

共轴式无人直升机建模与鲁棒跟踪控制

袁夏明¹, 朱纪洪^{1†}, 毛漫²

(1. 清华大学 计算机科学与技术系, 北京 100084; 2. 上海机电工程研究所, 上海 201109)

摘要: 针对共轴式无人直升机非线性、强耦合的动力学特性, 本文提出了一种基于动态反馈线性化方法的鲁棒跟踪控制策略. 首先根据叶素理论、Pitt-Peters动态入流模型、上下旋翼气动干扰分析建立了共轴式无人直升机的数学模型. 然后对于高度-姿态子系统, 通过扩展状态变量对其进行了动态反馈线性化, 分析了零动态特性. 根据内环期望跟踪特性对解耦后的子系统进行极点配置. 通过设计鲁棒补偿器实现了对高度与姿态指令的鲁棒跟踪. 在此基础上, 针对水平面内的位置子系统设计了外环比例微分(proportional-derivative, PD)控制器以实现位置跟踪. 最后, 通过内环跟踪仿真验证了反馈线性化方法良好的解耦特性, 通过干扰条件下的轨迹跟踪仿真验证了所设计控制器具有较好的控制性能与鲁棒性.

关键词: 共轴式直升机; 反馈线性化; 鲁棒控制; 轨迹跟踪

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Modeling and robust tracking control for coaxial unmanned helicopter

YUAN Xia-ming¹, ZHU Ji-hong¹, MAO Man²

(1. Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
2. Shanghai Electro-Mechanical Engineering Institute, Shanghai 201109, China)

Abstract: To deal with the nonlinearity and coupling characteristics in dynamics of the coaxial unmanned helicopter, we propose a robust tracking control strategy via dynamic feedback linearization technique. According to the blade element theory, Pitt-Peters dynamic inflow model and the disturbance analysis of coaxial rotors, we build the mathematical model of a coaxial helicopter. On the height-attitude subsystem, a dynamic feedback linearization is performed through dynamic state augmentation, and the zero dynamic characteristic is analyzed. Poles are placed for the decoupled subsystems according to the desired performance of inner-loop dynamics. A robust complementary controller is employed to improve the robustness of height and attitude tracking. After that, an outer-loop proportional-derivative (PD) controller is designed for the planar position subsystem to realize trajectory tracking. Finally, the decoupling characteristic of feedback linearization is validated by tracking simulation of the inner loop, and the performance and robustness of the proposed controller for the whole system is also validated via trajectory tracking under disturbance.

Key words: coaxial helicopter; feedback linearization; robust control; trajectory tracking

1 引言(Introduction)

无人直升机能够垂直起降、定点悬停、灵活机动, 可以执行多种固定翼飞机所不易完成的军事、民用任务, 因此近十几年来受到了国内外的广泛关注^[1]. 作为一种典型布局形式, 共轴式无人直升机具有更加优良的悬停性能及相对较小的特征尺寸^[2]. 直升机动力学具有严重的非线性与强耦合特性, 而共轴式布局带来的上下旋翼间气动干扰使其航向与高度通道的耦合更为严重, 增大了对其进行动力学建模、分析与解耦控制设计的难度^[3].

共轴式无人直升机主要有两种布局形式. 第1种是靠差动变速进行航向操纵(或者称为固定桨距式)的微

型模型直升机, 因其体积小、机动灵活在近年来成为了研究热点, 文献[4-5]结合系统辨识技术对其进行了非线性建模, 并设计了 H_∞ 鲁棒控制器. 本文的研究对象采用差动变距进行航向机动, 属于第2种布局^[6]. 对于该类布局直升机的研究目前已经积累了大量的理论与工程经验, 国外的大多数文献主要集中在共轴式旋翼气动力建模与优化设计领域, Coleman曾系统总结了当时各国在共轴式直升机空气动力学方面的主要研究成果^[7]. 国内方面, 曹义华等建立了共轴式直升机机动飞行的逆仿真模型^[8], 陈铭等对半差动航向操纵的动态响应进行了分析^[9], 周国仪等研究了共轴式直升机的数学建模、配平及动态响应^[10]. 近期, 徐

冠峰、聂资、刘鹏等在非定常气动建模、特殊操纵响应、铰链力矩、耦合分析及系统辨识等方面开展了一系列的研究工作^[11-13]。传统的基于增益预置的线性控制方法无法很好地处理强非线性与耦合,因此基于反馈线性化^[14]、反步控制^[15]、滑模控制^[16]等非线性控制方法及基于智能控制^[17]的飞行控制设计近年来得到了学者们的高度重视。然而,尽管已有大量文献对无人直升机的控制设计进行了研究^[18-21],但遗憾的是针对该类布局共轴式直升机的控制问题相关文献很少。Dzul等曾对一种简化的共轴式直升机模型设计了基于反步法的跟踪控制器^[22],但该模型太过简单无法反映其航向与高度通道的严重耦合。

本文针对实验室在研的共轴式无人直升机,根据已有的共轴式旋翼空气动力学研究成果建立了适用于仿真验证与控制设计的简化非线性数学模型。该模型考虑了上下旋翼的相互干扰,能够较好地反映其航向、高度通道耦合特性。通过分析模型,将其分解为高度-姿态动力学与水平面内位置动力学两个子系统,采用内外环控制结构,外环采用比例微分(proportional-derivative, PD)控制实现位置控制。对于内环首先进行反馈线性化,通过扩展状态变量与坐标变换将非线性子系统进行精确线性化,然后根据设计要求配置极点,实现对高度、姿态指令的期望跟踪特性,最后设计鲁棒补偿器对模型摄动及外部扰动产生的不利影响进行抑制。

