

线性及非线性一致性问题综述

许耀颀, 田玉平[†]

(东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 本文综述多自主体系统线性及非线性一致性问题. 首先, 从自主体动态、通信拓扑和一致性协议这3个方面介绍一致性问题的基本问题. 接着, 从一致性问题的分析方法入手, 对目前一致性问题的研究结果进行分类和讨论. 然后阐释经典一致性协议是负的次梯度算法这一实质, 并给出一种一致性协议的设计方法. 最后列举了仍然需要解决的问题和未来的研究方向.

关键词: 多自主体系统; 一致性; 非线性控制; 负次梯度算法

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

A survey of linear and nonlinear consensus problems in multi-agent systems

XU Yao-jin, TIAN Yu-ping[†]

(School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: We present the survey result of linear and nonlinear consensus problems in multi-agent systems. First, these problems are elaborated in terms of the agent dynamics, communication topology and consensus protocol. Then, the state of the art on consensus is discussed from the perspective of analysis approaches. Moreover, the essence of the classical consensus protocol is found to be a negative sub-gradient algorithm, and an approach of consensus protocol design is presented. Finally, the problems to be solved in future research directions are pointed out.

Key words: multi-agent systems; consensus; nonlinear control; negative sub-gradient algorithm

1 引言(Introduction)

早在远古时期, 人类就已经观察并认识到自然界中生物种群的一些奇特行为: 如鸟类在没有全局指引的情况下能够紧而有序地大规模远距离迁徙, 萤火虫能步调一致地闪烁发光, 群居的蚂蚁能够快速地发现通往食物源的最优路径, 鱼群能迅速改变队形来围捕猎物或者应对天敌的围捕. 这些数量庞大, 但非常简单的个体无需集中式协调控制, 通过一些简单的局部信息交换和作用规则, 就能产生令人惊讶的群体宏观行为. 20世纪80年代起, 一些生物学家和物理学家通过建模与仿真来试图发掘这些多个体系统行为背后的机理, 其中两个最著名的模型是Boid模型^[1]和Vicsek模型^[2]. 在Vicsek模型中, 作者提出了一个简单的离散时间一阶非线性模型来模拟粒子群的相位变化, 仿真结果表明: 如果粒子的分布密度足够大、噪声密度足够小, 那么粒子间通过局部的信息交换与协调, 也能使最终的相位趋于一致.

所谓一致性是指随着时间的演化, 自主体通过相互作用、相互协调使得感兴趣的状态或者输出达到相

同. 一致性问题在计算机科学中已经有很悠久的历史, 它是分布式计算理论和算法的基础^[3-4]. 21世纪初, Jadbabaie等发表了Vicsek线性化模型的理论分析结果^[5], 从而引发了新一轮一致性问题的研究热潮. 此后, 有关一致性算法的设计和分析结果大量涌现, 见综述文献^[6-9]及其引用的参考文献. 目前, 一致性的思想及相关成果已经甚至早前就被广泛应用于复杂网络的同步^[10-12]、传感器网络的信息估计与融合^[13-15]、资源的分配调度与负载均衡^[16-17]等问题中, 而且多个体的聚集^[18-19]、移动小车和无人航行器的编队^[20-22]、网络时钟的同步^[23-24]等问题也可以借鉴或者转化成一致性问题来解决.

2 多自主体系统的一致性问题(Consensus problems of multi-agent systems)

在多自主体系统一致性问题中, 有3个基本要素: 动力学个体, 文献中常称之为自主体或智能体; 自主体间用于信息交换的通信网络; 自主体接收到其他自主体信息后做出的反应或者作用规则, 称为一致性协议, 也有的文献称之为一致性算法、一致性控制器. 在

许多一致性问题中涉及到非线性个体和非线性协议, 本文将这类一致性问题统称为非线性一致性问题。

2.1 自主体动态模型(Model of agent dynamics)

在多自主体系统中, 个体是最基本的单元, 它可以是有生命的生物体, 如鸟类、鱼群; 也可以是无生命的物理对象, 如移动机器人、无人飞行器; 还可以是计算机软件程序. 它的动态决定了一致性状态演化的基本规律, 也决定着一致性协议的基本形式. 根据考察目的和应用场合的不同, 自主体动态可以是线性动态, 也可以是非线性动态.

1) 线性动态模型.

① 一阶积分器:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i \in [1, N], \quad (1)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^p$, $u_i \in \mathbb{R}^p$ 分别表示自主体的位置状态和控制输入. 模型(1)描述了质点的运动学特性. 该自主体系统一致的物理意义: 在自主体运动过程中, 利用自己及邻居的位置信息调整自己当前的速度, 从而使所有自主体最终聚集到位置空间中的某一点.

② 二阶积分器:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = u_i, \end{cases} \quad i \in [1, N], \quad (2)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^p$, $v_i \in \mathbb{R}^p$, $u_i \in \mathbb{R}^p$ 分别表示第 i 个自主体的位置状态、速度状态及加速度控制输入. 模型(2)描述了质点的动力学特性. 该自主体系统一致的物理意义: 在自主体运动过程中, 利用自己及邻居的位置信息和速度信息更新自己当前的加速度控制量, 从而使得所有自主体聚集到一起并以相同的速度运动. 这里最终的共同速度也可以为零, 即所有自主体聚集到空间中某一点并静止.

③ 高阶线性时不变动态:

$$\begin{cases} \dot{X}_i = AX_i + BU_i, \\ Y_i = CX_i + DU_i, \end{cases} \quad (3)$$

其中: $X_i \in \mathbb{R}^p$, $U_i \in \mathbb{R}^q$, $Y_i \in \mathbb{R}^m$ 分别表示第 i 个自主体的状态、控制输入和量测输出; (A, B, C, D) 是给定的维数相容的矩阵, 一般要求满足可镇定、可检测的条件^[25]. 模型(3)刻画了更一般的自主体动态, 例如高阶积分器系统和线性振荡器系统.

2) 非线性动态模型.

线性动态模型虽然简单易于分析, 但在有些场合无法刻画所考察的对象, 尤其是一些机械力学系统, 因此一些非线性动态系统也得到了关注和研究. 这里着重介绍3种典型的非线性模型: 非完整小车模型、非完整链式模型和欧拉-拉格朗日模型.

① 非完整小车模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \cos \theta_i, \\ \dot{y}_i = v_i \sin \theta_i, \\ \dot{\theta}_i = \omega_i, \end{cases} \quad i \in [1, N], \quad (4)$$

其中: $z_i = (x_i, y_i)^T$ 是第 i 个小车的质心坐标, θ_i 是其方位角, v_i, ω_i 分别是小车的线速度和角速度. 多个小车实现一致的方式包括位置一致(小车聚集到位置空间中的某一点), 或者位置和前进方向同时一致.

② 非完整链式系统模型.

实际中不少机械系统都含有非完整约束(non-holonomic constraint), 如轮式小车、带有拖车的牵引机车、在盘面上滑动的刀锋等. 通过坐标变换和预反馈, 很多系统都可以局部或者全局的转化成如下链式模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = u_{i1}, \\ \dot{x}_{ip} = x_{i,p+1} u_{i1}, \quad p \in [2, n-1] \\ \dot{x}_{in} = u_{i2}, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $x_{i*} = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T$, $u_{i*} = (u_{i1}, u_{i2})^T$ 分别是第 i 个自主体的状态和输入. 在链式系统一致性问题研究中, 通常考察输出一致性, 即第一个状态和最后一个状态的一致, 中间状态镇定到0.

③ 欧拉-拉格朗日模型.

还有一类机械系统可以用欧拉-拉格朗日方程来描述, 包括多关节机械臂和刚体系统:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i, \quad (6)$$

其中: $q_i \in \mathbb{R}^p$ 是第 i 个自主体的广义坐标向量, $M_i(q_i)$ 是系统惯性矩阵, $C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i$ 是科里奥利力和离心力力矩, $g_i(q_i)$ 是重力矩, τ_i 是作用在自主体 i 上的外部输入力矩.

欧拉-拉格朗日系统具有如下性质:

a) 惯性矩阵 $M_i(q_i)$ 对称正定, 且存在正常数 m, M 使得 $mI \leq M_i(q_i) \leq MI$;

b) $\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 是反对称阵.

这里一致性问题考察广义坐标位置及速度的一致, 如机械臂关节角的同步.

2.2 网络拓扑描述(Description of communication topology)

在多自主体系统一致性的研究中, 图论^[26]是一个重要的分析工具. 如果用节点代表自主体, 用节点间的有向边来表示自主体间的信息传递关系, 则可以用图论中的有向图(也称为有向连接拓扑)来描述网络结构.

