(3): 346 - 348.)
- [8] 张丹, 陈华, 史成城. 线性MIMO系统的解耦控制 [J]. 工业控制计算机, 2012, 25(8): 63 - 65.  
(ZHANG Dan, CHENG Hua, SHI Chengcheng. Decoupling control of linear MIMO system [J]. *Industrial Control Computer*, 2012, 25(8): 63 - 65.)

- [9] DAVID R, ALLA H. Continuous Petri nets [C] // *Proceedings of the 8th European Workshop on Applications and Theory of Petri Nets*. New York: Springer-Verlag, 1988: 275 – 294.
- [10] YAHIAJ C A, ZERHOUNG N, MOUDNG A N, et al. State equation and stability of a class of continuous Petri nets. Application to manufacturing lines [C] // *Proceedings of the 1995 INRIA/IEEE Symposium on Emerging Technologies and Factory Automation*. New York: IEEE, 1995: 313 – 321.
- [11] YAHIAJ C A, ZERHOUNG N, MOUDNG A N, et al. State variable description and controllability of a class continuous Petri nets [C] // *Proceedings of the 1996 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. New York: IEEE, 1996: 68 – 71.
- [12] JÚLVEZ J, VÁZQUEZ C R, MAHULEA C, et al. State variable description and controllability of a class continuous Petri nets [C] // *Proceedings of the 1996 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. London: Springer, 2013: 407 – 428.
- [13] MAHULEA C, JÚLVEZ J, VÁZQUEZ C R, et al. Continuous Petri nets: observability and diagnosis [C] // *Proceedings of the 1996 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, (ISCAS)*. London: Springer, 2013: 387 – 406.
- [14] DEMONGODIN I, KOUSSOULASS N T. Differential Petri nets: representing continuous systems in a discrete-event world [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(4): 573 – 579.
- [15] DAVRAZOS G, KOUSSOULASS N T. Modeling and stability analysis of state-switched hybrid systems via differential Petri nets [J]. *Simulation Modeling Practice and Theory*, 2007, 15(8): 879 – 893.
- [16] HAMDI F, MANAMANNI N, MESSAI N, et al. Hybrid observer design for switched linear systems using differential Petri net [J]. *Non-linear Analysis: Hybrid Systems*, 2009, 3(3): 310 – 322.
- [17] HAMDI F, MESSAI N, MANAMANNI N. Observer based state feedback control design for switched linear systems: a differential Petri net approach [C] // *Conference on Control and Fault Tolerant Systems, France*. New York: IEEE, 2010, 68: 167– 172.
- [18] 陈樊, 叶献伟, 高建华. 自控连续Petri网模型及其应用 [J]. 浙江理工大学学报, 2008, 25(6): 680 – 684.  
(CHEN Fan, YE Xianwei, GAO Jianhua. Self-controlled and continuous Petri net and application [J]. *Journal of Zhejiang Sci-Tech University*, 2008, 25(6): 680 – 684.)
- [19] 赵不贻. 广义自修正网及其在线性和非线性系统中的应用 [C] // 第1届中国智能控制与智能自动学术会议. 沈阳: 东北大学出版社, 1994: 755 – 760.  
(ZHAO Buhui. Generalized cyber network and its linear and nonlinear system application [C] // *The 1st session of China Intelligent Control and Intelligent Auto Conference Proceedings*. Shenyang: Northeastern University Press, 1994: 755 – 760.)
- [20] 袁崇义. Petri网应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2013: 74 – 75.  
(YUAN Chongyi. *Application of Petri Nets* [M]. Beijing: Science Press, 2013: 74 – 75.)
- [21] 大卫 R, 奥兰 H. 佩特利网与逻辑控制器图形表示工具(GRAF CET) [M]. 黄建文, 赵不贻, 译. 北京: 机械工业出版社, 1996: 45.  
(DAVID R, ALLA H. *Petri Nets and Grafcet: Tools for Modelling Discrete Event Systems* [M]. HUANG Jianwen, ZHAO Buhui, translated. Beijing: China Machine Press, 1996: 45.)

#### 作者简介:

万军 (1978–), 男, 博士研究生, 讲师, 研究方向为Petri网理论及混杂系统, E-mail: 13815074795@139.com;

赵不贻 (1957–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为Petri网理论及DEDS等, E-mail: zhaobuhui@ujs.edu.cn.