2 系统动力学模型(System dynamics)

实验室在研的小型共轴式无人直升机如图1所示。上下旋翼反向旋转,各自产生拉力与反扭矩。安装在平台上的4个舵机通过操纵机构控制上下旋翼桨距角进而改变气动力。输入为总距、差动变距、纵向周期变距及横向周期变距,分别用 $\theta_c, \theta_r, \theta_e, \theta_a$ 表示。本文中,用下标 u, l 分别表示对应于上、下旋翼的变量。总距、差动变距与上、下旋翼各自的总距 θ_u, θ_l 之间存在如下关系:

$$\theta_c = \frac{1}{2}(\theta_u + \theta_l), \theta_r = \frac{1}{2}(\theta_u - \theta_l). \quad (1)$$

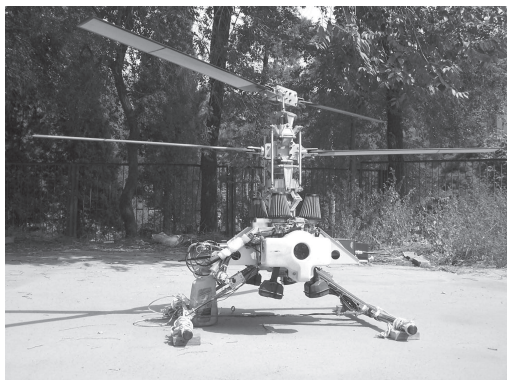


图1 在研共轴式无人直升机

Fig. 1 Coaxial unmanned helicopter under research

建模过程中涉及两个坐标系:当地地理坐标系 $O_e - x_e y_e z_e$ 的3轴分别指向正北、正东和垂直地面向下,在低空低速时可视为惯性坐标系;机体坐标系 $O_b - x_b y_b z_b$ 是以质心为原点的动坐标系, x 轴指向机头, z 轴指向机腹, y 轴由右手螺旋定则确定。

2.1 刚体运动学与动力学(Kinematics and dynamics of rigid body)

直升机位置、速度及所受合外力在当地地理坐标系中表示为 $\boldsymbol{p}^e = (p_x, p_y, p_z)^T$, $\boldsymbol{v}^e = (v_x, v_y, v_z)^T$ 及 $\boldsymbol{F}^e = (F_x, F_y, F_z)^T$ 。用欧拉角 $\boldsymbol{R} = (\phi, \theta, \psi)^T$ 描述机体坐标系与当地地理坐标系之间的相对转动关系,角速度矢量及所受合外力矩在机体坐标系中表示为 $\boldsymbol{\omega}^b = (p, q, r)^T$ 和 $\boldsymbol{M}^b = (L, M, N)^T$ 。六自由度运动方程如下:

$$\dot{\boldsymbol{v}}^e = \frac{1}{m} \boldsymbol{F}^e, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}^e = \boldsymbol{v}^e, \quad (3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^b = -\boldsymbol{J}^{-1} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega}^b + \boldsymbol{J}^{-1} \boldsymbol{M}^b, \quad (4)$$

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{C}_p \boldsymbol{\omega}^b, \quad (5)$$

其中: \boldsymbol{J} 为惯性矩阵,由于惯性积很小其近似为对角矩阵; $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})$ 为角速度矢量的斜对称矩阵;运动学转换矩阵为

$$\boldsymbol{C}_p = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi \sec \theta & c_\phi \sec \theta \end{bmatrix}.$$

用缩写 $c_\alpha, s_\alpha, t_\alpha, \sec \alpha$ 表示 $\cos \alpha, \sin \alpha, \tan \alpha, \sec \alpha$ 。

2.2 旋翼动力学(Rotor dynamics)

为建立能够反映共轴式直升机气动特性且适用于控制设计的简化模型,作如下假设:

假设1 认为桨叶为刚性,采用中心弹簧理论分析挥舞运动;忽略桨叶根部截断效应、桨尖损失与挥舞铰外伸量;不考虑非定常效应。

根据叶素理论,将方位角为 ψ_f 、径向位置为 r 处叶素的局部升力 l 与阻力 d 沿展向与周向积分,得到单副旋翼的拉力与扭矩为

$$T = \frac{N_b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (lc_\nu - ds_\nu) r dr d\psi_f, \quad (6)$$

$$Q = \frac{N_b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (ls_\nu + dc_\nu) r dr d\psi_f, \quad (7)$$

其中: N_b 为桨叶数, R 为旋翼半径,

$$\nu = \theta - \alpha = \arctan \frac{R\lambda}{r}, \quad (8)$$

θ 和 α 分别为叶素桨距角、局部迎角, λ 为叶素近似入流比:

$$\lambda = \lambda_{in} + \lambda_{fs} = \frac{v_{in}}{\Omega R} - \frac{w}{\Omega R}, \quad (9)$$

其中: Ω 为旋翼转速, v_{in} 为诱导速度, w 为机体速度

在 $O_b z_b$ 轴的分量, λ_{in} 和 λ_{fs} 为两者所对应的入流比.

共轴式旋翼的特殊之处在于上下旋翼之间存在气动干扰. 为反映该耦合特性, 采用 Pitt-Peters 动态入流方法对诱导速度建模. 该方法相比于涡流理论或计算流体动力学 (computational fluid dynamics, CFD) 方法具有计算量小、表达简洁的优点, 且与实验数据吻合较好, 因此在仿真与控制设计中被广泛采用. 其核心思想是将诱导速度的动态变化与气动力的变化通过一个 1 阶线性微分方程联系起来:

$$M\dot{\lambda}_{in} + VL^{-1}\lambda_{in} = C, \quad (10)$$

其中: $\lambda_{in} = (\lambda_0, \lambda_s, \lambda_c)^T$ 表示诱导入流比的时均、1 阶横向和 1 阶纵向分量, $C = (C_T, C_l, C_m)^T$ 为旋翼拉力、滚转力矩和俯仰力矩系数, M, V, L 分别为入流动力学的惯性矩阵、质量流量参数矩阵和静态传递矩阵.