图论中通常用 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}(\mathcal{G}), \mathcal{E}(\mathcal{G}))$ 表示一个图, 其中: $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示节点集, $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{V}(\mathcal{G}) \times \mathcal{V}(\mathcal{G})$ 表示边集. 用节点 v_i 代表自主体 i , 用有向边 $\mathcal{E}_{ij} = (v_i, v_j)$ 表示自主体 j 能获得自主体 i 的信息, 且称 v_i 是父节点, v_j 是子节点, 也说 v_i 是 v_j 的邻居. 节点 v_j 的邻居集用集合 N_j 表示, 即 $N_j = \{v_i : (v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})\}$. 在有向图 \mathcal{G} 中, 如果 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$, 则称图 \mathcal{G} 为无向图或双向图.

有向图中, 从节点 v_{j_0} 到 v_{j_k} 的一条有向路径是指一个有向边序列 $(v_{j_0}, v_{j_1}), (v_{j_1}, v_{j_2}), \dots, (v_{j_{k-1}}, v_{j_k})$. 所谓有向树, 它是一个有向图: 其中只有一个节点没有父节点, 但该节点到其他所有节点都有有向路径, 称该节点为根节点; 除了根节点外, 其他每个节点有且只有一个父节点. 所谓有向生成树, 它是一个有向子图, 该子图是包含了图中所有节点的有向树. 有向图中, 如果去掉有向边的方向后图是连通的, 则称图是弱连通的; 如果任一节点偶对中, 至少从一个节点到另一个节点存在有向路径, 则称图是单向连通的; 如果任一节点偶对中, 节点间彼此都存在有向路径, 则称图是强连通的. 在此基础上, 定义一个十分重要的概念——强连通分量.

定义1 (强连通分量^[27]) 如果图 \mathcal{G} 的子图 \mathcal{G}' 是强连通的, 且没有包含 \mathcal{G}' 的更大子图是强连通的, 则称 \mathcal{G}' 是 \mathcal{G} 的强连通分量, 也称强连通分图.

给定一个有向图, 可以定义一个加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}]_{N \times N} : a_{ij} > 0 \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$; 否则 $a_{ij} = 0$. 节点 v_i 的输入度定义为 $\deg_{\text{in}}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$, 输出度

定义为 $\deg_{\text{out}}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}$. 如果一个节点的输入度等于输出度, 则称该节点是平衡节点; 如果所有节点都是平衡节点, 则称图是平衡图. 由此可知无向图是平衡图. 由节点的输入度组成的对角矩阵 D 称为图的度矩阵, 则定义Laplacian矩阵为 $L = D - A$. 易见Laplacian矩阵各行行和为0, 所以0是Laplacian矩阵的一个特征值, 其对应的右特征向量为 $\mathbf{1}_N$. 对于平衡图, $\mathbf{1}_N$ 也是其左特征向量. 进一步由盖氏圆盘定理知, Laplacian矩阵的所有特征值均位于复平面的右半闭平面内. 因此对于无向图, 其Laplacian矩阵是对称半正定阵. 特别的, 关于Laplacian矩阵特征值与图的连通性之间的关系, 有如下结果: 对于无向连接拓扑, 其Laplacian矩阵只有一个零特征值当且仅当该拓扑是连通的^[28]; 对于有向连接拓扑, 其Laplacian矩阵只有一个零特征值当且仅当该拓扑包含有向生成树^[29-30].

在描述切换连接拓扑的时候, 通常会用到图的并这个概念. 所谓图的并, 或者称为并图, 是指该图的节点集由所有图的节点组成, 边集由所有图的边的并集组成. 对于节点集相同的连接拓扑集合, 其并图包含有向生成树并不要求拓扑集合中有子图包含生成树.

2.3 一致性协议(Consensus protocol)

一致性协议描述的是自主体利用自己及邻居信息更新自身状态, 从而使得系统达到一致的规则, 有些文献也称之为一致性算法、一致性控制器或者一致性控制律. 根据可利用的信息, 可以分为基于状态反馈的协议、基于静态输出反馈的协议和基于动态输出补

偿的协议. 而根据协议的形式及作用, 可分为线性协议和非线性协议. 本文基于后一种分类标准对一致性协议做如下归纳:

1) 线性一致性协议.

对于模型(3)描述的自主体, 如果自主体间传递的是状态信息, 那么可以采用基于状态反馈的一致性协议, 其基本形式为

$$U_i(t) = K \sum_{j=1}^N a_{ij}(X_j(t) - X_i(t)), \quad (7)$$

其中 K 是需要设计的状态反馈增益, 也称为协议参数.

对于一阶积分器系统, 协议式(7)退化为

$$u_i(t) = k \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (8)$$

这就是最简单最经典的一致性协议.

对于二阶积分器系统, 其基本的形式是位置差信息与速度差信息的线性组合:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}[k_1(x_j(t) - x_i(t)) + k_2(v_j(t) - v_i(t))]. \quad (9)$$

通过选择合适的协议参数, 可以保证自主体能聚集到一起且以相同的速度运动. 然而在有些场合下, 希望自主体能聚集到静止的一点, 也称为系统静态一致. 这时可以在协议(9)的基础上引入速度镇定项^[31-32], 即

$$u_i(t) = -k_0 v_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij}[k_1(x_j(t) - x_i(t)) + k_2(v_j(t) - v_i(t))]. \quad (10)$$

还可以证明, 在没有相对速度信息, 即 $k_2 = 0$ 的情况下, 该协议仍然是有效的^[33].

如果自主体间交换的是输出信息, 则只能设计基于输出反馈的一致性协议, 或者为静态输出反馈协议, 或者为动态输出反馈协议, 即基于观测器的控制协议. 静态输出反馈协议形式如下^[34-35]:

$$U_i(t) = K \sum_{j=1}^N a_{ij}(Y_j(t) - Y_i(t)). \quad (11)$$

该协议形式简单, 但静态输出反馈能力有限, 有些场合应用起来有较大的局限. 相应地, Fax和Murray, 以及Seo等采用动态输出反馈协议^[36-37]:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_i = A_k \chi_i + B_k \sum_{j=1}^N a_{ij}(Y_j(t) - Y_i(t)), \\ U_i = C_k \chi_i + D_k \sum_{j=1}^N a_{ij}(Y_j(t) - Y_i(t)). \end{cases} \quad (12)$$

相较于静态输出反馈协议, 动态输出反馈协议在求解一致性问题时适用范围更广, 灵活性更大.

2) 非线性一致性协议.

线性协议虽然简单易于实现,但在有些场合无法满足系统其他性能方面的要求,如控制输入有界、有限时间收敛、连接拓扑连通保持等等,此时需要设计非线性一致性协议,本节主要介绍3种典型的非线性协议.需要指出的是,非线性协议的设计与分析相较于线性协议复杂得多,因此目前的结果大多针对一阶积分器、二阶积分器等简单的低阶动态系统.

① 输入饱和.

实际应用中,执行机构往往有饱和约束,文献[38–40]提出的非线性协议可以解决一阶积分器自主体系统的这一问题:

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_{\Delta}(x_j - x_i), \quad (13a)$$

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\phi_{\Delta}(x_j) - \phi_{\Delta}(x_i)), \quad (13b)$$

$$u_i = \phi_{\Delta} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) \right). \quad (13c)$$

对于二阶积分器系统, Ren提出了如下的输入有界的一致性协议^[41]:

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} [\phi_{\Delta}(k_1(x_j - x_i)) + \phi_{\Delta}(k_2(v_j - v_i))]. \quad (14)$$

常见的饱和函数形式有 $\phi_{\Delta}(x) = \Delta \operatorname{sgn} x$, $\phi_{\Delta}(x) = \Delta \tanh(x)$ 等,其中 Δ 是饱和值.图1给出了两种饱和函数.

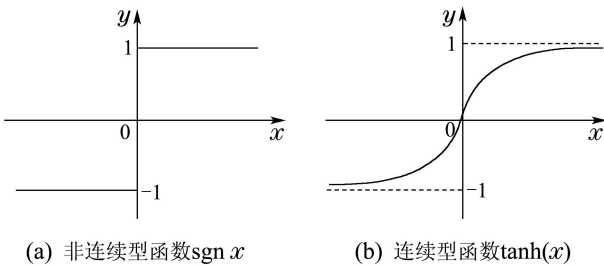


图1 常见饱和函数

Fig. 1 Saturation functions

② 有限时间收敛.