将共轴式旋翼气动干扰特性建模为诱导速度的相互影响 ($i, j \in \{u, l\}, i \neq j$):

$$\lambda_i = \lambda_{in,i} + K_{ji}\lambda_{in,j} + \lambda_{fs}e_1, \quad (11)$$

$e_1 = (1, 0, 0)^T$, 各旋翼最终的入流比由 λ_i 表示, K_{ul}, K_{lu} 表示旋翼间诱导速度影响矩阵, 其参数与旋翼设计、飞行状态有关^[11]. 气动干扰显著影响了单副旋翼的气动效率, 一副旋翼桨距的变化会影响另一幅旋翼的气动特性, 使整个旋翼系统的拉力与扭矩动态变化过程更加复杂. 考虑到该特性主要影响总距与航向通道, 因此假设诱导速度在桨盘平面内均匀分布, 用时均分量 λ_0 近似表示, 影响矩阵简化为两个标量. 类似式 (1), 定义共轴旋翼系统的平均入流比和差动入流比如下:

$$\lambda_c = \frac{1}{2}(\lambda_u + \lambda_l), \quad \lambda_r = \frac{1}{2}(\lambda_u - \lambda_l). \quad (12)$$

由于上、下自动倾斜器通过 4 根等长拉杆连接, 空间指向一致, 因此将其等效为一副旋翼建立挥舞动力学简化模型:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + A_f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + B_f \begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta_a \end{bmatrix}. \quad (13)$$

状态矩阵与输入矩阵分别为

$$A_f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_f} \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_f} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_f} \end{bmatrix},$$

其中: a, b 分别为旋翼纵向、横向挥舞角, τ_f 为挥舞时间常数.

对上述各部分进行联立、积分可以得到如下入流动力学模型^[23] ($i, j \in \{u, l\}, i \neq j$):

$$\lambda_i = \lambda_{0,i} + K_{ji}\lambda_{0,j} + \lambda_{fs}, \quad (14)$$

$$\dot{\lambda}_{0,i} = k_4(-k_1\theta_i + k_2\lambda_{0,i}\lambda_i + k_3\lambda_i), \quad (15)$$

及单个旋翼的拉力系数与扭矩系数:

$$C_{Ti} = k_5\left(\frac{1}{3}\theta_i - \frac{1}{2}\lambda_i\right), \quad (16)$$

$$C_{Qi} = \lambda_i C_{Ti} + k_7 C_d. \quad (17)$$

整个旋翼系统的拉力与扭矩为

$$T = T_u + T_l = k_6(C_{Tu} + C_{Tl}) = k_6 C_T, \quad (18)$$

$$Q = Q_u - Q_l = k_8(C_{Qu} - C_{Ql}) = k_8 C_Q. \quad (19)$$

各系数为

$$k_1 = \frac{\sigma a_0}{45}, \quad k_2 = \frac{4}{15}, \quad k_3 = \frac{\sigma a_0}{30},$$

$$k_4 = \frac{-45\pi\Omega}{16}, \quad k_5 = \frac{\sigma a_0}{2},$$

$$k_6 = \rho A \Omega^2 R^2, \quad k_7 = \frac{\sigma}{8}, \quad k_8 = k_6 R,$$

其中: c 为桨叶弦长, A 为桨盘面积, a_0 为翼型升力线斜率, C_d 为翼型阻力系数, $\sigma = (N_b c)/(\pi R)$ 为桨盘展度, ρ 为空气密度.

此外, 考虑旋翼挥舞刚度, 得到滚转与俯仰通道的桨毂力矩^[24]如下:

$$L_{hub} = k_9 b, \quad M_{hub} = k_9 a, \quad (20)$$

其中: $k_9 = (N_b S_\beta \gamma I_\beta \Omega^2)/8$, I_β 为桨叶挥舞惯量, S_β 为旋翼刚度系数, γ 为桨叶洛克数.

2.3 力与力矩合成 (Composition of forces and moments)

分别将力矢量 F 与力矩矢量 M 表示到地理坐标系和机体坐标系, 可以得到

$$F^e = C_b^e(T_u^b + T_l^b) + mg^e, \quad (21)$$

$$M^b = \tau^b + r_u^b \times T_u^b + r_l^b \times T_l^b, \quad (22)$$

其中:

$$T_i^b = (-s_a c_b, c_a s_b, -c_a c_b)^T T_i, \quad (23)$$

$$\tau^b = (L_{hub}, M_{hub}, 0)^T + Q^b, \quad (24)$$

$$Q^b = (s_a c_b, -c_a s_b, c_a c_b)^T Q, \quad (25)$$

r_u 和 r_l 为上、下旋翼中心距质心的位置矢量, g^e 为重力加速度矢量. 矢量在机体坐标系与地面坐标系之间转换通过欧拉转换矩阵实现:

$$C_b^e = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}.$$

从所建模型容易看出共轴式直升机的控制难点在于: 两副旋翼对于 4 个通道的控制作用无主次之分, 相比常规单旋翼带尾桨布局直升机而言其高度与航向通道耦合更加严重. 在考虑旋翼间气动干扰对入流动力学的影响后, 其力与力矩的动态变化过程更复杂, 在直升机本体动力学的非线性之外进一步叠加了控制力产生过程的严重非线性, 同时也加重了耦合问题.

3 高度-姿态子系统解耦设计(Decoupling design of height-attitude subsystem)

上节所建立的共轴式直升机模型在一定条件下可以看作是高度-姿态子系统与位置子系统的级联,前者与后者相比具有更高的动态,在实际操纵时多通过对姿态的控制以实现对其平面位置的调节.同时,由旋翼动力学引入的气动耦合、刚体动力学引入的惯性耦合等主要耦合因素主要存在于高度-姿态子系统,因此本节将首先基于反馈线性化方法对其进行解耦设计,通过非线性坐标变换与反馈将其转换为线性系统.为改善鲁棒性,在下一节中通过极点配置与鲁棒补偿器设计实现对高度-姿态的鲁棒跟踪,结合外环控制最终实现位置与航向跟踪.

3.1 模型分析(Model analysis)

高度-姿态子系统的状态变量、输入及输出变量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (p_z, v_z, \phi, \theta, \psi, p, q, r, \lambda_{0,u}, \lambda_{0,l}, a, b)^T, \\ \boldsymbol{\delta} &= (\theta_c, \theta_r, \theta_e, \theta_a)^T, \\ \mathbf{y} &= (p_z, \psi, \theta, \phi)^T. \end{aligned}$$

用状态空间模型表达:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (26)$$

其中输入方程与状态方程可以表示为

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3 \ \mathbf{g}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}k_{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(k_{19} + k_{20}) & \frac{1}{3}(k_{19} - k_{20}) & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(k_{21} + k_{22}) & \frac{1}{3}(k_{21} - k_{22}) & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}k_{23}\lambda_r & \frac{2}{3}k_{23}\lambda_c & 0 & 0 \\ -k_1k_4 & -k_1k_4 & 0 & 0 \\ -k_1k_4 & k_1k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_f} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_{12}]^T =$$

$$\begin{bmatrix} v_z \\ k_{18}\lambda_c + g \\ p + qs_\phi t_\theta + rc_\phi t_\theta \\ qc_\phi - rs_\phi \\ (qs_\phi + rc_\phi)se_\theta \\ k_{13}qr + k_9k_{12}b - \frac{1}{2}(k_{19}\lambda_u + k_{20}\lambda_l) \\ k_{15}pr + k_9k_{14}a - \frac{1}{2}(k_{21}\lambda_u + k_{22}\lambda_l) \\ k_{17}pq - 2k_{23}\lambda_c\lambda_r \\ k_2k_4\lambda_{0,u}\lambda_u + k_3k_4\lambda_u \\ k_2k_4\lambda_{0,l}\lambda_l + k_3k_4\lambda_l \\ -q - \frac{a}{\tau_f} \\ -p - \frac{b}{\tau_f} \end{bmatrix}.$$

为简化表示定义系数如下:

$$\begin{aligned} k_{10} &= r_u^b(3), \quad k_{11} = r_l^b(3), \\ k_{12} &= \frac{1}{I(1,1)}, \quad k_{13} = \frac{I(2,2) - I(3,3)}{I(1,1)}, \\ k_{14} &= \frac{1}{I(2,2)}, \quad k_{15} = \frac{I(3,3) - I(1,1)}{I(2,2)}, \\ k_{16} &= \frac{1}{I(3,3)}, \quad k_{17} = \frac{I(1,1) - I(2,2)}{I(3,3)}, \\ k_{18} &= \frac{1}{m}k_5k_6c_\phi c_\theta, \\ k_{19} &= k_5k_{12}(k_8\lambda_u a + k_6k_{10}b), \\ k_{20} &= k_5k_{12}(-k_8\lambda_l a + k_6k_{11}b), \\ k_{21} &= k_5k_{14}(-k_8\lambda_u b + k_6k_{10}a), \\ k_{22} &= k_5k_{14}(k_8\lambda_l b + k_6k_{11}a), \\ k_{23} &= k_5k_8k_{16}. \end{aligned}$$

对仿射非线性模型(26)推导其解耦矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} L_f L_{g_1} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ L_f L_{g_1} h_2 & L_f L_{g_2} h_2 & 0 & 0 \\ L_f L_{g_1} h_3 & L_f L_{g_2} h_3 & 0 & 0 \\ L_f L_{g_1} h_4 & L_f L_{g_2} h_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中:

$$\begin{aligned} i &\in \{1, 2\}, \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i(j), \quad L_f L_{g_1} h_1 = g_{12}, \\ L_f L_{g_1} h_2 &= g_{i6} + g_{i7}s_\phi t_\theta + g_{i8}c_\phi t_\theta, \\ L_f L_{g_1} h_3 &= g_{i7}c_\phi - g_{i8}s_\phi, \\ L_f L_{g_1} h_4 &= g_{i7}s_\phi se_\theta + g_{i8}c_\phi se_\theta. \end{aligned}$$

由于该矩阵奇异,高度-姿态子系统不存在关系度,主要原因是由于挥舞动力学的引入,导致横、纵向周期变距操纵的作用没有显现于解耦矩阵中.一个直观的处理方法是增加状态变量,使总距与变距操纵在

微分过程中“延迟”出现,这也是动态反馈线性化的基本思想^[25].

3.2 解耦设计(Decoupling design)

通过对模型分析,引入与高度通道和偏航通道控制输入积分相关的扩展状态变量^[26],依次对高度通道、偏航通道与横纵向通道进行反馈线性化.

步骤 1 高度通道设计.