相较于渐近稳定,有限时间稳定系统具有收敛快速、抗干扰能力强等优点.文献[42–44]对有限时间一致性问题进行了研究,且根据协议函数是否连续可以分为非连续型和连续非光滑型两类.一阶积分器自主体系统典型的有限时间一致性协议包括:

$$u_i = \frac{\sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i)}{\left\| \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) \right\|}, \quad (15a)$$

$$u_i = \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) \right) \quad (15b)$$

和

$$u_i = \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) \right) \cdot \left| \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) \right|^{\alpha}, \quad (16a)$$

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \operatorname{sgn}(x_j - x_i) \cdot |x_j - x_i|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (16b)$$

其中第1种协议是非连续型协议,且当 $x_i \in \mathbb{R}$ 时,式(15a)与(15b)等价;第2种协议是连续非光滑型协议.图2描述了这两种协议函数.

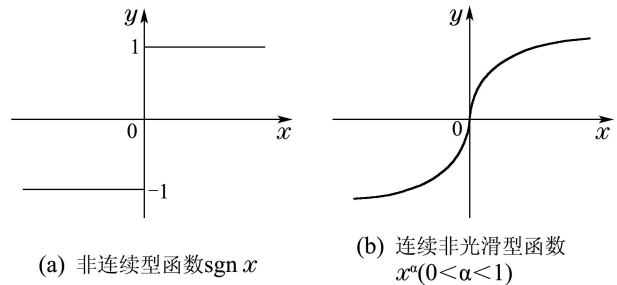


图2 常见有限时间函数

Fig. 2 Finite-time convergence functions

二阶积分器自主体系统典型的有限时间一致性协议为^[45]

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} [\operatorname{sgn}(x_j - x_i) \cdot |x_j - x_i|^{\alpha} + \operatorname{sgn}(v_j - v_i) \cdot |v_j - v_i|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}], \quad 0 < \alpha < 1. \quad (17)$$

③ 连通保持.

很多研究一致性的文献中都假设连接拓扑是连通的,而实际情形通常是拓扑连通性与自主体之间的距离密切相关:当自主体间的距离小于某个距离(通信半径)时,自主体间有通信连接,否则没有.因此通信拓扑的连通保持本身就是一致性问题中一个很重要的问题.解决该问题的一种方法就是引入满足特定性质的势能函数 $V_{ij}: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ^[19,40,46]:

- $V_{ij}(x_i - x_j) = 0$ 当且仅当 $x_i = x_j$;
- $V_{ij}(x_i - x_j) \rightarrow \infty$ 当 $\|x_i - x_j\| \rightarrow d$, $V_{ij}(x_i - x_j) = \operatorname{const}$ 当 $\|x_i - x_j\| \geq d$;
- $\nabla V_{ij}(x_i - x_j) = 0$ 当且仅当 $x_i = x_j$,其中 d 是通信半径.令

$$V_i = \sum_{j=1}^N V_{ij}, \quad (18)$$

则对于一阶积分器自主体系统,可构造一致性协议

$$u_i = -\nabla V_i. \quad (19)$$

可以说明若连接拓扑初始连通,则该协议能保证拓扑一直连通,且可使自主体系统达到一致.常用的该类势能函数有

$$V_{ij}(x_i - x_j) = \frac{1}{d - \|x_i - x_j\|},$$

$$V_{ij}(x_i - x_j) = \tan\left(\frac{\pi\|x_i - x_j\|}{2d}\right),$$

$$V_{ij}(x_i - x_j) = \begin{cases} a_1\|x_i - x_j\|^2, & 0 < \|x_i - x_j\| < \mu, \\ \frac{a_2}{d^2 - \|x_i - x_j\|^2}, & \mu < \|x_i - x_j\| < d, \end{cases}$$

其中参数 a_1, a_2, μ 的选取使得 V_{ij} 对 $\|x_i - x_j\|$ 连续可微. 图3给出了一种连通保持函数.

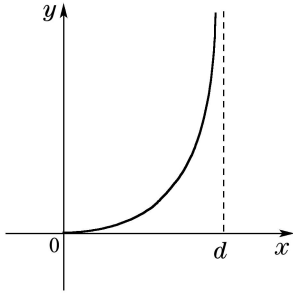


图 3 连通保持函数

Fig. 3 Connectivity preservation function

在上述非线性协议的基础上, Arcak 基于无源性方法提出了一种更一般的非线性协议^[47]:

$$u_i = \mathcal{H}_i\left\{-\sum_{j=1}^N a_{ij}\phi_{ij}(x_i - x_j)\right\}, \quad (20)$$

其中 $\phi_{ij}(\cdot)$ 是一个正定、径向无界函数 $P_{ij}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 的梯度函数, 即 $\phi_{ij}(\cdot) = \nabla P_{ij}(\cdot)$. 因而当 $y \neq 0$ 时, $y^T \phi_{ij}(y) > 0$. $\mathcal{H}_i\{\cdot\}$ 是一个满足无源性的静态或动态系统的输入输出模块. 当 $\mathcal{H}_i\{\cdot\}$ 是单位映射模块时, 协议(20)退化成式(13a)和式(19), 可见一致性协议(13a)和(19)是其特例.

还有一些其他形式的非线性一致性协议, 如基于采样量化的协议等^[48-50], 这里不再详细描述.

3) 非线性自主体系统的一致性协议.

相较于线性自主体系统的一致性协议设计, 非线性自主体系统的一致性协议设计复杂和困难得多, 且由于不同的非线性对象动态特性差异较大, 也很难有统一的设计方法. 因此, 本节将重点介绍三类非线性自主体系统的一致性协议, 并且不再刻意区分协议是线性的还是非线性的.

① 非完整小车系统.

Yamaguchi 和 Burdick, 以及 Lin 等考察了一种基于周期反馈控制策略的时变线性一致性协议^[29,51]

$$\begin{cases} v_i = k \sum_{j=1}^N a_{ij}(z_j - z_i)^T r_i, \\ \omega_i = f(t), \end{cases} \quad (21)$$

其中: $r_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$ 是小车前进方向上的单位

向量, $f(t)$ 是一个时变的周期函数, 如文献[29]中的 $f(t) = \cos t$. 可见小车的方向角是开环控制, 位置是闭环控制, 因此上述一致性协议仅能保证位置一致.

Dimarogonas 等则提出了一种基于势能函数的时不变非连续控制律来研究无向通信拓扑下多小车的聚集问题^[19]

$$\begin{cases} v_i = -\operatorname{sgn}\{\nabla V_{xi} \cos \theta_i + \nabla V_{yi} \sin \theta_i\} \cdot (\nabla V_{xi}^2 + \nabla V_{yi}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \omega_i = -(\theta_i - \theta_{nh_i}), \end{cases} \quad (22)$$

其中: $(\nabla V_{xi}, \nabla V_{yi})^T = \frac{\partial V_i(z)}{\partial z_i}$ 是势能函数 V_i 的梯度, V_i 的定义则由式(18)给出, 这里 $\theta_{nh_i} = \arctan 2(\nabla V_{yi}, \nabla V_{xi})$. 势能函数的引入使得该控制律在实现小车位置和方向一致的同时能实现通信拓扑的连通保持.

② 非完整链式系统.

受 Brockett 关于系统镇定的必要条件^[52]的启示, Dong 和 Farrell 提出了一种时变连续的输出一致性协议^[53]

$$\begin{cases} u_{i1} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_{j1} - x_{i1}) + \alpha e^{-\lambda t}, \\ u_{i2} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(y_{j2} - y_{i2}) + \sum_{k=3}^n (k-2)\lambda \mu_k y_{ik} + \left(\sum_{k=4}^n \mu_k y_{i,k-1}\right) \frac{u_{i1}}{e^{-\lambda t}} + \mu_3 \left(y_{i2} + \sum_{k=3}^n \mu_k y_{ik}\right) \frac{u_{i1}}{e^{-\lambda t}}, \end{cases} \quad (23)$$

其中: $y_{i2} = x_{i2} - \sum_{k=3}^n \mu_k y_{ik}$, $y_{ik} = \frac{x_{ik}}{e^{-(k-2)\lambda t}}$, $k \in [3, n]$, 系数 $\alpha, \lambda, \mu_3, \dots, \mu_n$ 为控制参数.

无向连接拓扑下自主体间的作用是相互的, 这就不同于镇定问题中自主体只具有单向作用关系. 因此无向连接拓扑下的一致性协议具有更大的灵活性, 在设计一致性协议时, Brockett 必要条件可能就不再是个约束. Zhai 等针对三状态的非完整链式系统提出了如下两个时不变连续状态反馈一致性协议^[54-55]:

$$\begin{cases} u_{i1} = k_1 \left[g_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_{j1} - x_{i1}) + g_3 x_{i2} \sum_{j=1}^N a_{ij} \{ (x_{j2} - x_{i2}) + (x_{j3} - x_{i3}) \} \right], \\ u_{i2} = k_2 \left[g_2 \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_{j2} - x_{i2}) + g_3 \sum_{j=1}^N a_{ij} \{ (x_{j2} - x_{i2}) + (x_{j3} - x_{i3}) \} \right], \end{cases} \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i1} = \frac{k}{x_{i2}^2 + 2} \left[2g_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_{j1} - x_{i1}) - \right. \\ \quad g_2 x_{i2} \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_{j2} - x_{i2}) + \\ \quad \left. g_3 x_{i2} \sum_{j=1}^N a_{ij} \{ (x_{j2} - x_{i2}) + (x_{j3} - x_{i3}) \} \right], \\ u_{i2} = \frac{k}{x_{i2}^2 + 2} \left[-g_1 x_{i2} \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_{j1} - x_{i1}) + \right. \\ \quad g_2 (x_{i2}^2 + 1) \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_{j2} - x_{i2}) + \\ \quad \left. g_3 \sum_{j=1}^N a_{ij} \{ (x_{j2} - x_{i2}) + (x_{j3} - x_{i3}) \} \right], \end{array} \right. \quad (25)$$

其中 $k, k_1, k_2, g_1, g_2, g_3 > 0$ 为控制参数。

③ 欧拉-拉格朗日系统。

无源性理论是非线性系统分析的一个有力工具, 通过定义新的输入输出变量, 可以说明欧拉-拉格朗日系统是无源性系统。基于这个性质, Chopra和Spong提出了如下的一致性协议^[56]:

$$\tau_i = -M_i(q_i)\lambda\dot{q}_i - C_i(q_i, \dot{q}_i)\lambda\dot{q}_i + g_i(q_i) + \sum_{j=1}^N a_{ij} K [(\dot{q}_j + \lambda q_j) - (\dot{q}_i + \lambda q_i)], \quad (26)$$

其中 $\lambda > 0$ 。

Krogstad, Ren等则提出了另一种不依赖于模型参数的PD型的一致性协议^[57-58]

$$\tau_i = g_i(q_i) + \sum_{j=1}^N a_{ij} K_{q_i} (q_j - q_i) + \sum_{j=1}^N a_{ij} K_{\dot{q}_i} (\dot{q}_j - \dot{q}_i) - K_i \dot{q}_i. \quad (27)$$

20世纪90年代, Chung和Slotine针对非线性系统提出了压缩分析方法, 并在2007年将该方法应用到欧拉-拉格朗日系统的一致性(也称同步)问题研究中^[59]。相较于前面两种协议, 这里通过选择合适的耦合增益可以得到指数收敛的结果。

3 一致性问题的基本结果(Fundamental results of consensus problems)

本节从一致性问题的研究分析方法入手, 对一致性问题相关结果进行总结, 然后阐述经典一致性算法的实质, 并进一步给出一种一致性协议的设计方法。与现有的综述文献^[6-8]主要介绍线性或线性化模型的一致性问题及相关的研究方法不同, 本文也将讨论介绍非线性一致性问题结果及其研究方法。

3.1 一致性问题的分析方法及结论(Analysis approaches and results of consensus problems)

随着一致性问题研究的逐渐深入, 自主体动态由

简单的线性动态延伸到非线性动态, 通信拓扑由简单的固定拓扑扩展到动态切换拓扑, 时延、丢包、噪声干扰等实际因素也考虑了进来。本节从一致性问题的分析方法入手, 对目前一致性问题的研究结果进行梳理和分类。

1) 基于图论和矩阵论的方法。

基于图论和矩阵论的分析方法依赖于两个重要概念—随机矩阵和随机矩阵的遍历性。所谓随机矩阵, 是指所有元素非负且行和为1的方阵。如果随机矩阵 M 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = \mathbf{1}_N c^T$, 其中 c 为某一列向量, 则称 M 是遍历的, 也有文献称之为不可分解且非周期的 (indecomposable and aperiodic)。

离散时间一阶积分器多自主体系统在线性一致性协议作用下可用方程 $x(k+1) = F(k)x(k)$ 来描述, 其中 $F(k)$ 是随机矩阵。如果 F 对应的拓扑是连通的, 则 F 是遍历的。对于连续时间一阶积分器动态, 在线性一致性协议作用下闭环系统方程可表示为 $x(t) = \Phi(t, 0)x(0)$, 其中 $\Phi(t, 0)$ 是负的Laplacian矩阵 $-L(t)$ 的状态转移矩阵。对任意的 t , $\Phi(t, 0)$ 是随机矩阵。同样地, 若对应的拓扑是连通的, 则矩阵 $\Phi(t, 0) = e^{-Lt}$ 也是遍历的^[60]。

引理 1(Wolfowitz 定理^[61]) 设 $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ 为遍历矩阵构成的有限集合, 且该集合满足对任一长度有限的序列 $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$, 其矩阵乘积 $S_{i_k} \dots S_{i_2} S_{i_1}$ 是遍历的。则对无穷序列 S_{i_1}, S_{i_2}, \dots , 存在列向量 c 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{i_k} \dots S_{i_2} S_{i_1} = \mathbf{1}_N c^T$ 。

对于连接拓扑任意切换的情形, 利用Wolfowitz定理, Jadbabaie等考察了线性Vicsek模型, 证明了如果存在一个关于时间间隔 $[t_i, t_{i+1})$ 的无穷序列, $[t_i, t_{i+1})$ 一致有界且连接拓扑在每个时间间隔内并图连通, 那么所有自主体最终将收敛到统一状态^[5]; Ren等将连接拓扑扩展到一般有向图的情形, 证明了如果在连续有界的时间间隔内连接拓扑的并图包含有向生成树, 则多自主体系统渐近一致^[30]。Cao等引入合成图的概念, 也获得了类似的结果^[62]。

2) 基于稳定性理论的分析方法。

对于多自主体系统, 采用一致性协议的目的是使得系统收敛到状态子空间 $\mathcal{S} = \{x : x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$, 因此可以用稳定性的相关理论来研究一致性问题。在利用稳定性理论来考察系统时, 通常有两种途径, 一种是先对系统进行处理, 将一致性问题转化为稳定性问题, 从而利用稳定性的相关结论来分析一致性问题; 另一种是直接选取Lyapunov函数, 然后利用Lyapunov稳定性定理或者是LaSalle不变集原理来分析系统收敛到一致子空间 \mathcal{S} 的条件。

① 系统变换法。

通过系统变换 $[x_s \ x_e]^T = Tx$, 多自主体系统的一

致性问题可以转化为降维子系统 x_e 的稳定性问题. 常见的系统变换形式有:

a) 标准变换及其他抽象变换.

T_1 : 使得 $T_1 L T_1^{-1}$ 为若当型的非奇异矩阵(若是无向拓扑, 则 T_1 是正交阵, $T_1 L T_1^{-1}$ 为对角阵); 或者 T_2 : 使得 $T_2 L T_2^H$ 为上三角阵的西阵(Shur变换); 或者更一般的 T_3 : 形如 $[\frac{1}{n} \mathbf{1}_n \quad \bar{T}_3]^T$ 的任一非奇异矩阵, 其中 $\bar{T}_3^T \mathbf{1}_N = 0$, 且 $\bar{T}_3^T \bar{T}_3 = I_{N-1}$.

b) 基于物理意义的变换.

主要是自主主体子系统间作差, 常见的形式有如下几种:

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, T_5 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) 两种系统变换比较.

在固定连接拓扑下这两种变换等价, 且各有优点. 基于标准型的系统变换数学意义明确, 在推导过程中形式简单明了, 而基于物理意义的系统变换物理意义更明确. 但在切换拓扑下, 采用基于物理意义的系统变换更合适, 因为基于标准型的变换直接依赖于拓扑, 此时无法找到一个非奇异变换使得所有连接拓扑的Laplacian矩阵都能化为若当型.