高度的2阶导数为

$$\ddot{p}_z = -\frac{2}{3}k_{18}\theta_c + k_{18}\lambda_c + g. \quad (28)$$

设计扩展状态 $\xi_1 = \dot{p}_z$, $\dot{\xi}_1 = u_1$,使高度通道控制输入作用延迟1阶出现,反推得到总距为

$$\theta_c = -\frac{3(\xi_1 - g - k_{18}\lambda_c)}{2k_{18}}. \quad (29)$$

步骤 2 偏航通道设计.

偏航动力学及角加速度方程为

$$\ddot{\psi} = (\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\psi}s_\theta + \dot{q}s_\phi + \dot{r}c_\phi)se_\theta, \quad (30)$$

$$\dot{p} = f_6 + g_{16}\theta_c + g_{26}\theta_r, \quad (31)$$

$$\dot{q} = f_7 + g_{17}\theta_c + g_{27}\theta_r, \quad (32)$$

$$\dot{r} = f_8 + g_{18}\theta_c + g_{28}\theta_r. \quad (33)$$

将式(32)–(33)代入式(30),得到

$$\ddot{\psi} = \eta_0 + \eta_{0c}\theta_c + \eta_{0r}\theta_r, \quad (34)$$

其中:

$$\eta_0 = (\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\psi}s_\theta + (f_7s_\phi + f_8c_\phi))se_\theta,$$

$$\eta_{0c} = (g_{17}s_\phi + g_{18}c_\phi)se_\theta,$$

$$\eta_{0r} = (g_{27}s_\phi + g_{28}c_\phi)se_\theta.$$

设计扩展状态 $\xi_2 = \dot{\psi}$, $\dot{\xi}_2 = u_2$,解得差动变距为

$$\theta_r = \frac{\xi_2 - \eta_0 - \eta_{0c}\theta_c}{\eta_{0r}}. \quad (35)$$

步骤 3 共轴式旋翼拉力与扭矩动态规律分析.

在常规单旋翼带尾桨布局直升机中,主旋翼与尾桨的控制作用相对独立,尾桨除产生侧力以提供偏航操纵力矩以外,对其他通道影响不大.在共轴式直升机中,所需拉力和偏航力矩由两副主旋翼配合产生,与桨距角呈现复杂的非线性关系,高度与偏航通道严重耦合.进一步地,考虑旋翼间气动干扰对入流动力学的影响,其动态变化规律也更加复杂.在后续的纵、横向解耦设计中,需要对旋翼拉力系数、扭矩系数的动态变化规律进行求解.

由式(12)(16)(18)可以解得平均入流比变化率 $\dot{\lambda}_c$ 与旋翼拉力系数变化率 \dot{C}_T 的关系.对式(29)求导,与上述关系进行联立可以解得

$$\dot{C}_T = C_T(\dot{\phi}t_\phi + \dot{\theta}t_\theta) - \frac{m}{k_6}u_1se_\phi se_\theta. \quad (36)$$

旋翼拉力系数与扭矩系数变化率存在如下关系:

$$\begin{cases} \dot{C}_T = \dot{C}_{T_u} + \dot{C}_{T_l}, \\ \dot{C}_Q = \lambda_u \dot{C}_{T_u} - \lambda_l \dot{C}_{T_l} + k_Q, \end{cases} \quad (37)$$

其中 $k_Q = \dot{\lambda}_u C_{T_u} - \dot{\lambda}_l C_{T_l}$,由此可以将单个旋翼拉力系数的变化率表示为

$$\begin{cases} \dot{C}_{T_u} = \frac{\dot{C}_Q - k_Q + \lambda_l \dot{C}_T}{2\lambda_c}, \\ \dot{C}_{T_l} = \frac{-\dot{C}_Q + k_Q + \lambda_u \dot{C}_T}{2\lambda_c}. \end{cases} \quad (38)$$

步骤 4 纵向通道微分.

俯仰角、滚转角的2阶导数为

$$\ddot{\theta} = \dot{q}c_\phi - \dot{r}s_\phi - \dot{\phi}\dot{\psi}c_\theta, \quad (39)$$

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}c_\theta + \dot{p} + \xi_2 s_\theta. \quad (40)$$

该式中没有显含周期变距,继续求得

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= (\ddot{q} - \dot{r}\dot{\phi})c_\phi - (\ddot{r} - \dot{q}\dot{\phi})s_\phi - \\ &(\ddot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\phi}\ddot{\psi})c_\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\dot{\psi}s_\theta, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= (\ddot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\theta}\ddot{\psi} + \xi_2\dot{\theta})c_\theta - \\ &(\dot{\theta}^2\dot{\psi} + u_2)s_\theta + \ddot{p}. \end{aligned} \quad (42)$$

式(41)中包含未知的俯仰角速度2阶导数,由系统状态方程知其包含纵向挥舞角变化率,因此首先对式(32)求导,与式(38)联立得

$$\ddot{q} = \eta_{10} + \eta_{1Q}\dot{C}_Q + \eta_{1a}\dot{a} + \eta_{1b}\dot{b}, \quad (43)$$

其中:

$$\begin{aligned} \eta_{10} &= k_{15}(p\dot{r} + r\dot{p}) + \frac{k_{14}k_{16}a}{2\lambda_c}[(k_{10}\lambda_1 + \\ &k_{11}\lambda_u)\dot{C}_T - (k_{10} - k_{11}k_Q)], \\ \eta_{1Q} &= \frac{k_{14}k_{16}}{2\lambda_c}(k_{10} - k_{11})a - k_{14}b, \\ \eta_{1a} &= k_{14}[k_6(k_{10}C_{T_u} + k_{11}C_{T_l}) + k_9], \\ \eta_{1b} &= -k_{14}k_8C_Q. \end{aligned}$$