基于系统变换法, 线性系统的一致性得到了广泛的研究, 并获得了很好较好的结果. 据作者所知, 最早就一致性问题给出严格理论分析结果的可能是Yamaguchi和Arai, 其在1994年研究了多个移动机器人的队形控制问题^[20], 实质就是基于一致性的编队问题. 通过系统变换 T_4 , 作者说明了在强连通拓扑下, 一致性误差子系统 x_e 是Hurwitz稳定的. 推广到二阶及高阶系统, 多自主主体系统的一致性不仅与连接拓扑有关, 也与协议参数的选取有关. 对于二阶积分器自主主体系统, 在连接拓扑包含生成树的假设下, Lafferriere等利用劳斯判据以一组不等式的形式刻画出了可行协议参数的充要条件, 并给出了一组可行解的求解原则^[31](T_2 变换), Ren和Atkins则显式地给出了可行协议参数的一个充分性条件^[63](T_1 变换). 但是, 在一个很重要的问题就是, 在给定的连接拓扑下, 是否存在协议参数使得多自主主体系统达到一致, 即系统是否具有寻求一致的能力. Zhang和Tian在讨论离

散时间二阶积分器自主主体系统的一致性时回答了这个问题, 首次提出了可一致性的概念(consentability), 指出系统可一致的充要条件是连接拓扑包含生成树^[64](T_5 变换). 作者利用低增益方法给出了可行协议参数的一个充分条件, 并且将结果推广到Markov切换拓扑情形. Zhang和Tian还讨论了Bernoulli切换拓扑下连续时间二阶积分器自主主体系统基于采样数据的一致性^[49]. 受Zhang和Tian工作的启发, Zhu等利用劳斯判据显式地刻画出了一般二阶连续时间系统一致性的充要条件^[32]. 对于高阶线性时不变动态自主主体的一致性, 其结果大多可以统一在低增益和高增益镇定控制的框架下进行讨论^[25]. Fax和Murray在2004年揭示了基于动态输出反馈的多自主主体系统一致性问题等价于动态相同、输出分别被缩放了的Laplacian矩阵非零特征值倍的 $n-1$ 个子系统的同时稳定性^[36](T_2 变换). 基于特征多项式稳定性分析法, Wang等证明了无向连接拓扑下能同时镇定这 $n-1$ 个子系统的反馈增益的存在性^[65](T_2 变换). 对于右半平面没有极点的自主主体系统, Seo等利用低增益方法给出了有向连接拓扑下一个具体的动态输出反馈补偿器^[37](T_1 变换). 与文献[64]中的处理方法类似, Ma和Zhang则考察了更一般的高阶动态系统的可一致性问题^[35]. 作者揭示了可一致性问题和高增益镇定方法之间的联系, 并基于Riccati方程给出了高增益一致性协议的构造条件. 但高增益方法无法适用于离散系统, You和Xie给出了离散时间单输入单输出高阶自主主体系统可一致的充分必要条件^[66](T_1 变换). 针对离散时间多输入多输出自主主体, Zhang和Tian给出了系统可一致的一个充分条件, 且将结果推广到切换拓扑情形^[67](T_5 变换). 还有一些基于其他变换的结果, 可参看文献[68-70].

基于系统变换法, 并借助其他线性非线性分析工具, 一些非线性动态自主主体系统的一致性也得到了研究. 如对于非完整小车系统, Yamaguchi等基于周期反馈策略设计了一种时变光滑的线性一致性协议, 且借助平均化方法完成了系统的一致性分析^[29, 51]. 对于非完整链式系统, Dong和Farrell借助线性时变系统稳定性的相关理论, 也构造了一种时变连续一致性协议^[53].

② 直接Lyapunov函数法.

也有文献采用Lyapunov函数法来分析多自主主体系统的一致性. 对于无向连接拓扑下的一阶积分器自主主体, Olfati-Saber和Murray指出线性一致性协议是负梯度算法, 因此可通过考察Lyapunov函数 $V(x) = \frac{1}{2} x^T L x$ 来分析系统的一致性^[38]. 对于平衡连接拓扑, Moreau选择V函数 $V(x) = x^T x$, 计算可得 $\dot{x} = -x^T(L + L^T)x$. 作者证明对于平衡拓扑, 矩阵 $L + L^T$

半正定,进而若平衡连接拓扑含有生成树,则分析可得系统渐近一致^[71].实际上,在无向连接拓扑或者平衡连接拓扑下,平均状态 $x_{ave} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$ 是个不变量,因而若系统达到一致,则必收敛到平均值.所以也有不少文献通过考察函数 $V(x) = \|x - x_{ave} \mathbf{1}\|^2$ 来研究系统的一致性以及一致性性能问题. Olfati-Saber和Murray分析了系统的指数收敛性问题^[28], Hatano等讨论了Erdos-Renyi随机网络模型下的概率一致性问题^[72], Kas等则研究了信道含有噪声情况下系统的均方一致或者均方鲁棒一致性问题^[73-74].然而在有向连接拓扑下, V 函数的构造复杂得多.注意到函数 $\max\{x_1, \dots, x_N\}$ 是单调非增的, $\min\{x_1, \dots, x_N\}$ 是单调非减的,因此可以构造一个单调非增函数 $V(x) = \max\{x_1, \dots, x_N\} - \min\{x_1, \dots, x_N\}$.通过考察这样的 V 函数, Moreau讨论了有向连接拓扑任意切换时系统的一致性问题^[71], Porfiori则研究了Bernoulli随机切换拓扑下的概率一致性问题^[75], 而Munz等探讨了具有通信时延的非线性一致性问题^[76].对于离散时间一阶积分器自主系统, Moreau还提出了一种集值函数 $V(x_1, \dots, x_N) = (\text{conv}\{x_1, \dots, x_N\})^n$ ^[77], 这里 $\text{conv}\{x_1, \dots, x_N\}$ 表示由状态 x_1, \dots, x_N 构成的凸组合.作者证明若一致性协议满足严格凸条件,即一致性协议函数严格落在自己的状态以及邻居的状态构成的凸包的内部,则 $V(t)$ 是单调递减的,且系统状态渐近一致当且仅当存在 $T > 0$,使得对任意的时刻 t ,在时间间隔 $[t, t + T]$ 内所有连接拓扑的并包含生成树.对于连续积分器模型, Lin等通过切锥概念对上述条件作了类似的刻画^[78].而对于2.3节中列举的非线性一致性协议,通常也只能采用Lyapunov函数法来分析.针对特定的非线性协议形式,通过选取具体的 V 函数或者借助高级稳定性分析工具,计算 V 导数的负定性或半负定性从而得到系统一致的条件,如Arack利用无源性理论研究系统的一致性^[47].

对于非线性动态自主系统,更多的只能基于Lyapunov函数法来设计一致性协议,分析系统的一致性,且有时还需要借助更复杂的Lyapunov分析工具. Dimarogonas和Kyriakopoulos在2007年提出了一种基于势能函数的时不变非连续一致性控制律来考察小车的聚集问题^[19],分析主要基于非光滑Lyapunov理论,而势能函数的引入在实现小车聚集的同时还能保持通信拓扑的连通.针对三状态的低阶非完整链式系统, Zhai等直接基于Lyapunov函数法构造了两种时不变连续状态反馈一致性协议^[54-55].而对于欧拉-拉格朗日系统, Chopra和Spong通过定义新的输入和输出变量证明了系统的无源性,然后基于无源性理论提出了一种一致性协议并进行了分析^[56].与之相对的是Krogstad等直接基于物理意义提出的PD型的一致性

协议^[57-58].由于一致性误差系统不再是自治的,作者借助更为复杂的Matrosov定理来分析系统的一致性.

需要指出的是,基于直接Lyapunov方法的一致性协议设计与分析结果绝大多数都限于无向连接拓扑或者平衡连接拓扑,因为在这种情形下拓扑具有某种对称性质, Lyapunov函数更容易找到.

③ 频域分析法.

频域法是研究线性多自主系统一致性问题的另一个有效手段,尤其是在分析具有通信时延和输入时延的一致性时,以及异质自主系统的一致性时,通常可以获得分布式的、或者称为可扩展性的(scalable)检验条件.其主要思路是考察闭环系统的特征方程,利用频域判据分析特征根在复平面的分布情况,从而得到系统达到一致的条件.详细的结果可参考文献[25, 28, 79-85].

3) 分析方法小结.

在上述分析方法中,基于图论和矩阵论的分析方法可以完整的解决一阶积分器系统在任意切换拓扑和随机切换拓扑下的一致性时,从而得到较为不保守的结果,但是该方法很难运用到二阶积分器系统以及具有一般动态的系统.

相较于矩阵论和图论的分析方法,基于稳定性理论的分析方法应用得比较广泛.其中直接Lyapunov函数方法更适用于低阶系统,包括选取公共Lyapunov函数或者时变Lyapunov函数来分析切换拓扑下系统的一致性,构造Lyapunov Krasovskii函数或Lyapunov Razumikhin函数来研究时延系统收敛的条件.对于高阶系统, Lyapunov函数的选取则很困难.频域分析法只能处理线性动态多自主系统的一致性时,但通常可以获得分布式的检验条件,且保守性较小.而基于系统变换的分析方法在将一致性问题转化为稳定性问题后,可以直接借助成熟的稳定性理论来深入研究,包括最优控制理论、 H^∞ 控制理论等等.需要指出的是,系统变换分析法通常要求自主系统同质,否则子系统间做差(基于物理意义的变换)后无法转换成降阶系统,而直接Lyapunov函数法和频域方法则没有此要求,因而可以处理异质自主系统的一致性时.