观察发现待求解的俯仰角3阶导数中包含 \ddot{r} ,将偏航角速度作为桥梁,对式(30)求得

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \\ &\dot{\phi}(\dot{r}t_\phi - \dot{q}) + [(u_2 - \dot{\theta}^2\dot{\psi})c_\theta - \\ &(2\dot{\theta}\xi_2 + \dot{\psi}\ddot{\theta})s_\theta - \dot{\theta}\ddot{\phi} - \ddot{\theta}\dot{\phi}]se_\phi - \dot{q}t_\phi = \\ &\eta_{20} - \dot{q}t_\phi. \end{aligned} \quad (44)$$

对式(33)求导并与上式联立,得到 \dot{C}_Q 与 \dot{q} 的关系:

$$\begin{aligned} \dot{C}_Q &= \\ &\frac{1}{k_8k_{16}}[\eta_{20} - k_{17}(\dot{p}q + \dot{q}p)] - \frac{1}{k_8k_{16}}t_\phi\dot{q} = \\ &\eta_{30} + \eta_{3q}\dot{q}. \end{aligned} \quad (45)$$

将上式代入式(43),最终得到用 \dot{a} , \dot{b} 表示的俯仰角

速度2阶导数方程:

$$\ddot{q} = \frac{1}{1 - \eta_{1Q}\eta_{3Q}} (\eta_{10} + \eta_{1Q}\eta_{30} + \eta_{1a}\dot{a} + \eta_{1b}\dot{b}) = f_{q0} + f_{qa}\dot{a} + f_{qb}\dot{b}. \quad (46)$$

将式(44)(46)代入式(41), 得到

$$\ddot{\theta} = f_{q0}se_{\phi} - \dot{r}\dot{c}_{\phi} + (\dot{q}\dot{\phi} - \eta_{30})s_{\phi} - (\ddot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\phi}\ddot{\psi})c_{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi}s_{\theta} + f_{qa}se_{\phi}\dot{a} + f_{qb}se_{\phi}\dot{b} = f_{\theta0} + f_{\theta a}\dot{a} + f_{\theta b}\dot{b}. \quad (47)$$

步骤5 横向通道微分.

按照相似的处理方法, 对式(31)微分, 代入式(38)(45), 整理得

$$\ddot{p} = \eta_{40} + \eta_{4q}\ddot{q} + \eta_{4a}\dot{a} + \eta_{4b}\dot{b}, \quad (48)$$

其中:

$$\begin{aligned} \eta_{40} &= \frac{k_6k_{12}b}{2\lambda_c} [k_{10}(\lambda_1\dot{C}_T - k_Q + \eta_{30}) + k_{11}(\lambda_u\dot{C}_T + k_Q - \eta_{30})] + k_{13}(\dot{q}r + q\dot{r}), \\ \eta_{4q} &= \frac{k_{12}}{2\lambda_c} [2\lambda_c a + k_6(k_{10} - k_{11})b]\eta_{3q}, \\ \eta_{4a} &= k_{12}k_8C_Q, \\ \eta_{4b} &= k_{12}(k_6k_{10}C_{Tu} + k_6k_{11}C_{Tl} + k_9). \end{aligned}$$

将式(46)代入式(48), 得到

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= \eta_{40} + \eta_{4q}f_{q0} + (\eta_{4a} + \eta_{4q}f_{qa})\dot{a} + (\eta_{4b} + \eta_{4q}f_{qb})\dot{b} = \\ &= f_{p0} + f_{pa}\dot{a} + f_{pb}\dot{b}. \end{aligned} \quad (49)$$

将上式代入式(42), 得到滚转角3阶导数为

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= (\ddot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\theta}\ddot{\psi} + \xi_2\ddot{\theta})c_{\theta} - (\dot{\theta}^2\dot{\psi} + u_2)s_{\theta} + \\ &= f_{p0} + f_{pa}\dot{a} + f_{pb}\dot{b} = \\ &= f_{\phi0} + f_{\phi a}\dot{a} + f_{\phi b}\dot{b}. \end{aligned} \quad (50)$$

步骤6 纵横向通道设计.

综合式(13)(47)(50), 可以得到滚转、俯仰通道的输入输出关系:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta_a \end{bmatrix}, \quad (51)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m &= \begin{bmatrix} f_{\theta0} \\ f_{\phi0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{\theta a} & f_{\theta b} \\ f_{\phi a} & f_{\phi b} \end{bmatrix} \left(\mathbf{A}_f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \right), \\ \mathbf{B}_m &= \begin{bmatrix} f_{\theta a} & f_{\theta b} \\ f_{\phi a} & f_{\phi b} \end{bmatrix} \mathbf{B}_f. \end{aligned}$$

令 $u_3 = \ddot{\theta}$, $u_4 = \ddot{\phi}$, 得到周期变距输入

$$\begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta_a \end{bmatrix} = \mathbf{B}_m^{-1} \left(\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - \mathbf{A}_m \right). \quad (52)$$

至此, 通过6步对该子系统实现了动态反馈线性化. 前两步分别处理总距与航向通道, 解得的总距、差动变距及控制输入作为已知变量用于后续推导; 步骤3建立了共轴式旋翼拉力、扭矩分配的动态规律, 所得结果是纵横向通道分析的必要基础; 步骤4-5分别对俯仰、滚转通道进行反馈线性化, 通过偏航角速度作为桥梁得到俯仰通道3阶导数解析表达, 然后将其结果用于滚转通道线性化中; 步骤6给出了完整的纵横向3阶导数表示. 在不考虑模型摄动的情况下, 输入 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ 到输出 \mathbf{y} 为解耦的3次积分器串联关系.