3.2 经典一致性协议的实质(Essence of classical consensus protocol)

1) 无向拓扑情形.

对于最简单的一阶积分器模型

$$\dot{x}_i = u_i, \quad (28)$$

一致性协议最直观的构造就是使自主系统向着它的邻居运动.由于每个自主系统可能有不止一个邻居,因此用与邻居位置差信息的加权求和,即

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) \quad (29)$$

写成向量形式

$$\dot{x} = u = -Lx. \quad (30)$$

Olfati-Saber和Murray证明了如下结果:

定理 1^[38] 对于一阶积分器多自主体系统(28), 在无向通信拓扑下, 线性一致性协议(29)是负梯度算法.

作者定义了一个关于一致性偏差的线性二次型函数

$$V(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)^2.$$

对于无向连接拓扑, Laplacian矩阵 L 对称半正定, 且具有如下性质:

$$x^T Lx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)^2 = 2V(x),$$

因此有

$$u = -Lx = -\nabla V(x). \quad (31)$$

可见, 经典的一致性算法是负梯度算法.

实际上, 对于更一般的非线性一致性协议^[38]

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_{ij}(x_j - x_i), \quad (32)$$

其中连续函数 $\phi_{ij}(r)$, $i, j \in [1, N]$ 满足下列性质:

- a) $\phi_{ij}(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$;
- b) $r\phi_{ij}(r) > 0, \forall r \neq 0$;
- c) $\phi_{ij}(-r) = -\phi_{ji}(r)$.

则有如下结果:

定理 2 对于一阶积分器多自主体系统(28), 在无向通信拓扑下, 非线性一致性协议(32)也是负梯度算法.

证 构造一个关于一致性偏差的正定函数

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_0^{x_i - x_j} \phi_{ij}(\tau) d\tau,$$

则

$$\begin{aligned} \nabla V_i(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = \\ & \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_{ij}(x_i - x_j) - \sum_{j=1}^N a_{ji} \phi_{ji}(x_j - x_i) \right) = \\ & \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_{ij}(x_i - x_j) = -u_i, \end{aligned}$$

写成向量形式, 即

$$u = -\nabla V(x).$$

因此在无向连接拓扑下, 非线性一致性协议(32)也是负梯度算法. 定理2证毕.

2) 有向拓扑情形.

由前面的分析结果知, 无向连接拓扑下一致性协

议是负梯度算法, 那么在有向连接拓扑下, 一致性算法是否还是负梯度算法呢? 先考察最平凡的一致性问题—静态跟踪问题. 连接拓扑如图4所示, 其中自主体1是静态领导者, 自主体2是跟踪者.



图 4 两节点领导-跟随结构

Fig. 4 Leader-follower structure with two nodes

传统的线性一致性算法: $u_1 = 0, u_2 = x_1 - x_2$, 写成向量形式, 即

$$u = - \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

如果忽略加权系数, 一致性偏差的线性二次型函数有且仅有一种选择: $V(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$, 而

$$-\nabla V(x) = - \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \neq u, \quad (34)$$

可见有向连接拓扑下一致性协议不再是负梯度算法. 但是它是负的次梯度算法, 这一点可以从图5中看出, 向量 u 与向量 $-\nabla V(x)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

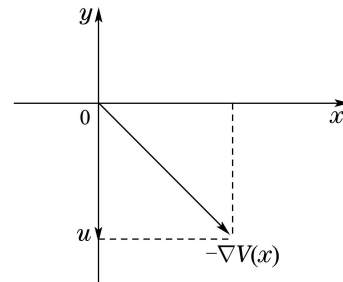


图 5 负的次梯度方向

Fig. 5 Direction of negative sub-gradient

对于一般的有向通信拓扑, 有如下结果:

定理 3 对于一阶积分器多自主体系统(28), 在有向通信拓扑下, 线性一致性协议(29)是负的次梯度算法.

先给出证明过程中将会用到的一个结论:

引理 1^[86] 对于任一Laplacian矩阵 L , 都存在一个对称正定阵 $P > 0$, 使得

$$L^T P + PL = Q \geq 0.$$

定理3的证明 根据引理1的结果, 可定义一个关于一致性偏差的线性二次型函数

$$V(x) = \frac{1}{2} (Lx)^T P(Lx), \quad (35)$$

则

$$\nabla V(x) = L^T PLx, \quad (36)$$

从而有

$$\begin{aligned} &< \nabla V(x), u > = \\ &< L^T PLx, -Lx > = -(Lx)^T PL(Lx) = \\ &-\frac{1}{2}(Lx)^T (L^T P + PL)(Lx) = \\ &-\frac{1}{2}(Lx)^T Q(Lx) \leq 0. \end{aligned}$$

这说明一致性协议 $u = -Lx$ 是一致性偏差函数 $V(x)$ 的负的次梯度. 定理3证毕.

与无向连接拓扑下自主体间的作用关系是相互的不同, 在有向拓扑结构下, 有些自主体间的作用关系是单向的, 这是一致性协议是负的次梯度算法而非负梯度算法的根本原因.

然而有向拓扑下非线性一致性协议是否也是负梯度算法, 本文目前还无法给出如定理3般明确的结论. 线性一致性协议情形可以借助引理1构造出满足要求的正定矩阵 P , 但对于非线性一致性协议情形, 很难一次性直接构造一个整体的Lyapunov函数, 进而计算它的梯度, 判别一致性协议向量是否是负次梯度方向.

3.3 一种一致性协议的设计方法 (A design approach of consensus protocol)

实际上在有向通信拓扑下, 各个自主体在一致性问题中所起的作用并不相同: 一部分自主体作为一个整体只在内部之间相互作用, 不接受其他自主体的信息, 如图6中的节点 $\{v_1, v_2, v_3\}$; 另一部分自主体作为一个整体, 除了内部间相互作用, 还接受其他自主体块的信息, 如节点 $\{v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8, v_9\}$. 借助图论中的基于强连分量的有向图分解技术, 这一性质可以得到刻画^[87]. 对应地, 若对节点重新编号, 则邻接矩阵可以写成块下三角形形式.

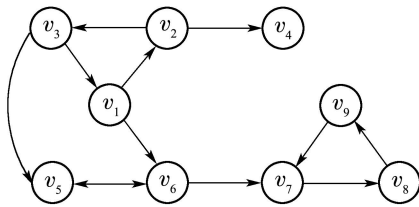


图6 有向连接拓扑

Fig. 6 A directed topology

基于上述性质, 并借助输入-状态稳定性理论, 这里给出另一种有向通信拓扑下一致性协议的设计结果.

考察自主体系统

$$\dot{X}_i(t) = G(t, X_i, U_i) \quad (37)$$

及分布式一致性协议

$$U_i(t) = H_i(t, X_i, X_j)_{j \in N_i}, \quad i = [1, n]. \quad (38)$$

定理4^[87] 假定有向通信拓扑是静态的且包含生成树. 若一致性协议满足下列两个条件, 则多自主体系统(37)–(38)可达到一致:

- a) 由所有根节点组成的子系统能全局渐近一致;
- b) 其他任何一个强连通子系统, 以它所跟踪的强连通子系统的状态作为输入是输入状态稳定的.

基于此给出如下协议设计方法:

步骤1 设计协议 U_1 使得根节点自主体系统达到一致, 这也是多自主体系统达到一致的必要条件;

步骤2 设计协议 $U_i, i \neq 1$ 使得其他任何一个强连通子系统满足输入状态稳定性条件.

注1 该结果主要依赖于这样一个客观事实: 多自主体系统的一致性状态仅由根节点自主体决定, 而其他自主体以强连通块为整体进行跟踪. 需要说明的是这是由通信拓扑唯一决定的, 与自主体自身动态以及所设计的一致性协议无关. 另一点需要说明的是与绝大多数文献中考察所有自主体都具有统一的一致性协议不同, 这里可以以每个强连通分量为基本单元, 根据不同需要设计不同的一致性协议, 只需满足ISS条件.

Lin等给出切锥条件来设计一致性协议^[78]. 尽管这两种方法都可以使自主体系统达到一致, 但在有些情形下, 得到的结果不同.

例1 考察一致性问题的平凡子问题——静态跟踪问题. 考察对象为以 x, y 为坐标轴的二维空间中的连续时间一阶积分器系统:

$$\dot{x}_2 = u_2 = f(x_1, x_2), \quad (39)$$

以及如下线性一致性协议:

$$u_2 = kR(\theta)(x_1 - x_2) = -kR(\theta)x_2 + kR(\theta)x_1, \quad (40)$$

其中: $x_1 \in \mathbb{R}^2$ 是静态领导者的状态, $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 是二维空间中的旋转矩阵. 根据Lin等的切锥条件, θ 应该为0(见图7). 事实上, 由本文的ISS条件可知任意的 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 都可行(见图8).

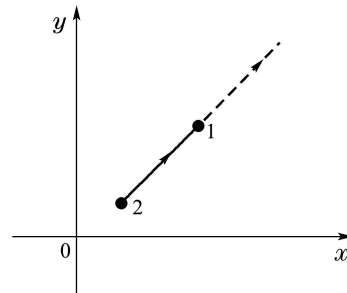


图7 切锥条件示意图

Fig. 7 Illustration of the tangent cone condition

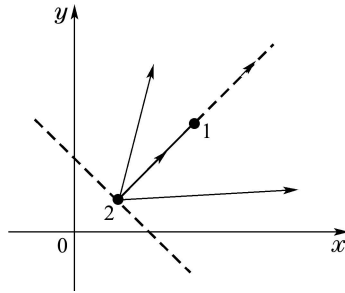


图8 ISS条件示意图

Fig. 8 Illustration of the ISS condition

4 结论与展望(Conclusion and research prospect)

一致性问题是多自主体系统协调控制的一个基本问题, 尤其是非线性一致性问题又是其中的难点. 本文从自主体动态模型、通信拓扑和一致性协议这3个方面详细介绍了线性及非线性一致性问题. 然后从一致性问题的研究分析方法入手, 对目前一致性问题的研究结果进行了分类和讨论. 接着阐释了在有向连接拓扑下经典一致性协议是负的次梯度算法这一实质, 并在此基础上给出了一种一致性协议的设计方法. 虽然国内外众多学者对多自主体系统线性及非线性一致性的研究已经取得了一系列重要进展, 但由于个体动态的复杂性以及通信网络的不确定性, 目前的研究成果还存在着很大的局限性, 很多有意义且具有挑战性的问题还需要进一步深入研究.

1) 其他非线性动态自主体系统的一致性问题.

目前, 线性多自主体系统的一致性问题研究得比较充分, 结果也相对比较成熟. 几类典型的非线性自主体系统, 如非完整链式系统、欧拉-拉格朗日系统, 也有一些研究结果. 但一些欠驱动力学系统、更一般的高阶非线性系统等, 其一致性问题的研究还远远不够, 甚至尚未涉及. 这些多自主体系统的一致性问题研究将是一个极大的挑战.

2) 通信网络对系统一致性的影响.

通信网络是多自主体系统协调控制中信息交互的载体. 由于网络物理连接和负载变化带来的通信延时与连接丢失, 因为自主体位置变化而引起的通信拓扑变化, 为了避免网络拥塞而采取的网络节点异步数据发送, 以及通信信道中不可避免的噪声干扰, 都会对多自主体系统的一致性产生很大的影响. 对于线性多自主体系统线性一致性协议的情形, 这些问题的研究与分析已经获得了较好的结果. 然而对于非线性一致性协议的情形, 以及非线性自主体系统线性、非线性协议的情形, 由于分析手段的缺乏, 研究结果还很少.

3) 一致性问题与其他问题的结合.

近年来, 一致性问题与其他问题的结合也是研究领域的一个方向, 尤其是一致性问题与非线性优化问题的结合近来已经成为控制领域一个新的研究热

点^[88-91]. 在这类问题中, 自主体综合应用一致性算法和某种优化算法(如目标投影法), 最终不仅达到一致, 而且获得某个目标函数的最优解或次优解. 如何探索一致性问题与其他新的问题的结合, 也是将来有待研究的方向.

参考文献(References):

- [1] REYNOLDS C W. Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model [J]. *Computer Graphics*, 1987, 21(4): 25 - 34.
- [2] VICSEK T, CZIROK A, BENJACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of selfdriven particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 - 1229.
- [3] LYNCH N A. *Distributed Algorithms* [M]. San Francisco, USA: Morgan Kaufmann Publishers, Inc, 1997.
- [4] TSITSIKLIS J N. *Problems in decentralized decision making and computation* [D]. Cambridge, USA: Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [5] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 - 1001.
- [6] REN W, BEARD R W, ATKINS E M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination [C] // *Proceedings of the 2005 American Control Conference*. Portland, USA: IEEE, 2005: 1859 - 1864.
- [7] 杨文, 汪小帆, 李翔. 一致性问题综述 [C] // 第25届中国控制会议论文集. 哈尔滨: 2006, 25: 1482 - 1486.
(YANG Wen, WANG Xiaofan, LI Xiang. A survey of consensus problem in multi-agent systems [C] // *Proceedings of the 25th Chinese Control Conference*. Harbin, China: IEEE, 2006: 1482 - 1486.)
- [8] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 - 233.
- [9] 林志赞, 颜钢锋. 多Agent系统一致性问题的非线性方法及结果 [J]. *系统工程理论与实践*, 2008, 28(Supp): 55 - 61.
(LIN Zhiyun, YAN Gangfeng. Agreement problem in multi-agent systems: nonlinear viewpoint [J]. *Systems Engineering Theory and Practice*, 2008, 28(Supp): 55 - 61.)
- [10] LINDSEY W C, GHAZVINIAN F, HAGMANN W C, et al. Network synchronization [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1985, 73(10): 1445 - 1467.
- [11] BARAHONA M, PECORA L M. Synchronization in small-world systems [J]. *Physical Review Letter*, 2002, 89(5): 054101-1 - 4.
- [12] ARENAS A, DIAZGUILERA A, KURTHS J, et al. Synchronization in complex networks [J]. *Physics Reports*, 2008, 469: 93 - 153.
- [13] OLFATI-SABER R, SHAMMA J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the 2005 European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 6698 - 6703.
- [14] YU W, CHEN G, WANG Z, et al. Distributed consensus filtering in sensor networks [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2009, 39(6): 1568 - 1577.
- [15] 王长城, 戚国庆, 李银伢, 等. 传感器网络一致性分布式滤波算法 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(12): 1645 - 1650.
(WANG Changcheng, QI Guoqing, LI Yinya, et al. Consensus-based distributed filtering algorithm in sensor networks [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(12): 1645 - 1650.)
- [16] CYBENKO G. Load balancing for distributed memory multiprocessors [J]. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 1989, 7(2): 279 - 301.
- [17] WANG X, ZHENG D Z. Load balancing control of furnace with multiple parallel passes [J]. *Control Engineering Practice*, 2007, 15(5): 521 - 531.

- [18] OLDATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [19] DIMAROGONAS D V, KYRIAKOPOULOS K J. On the rendezvous problem for multiple nonholonomic agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 916 – 922.
- [20] YAMAGUCHI H, ARAI T. Distributed and autonomous control method for generating shape of multiple mobile robot group [C] // *Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Munich, Germany: IEEE, 1994: 800 – 807.
- [21] REN W. Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2007, 1(2): 505 – 512.
- [22] 王银涛, 严卫生. 多自主水下航行器系统一致性编队跟踪控制 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(3): 379 – 384.
(WANG Yintao, YAN Weisheng. Consensus formation tracking control of multiple autonomous underwater vehicle systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 379 – 384.)
- [23] CHEN J, YU Q, ZHANG Y, et al. Feedback-based clock synchronization in wireless sensor networks: a control theoretic approach [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2010, 59(6): 2963 – 2973.
- [24] CHOI B J, LIANG H, SHEN X, et al. DCS: Distributed asynchronous clock synchronization in delay tolerant networks [J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2012, 23(3): 491 – 504.
- [25] TIAN Y P. *Frequency-Domain Analysis and Design of Distributed Control Systems* [M]. Singapore: Wiley-IEEE Press, 2012.
- [26] GODSIL C, ROYEL G. *Algebraic Graph Theory* [M]. New York, USA: Springer Verlag, 2001.
- [27] 方世昌. 离散数学(第3版) [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009.
(FANG Shichang. *Discrete Mathematics* [M]. Xi'an, China: Xidian University Press, 2009.)
- [28] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [29] LIN Z Y, FRANCIS B, MAGGIORE M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 121 – 127.
- [30] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [31] LAFFERRIERE G, WILLIAMS A, CAUGHMAN J, et al. Decentralized control of vehicle formations [J]. *System & Control Letters*, 2004, 54(9): 899 – 910.
- [32] ZHU J D, TIAN Y P, KUANG J. On the general consensus protocol of multi-agent systems with double-integrator dynamics [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2009, 431(5/6/7): 701 – 715.
- [33] XIE G M, WANG L. Consensus control for a class of networks of dynamic agents: fixed topology [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the 2005 European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 96 – 101.
- [34] TUUA S E. Synchronizing linear systems via partial-state coupling [J]. *Automatica*, 2008, 44(8): 2179 – 2184.
- [35] MA C Q, ZHANG J F. Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(5): 1263 – 1268.
- [36] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [37] SEO J H, SHIM H, BACK J. Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach [J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2659 – 2664.
- [38] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents [C] // *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, USA: IEEE, 2003: 951 – 956.
- [39] QING H, HADDAD W M. Distributed nonlinear control algorithms for network consensus [J]. *Automatica*, 2008, 44(9): 2375 – 2381.
- [40] XIAO F, WANG L, CHEN J. General distributed protocols for finite-time consensus of multi-agent systems [C] // *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and the 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, China: IEEE, 2009: 4741 – 4746.
- [41] REN W. On consensus algorithms for double-integrator dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1503 – 1509.
- [42] CORTES J. Achieving coordination tasks in finite time via nonsmooth gradient flows [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the 2005 European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 6376 – 6381.
- [43] CORTES J. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus [J]. *Automatica*, 2006, 42(11): 1993 – 2000.
- [44] XIAO F, WANG L. Reaching agreement in finite time via continuous local state feedback [C] // *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. Zhangjiajie, China: IEEE, 2007: 711 – 715.
- [45] WANG X, HONG Y. Finite-time consensus for multi-agent networks with second-order agent dynamics [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: IFAC, 2008, 15185 – 15190.
- [46] JI M, EGERSTEDT M. Connectedness preserving distributed coordination control over dynamic graphs [C] // *Proceedings of the 2005 American Control Conference*. Portland, USA: IEEE, 2005: 93 – 98.
- [47] ARCAK M. Passivity as a design tool for group coordination [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1380 – 1390.
- [48] KASHYAP A, BASAR T, SRIKANT R. Quantized consensus [J]. *Automatica*, 2007, 43(7): 1192 – 1203.
- [49] ZHANG Y, TIAN Y P. Consensus of data-sampled multi-agent systems with random communication delay and packet loss [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 939 – 943.
- [50] LIU S, LI T, XIE L H, et al. Sampled-data based average consensus with logarithmic quantizers [C] // *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*. Hefei, China: IEEE, 2012: 6141 – 6146.
- [51] YAMAGUCHI H, BURDICK J W. Time-varying feedback control for nonholonomic mobile robots forming group formations [C] // *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, USA: IEEE, 1998: 4156 – 4163.
- [52] BROCKETT R W. *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization* [M] // *Differential Geometric Control Theory*. Boston, USA: Birkhauser, 1983.
- [53] DONG W J, FARRELL J A. Cooperative control of multiple nonholonomic mobile agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1434 – 1448.
- [54] ZHAI G, TAKEDA J, IMAE J, et al. An approach to achieving consensus in nonholonomic systems [C] // *Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Yokohama, Japan: IEEE, 2010: 1476 – 1481.
- [55] ZHAI G, TAKEDA J, IMAE J, et al. Towards consensus in networked non-holonomic systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(10): 2212 – 2218.
- [56] CHOPRA N, SPONG M W. Passivity-based control of multi-agent systems [M] // *Advances in Robot Control: From Everyday Physics to Human-Like Movements*. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [57] KROGSTAD T R, GRACDAHL J T. 6-DOF mutual synchronization of formation flying spacecraft [C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, USA: IEEE, 2006: 5706 – 5711.

- [58] REN W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems [J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(11): 2137 – 2149.
- [59] CHUNG S J, SLOTINE J J E. Cooperative robot control and concurrent synchronization of Lagrangian systems [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, 25(3): 686 – 700.
- [60] REN W, BEARD R W, MCLAIN T W. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems [M] // *Cooperative Control, Lecture Notes in Control and Information Science*. Berlin: Springer-Verlag, 2005, 309: 171 – 188.
- [61] WOLFOWITZ J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1963, 14(5): 733 – 737.
- [62] CAO M, MORSE A S, ANDERSON B D O. Reaching a consensus in a dynamically changing environment- a graphical approach [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, 47(2): 575 – 600.
- [63] REN W, ATKINS E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10/11): 1002 – 1033.
- [64] ZHANG Y, TIAN Y P. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1195 – 1201.
- [65] WANG J, CHENG D, HU X. Consensus of multi-agent linear dynamic systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2008, 10(2): 144 – 155.
- [66] YOU K, XIE L H. Consensusability of discrete-time multi-agent systems via relative output feedback [C] // *Proceedings of the 11th International Conference on Control Automation, Robotics and Vision*. Singapore: IEEE, 2010: 1239 – 1244.
- [67] ZHANG Y, TIAN Y P. Maximum allowable loss probability for consensus of multi-agent systems over random weighted lossy networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2127 – 2132.
- [68] PORFIRI M, STILWELL D J, BOLLETT E M. Synchronization in random weighted directed networks [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2008, 55(10): 3170 – 3177.
- [69] LEE D J, SPONG M W. Stable flocking of multiple inertial agents on balanced graphs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1469 – 1475.
- [70] SUN Y G, WANG L. Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1607 – 1613.
- [71] MOREAU L. Stability of continuous-time distributed consensus algorithms [C] // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, USA: IEEE, 2004: 3998 – 4003.
- [72] HATANO Y, MESBAHI M. Agreement over random networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1867 – 1872.
- [73] KAR S, MOURA J. Sensor networks with random links: topology design for distributed consensus [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(7): 3315 – 3326.
- [74] WANG L, LIU Z X, GUO L. Robust consensus of multi-agent systems with noise [C] // *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. Zhangjiajie, China: IEEE, 2007: 737 – 741.
- [75] PORFIRI M, STILWELL D J. Consensus seeking over random weighted directed graphs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1767 – 1773.
- [76] MUNZ U, PAPACHRISTODOULOU A, ALLGOWER F. Nonlinear multi-agent system consensus with time-varying delays [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: IFAC, 2008: 1522 – 1527.
- [77] MOREAU L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(2): 169 – 182.
- [78] LIN Z Y, FRANCIS B, MAGGIORE M. State agreement for continuous-time coupled nonlinear systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, 46(1): 288 – 307.
- [79] LEE D, SPONG M W. Agreement with non-uniform information delays [C] // *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, USA: IEEE, 2006: 756 – 761.
- [80] LESTAS I, VINNICOMBE G. Scalable decentralized robust stability certificates for networks of interconnected heterogeneous dynamical systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(10): 1613 – 1625.
- [81] LESTAS I, VINNICOMBE G. The S-hull approach to consensus [C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA: IEEE, 2007: 182 – 187.
- [82] TIAN Y P, LIU C L. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2122 – 2128.
- [83] TIAN Y P, LIU C L. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1347 – 1353.
- [84] LESTAS I, VINNICOMBE G. Heterogeneity and scalability in group agreement protocols: Beyond small gain and passivity approaches [J]. *Automatica*, 2010, 46(7): 1141 – 1151.
- [85] TIAN Y P, ZHANG Y. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays [J]. *Automatica*, 2012, 48(6): 1205 – 1212.
- [86] ZHANG W, WANG Z, GUO Y. Backstepping-based synchronisation of uncertain networked Lagrangian systems [J]. *International Journal of Systems Science*, 2014, 45(2): 145 – 158.
- [87] XU Y, TIAN Y P. Design of a class of nonlinear consensus protocols for multi-agent systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(13): 1524 – 1536.
- [88] JOHANSSON B, KEVICZKY T, JOHANSSON M, et al. Subgradient methods and consensus algorithms for solving convex optimization problems [C] // *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, USA: IEEE, 2008: 4185 – 4190.
- [89] NEDIC A, OZDAGLAR A, PARRILO P A. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 922 – 938.
- [90] LOBEL I, OZDAGLAR A. Distributed subgradient methods for convex optimization over random networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1291 – 1306.
- [91] SHI G, JOHANSSON K H, HONG Y. Reaching an optimal consensus: dynamical systems that compute intersections of convex sets [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(3): 610 – 622.

作者简介:

许耀颢 (1985-), 男, 博士研究生, 研究方向为多自主系统一致性 & 非线性控制, E-mail: xuyaojin2003@163.com;

田玉平 (1964-), 男, 第2届(1995年)《关肇直奖》获奖论文作者, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为多机器人系统、网络化系统的资源优化与分布式控制、复杂系统控制理论与方法, E-mail: yptian@seu.edu.cn.