3.3 零动态分析(Zero dynamics analysis)

为保证上述反馈线性化过程不出现奇异, 对分母及解耦矩阵的特性进行分析: 在常规飞行中滚转角与俯仰角不会出现接近90°的情况, 因此式(29)(35)(46)及 se_{ϕ} , se_{θ} 项均不会出现奇异 ($\eta_{3Q}\eta_{4q}$ 远小于1); 在下降加速度小于重力加速度时, 即不考虑旋翼负拉力的情况, 诱导速度不会反向, 保证了式(38)和式(48)有解; $f_{\phi a}f_{\theta b}$ 接近0, 而 $f_{\phi b}f_{\theta a}$ 的量级在 10^4 以上, 因此矩阵 \mathbf{B}_m 满秩. 以上条件保证了控制器解算过程不会出现奇异问题.

综合上述分析, 经过动态扩展的系统具有关系度向量 (3, 3, 3, 3), 但系统有14个状态变量, 因此有2个内部变量, 需要对其组成的内动态进行稳定性分析. 为保证输出及其各阶导数为零, 系统状态方程中的刚体动力学、挥舞动力学均为平衡态, 系统的内动态为入流动力学. 在悬停点附近线性化, 解算得到其特征根为 -36.8623, -1.6095, 零动态稳定, 由此证明了其高度-姿态子系统可以通过动态反馈线性化进行解耦控制.

4 鲁棒跟踪控制器设计(Robust tracking controller design)

系统的跟踪指令为 p_{xd} , p_{yd} , p_{zd} , ψ_d . 首先, 设计PD控制器, 根据水平速度与俯仰角、滚转角的关系, 对水平位置误差进行比例微分处理, 得到内环俯仰角、滚转角参考输入, 经3阶指令滤波器得到俯仰角、滚转角指令, 结合高度与偏航指令构成内环输入

$$\mathbf{y}_d = (p_{zd}, \psi_d, \theta_d, \phi_d)^T.$$

指令滤波器为

$$G_f(s) = \frac{c}{s^3 + as^2 + bs + c}. \quad (53)$$

针对上节得到的线性化模型, 考虑模型摄动情况, 结合经典的线性系统设计方法与鲁棒补偿思想, 设计内环鲁棒跟踪控制器, 得到内环控制输入 \mathbf{u} , 最后根据式(29)(35)(52)得到实际控制输入 δ . 控制器结构如图2所示.

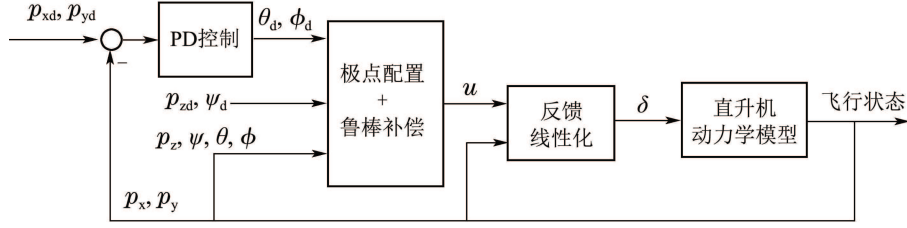


图 2 控制系统结构框图

Fig. 2 Structure diagram of the control system

高度-姿态子系统经过非线性坐标变换映射 \$\Phi(\cdot)\$ 得到新的状态变量:

$$\Phi(x, \xi_1, \xi_2)^T = (y, \dot{y}, \ddot{y}, \eta)^T, \quad (54)$$

其中: \$\eta\$ 为内部变量, 已证明内动态为渐进稳定. 内环跟踪误差向量 \$z = (z_1, z_2, z_3)^T\$ 定义为

$$z_1 = y - y_d, \quad z_2 = \dot{y} - \dot{y}_d, \quad z_3 = \ddot{y} - \ddot{y}_d,$$

其中: \$y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d\$ 为内环跟踪指令及其各阶导数. 经过动态反馈线性化解耦后的线性系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = u + \Delta. \end{cases} \quad (55)$$

等效扰动 \$\Delta\$ 包括模型摄动、外部干扰以及期望指令的 3 阶导数. 为提高系统鲁棒性, 本文采用如下方法对反馈线性化后的系统进行控制设计. 首先采用成熟的线性系统综合方法设计状态反馈控制器, 镇定内环跟踪误差; 其次, 为消除由不可测反馈带来的静差, 设计了带宽足够高的 1 阶低通滤波器生成高阶微分反馈以代替解析求导; 最后, 针对等效扰动项设计鲁棒补偿器^[27]. 内环控制输入由如下两部分组成:

$$u = u^0 + u^{RC}. \quad (56)$$

\$u^0\$ 针对标称线性系统设计, 采用极点配置方法, 期望的各子系统闭环传递函数特征多项式如下:

$$D_i(s) = (s^2 + 2\zeta_i\omega_{ni}s + \omega_{ni}^2)(T_i s + 1), \quad (57)$$

\$i = 1, 2, 3, 4\$ 分别对应高度、航向、俯仰与滚转通道. 基于此, 状态反馈矩阵 \$K_i\$ 设计为

$$\det(sI - A_i + B_i K_i) = D_i(s), \quad (58)$$

其中:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

定义 \$z^i = (z_1(i), z_2(i), z_3(i))^T\$, 标称控制输入:

$$u_i^0 = -K_i z^i. \quad (59)$$

补偿输入项 \$u^{RC}\$ 采用如下表达式:

$$u^{RC} = -F(s)\Delta(s), \quad (60)$$

其中补偿滤波器 \$F(s)\$ 设计为

$$F(s) = \text{diag}\{F_1(s), F_2(s), F_3(s), F_4(s)\}, \quad (61)$$

$$F_i(s) = \frac{f_i^3}{(s + f_i)^3} \frac{g_i}{s + g_i}. \quad (62)$$

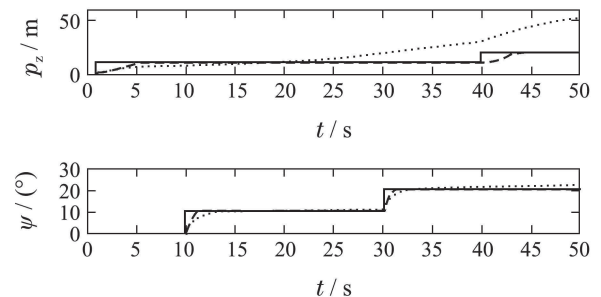
滤波器阶次根据对象阶次与舵机动态决定, 取为 4 阶, 等效扰动项由式(55)反推得到, 补偿器参数设计过程参见文献[28].

5 仿真分析(Simulation analysis)

在 MATLAB 环境下对所设计控制器进行仿真验证. 为检验解耦设计效果, 首先对该子系统进行小扰动线性化, 设计 LQR 最优控制器, 将其控制效果与基于反馈线性化的非线性控制效果进行对比. 内环子系统期望闭环特性根据式(57)设计如下:

$$\begin{aligned} T &= (1, 0.2, 0.1, 0.1)^T \text{ s}, \\ \zeta &= (0.7, 0.7, 0.9, 0.9)^T, \\ \omega_n &= (1, 10, 10, 10)^T \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

不考虑模型摄动与外部扰动, 两种方法的控制结果如图 3 所示. 前 10 s 为高度调节, 欧拉角均保持为 0; 在第 10 s 给定小角度阶跃指令, 可以看到此阶段两种控制器均可以实现良好的高度与姿态解耦跟踪; 第 20 s 开始给定较大角度的姿态指令, 此时由于强耦合与严重非线性的存在, 线性控制效果变差, 高度与航向均难以保持. 相比而言, 由于反馈线性化能够对非线性模型进行准确的线性化处理, 使其在不考虑模型摄动的情况下可以在较大飞行包线内获得良好的跟踪效果.



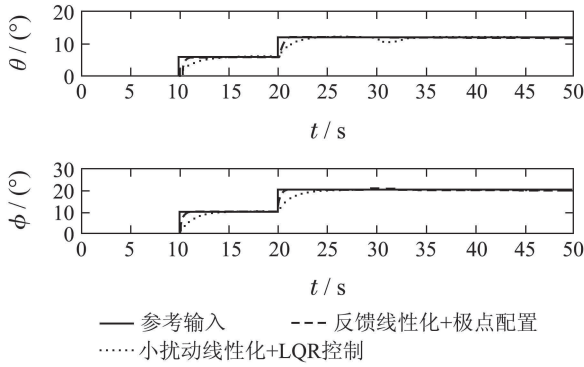


图3 高度与姿态控制

Fig. 3 Control of altitude and attitude

考虑模型摄动与外部干扰, 设计鲁棒补偿器参数为: $f_i = 80, g_i = 50, i = 1, 2, 3, 4$.

外环控制器的比例、微分系数分别为

$$k_p^\phi = -k_p^\theta = -0.05043, k_d^\phi = -k_d^\theta = -0.1828.$$

指令滤波器参数选择为: $a = 28, b = 280, c = 1000$. 直升机的初始位置与姿态: $p_0^e = (0, 0, 0) m, R_0 = (0, 0, 0) rad$. 预定轨迹设定为

$$p_d^e = (5\sin(0.1t + \frac{\pi}{4}), 3\cos(0.2t), 10)^T,$$

要求跟踪过程中保持航向不变.

仿真结果如图4-7所示. 在仿真中考虑了带位置约束条件的舵机动力学, 并将干扰分为惯性参数摄动、气动参数摄动与力/力矩扰动3类, 前10s为理想模型, 之后每隔10s加入一类扰动. 首先加入10 kg载荷, 根据载荷所在位置计算得到3轴惯性矩增量为 $(1.3, 1, 0.5) kg \cdot m^2$; 然后加入气动参数摄动, 笔者分别对旋翼间气动影响因子 K_{ul} 和 K_{lu} 拉偏+10%和-10%; 最后加入力与力矩干扰.

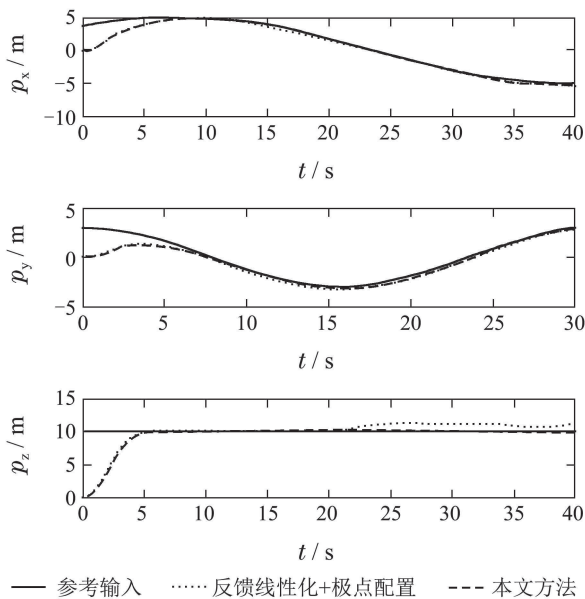


图4 轨迹跟踪仿真-位置

Fig. 4 Trajectory tracking simulation-position

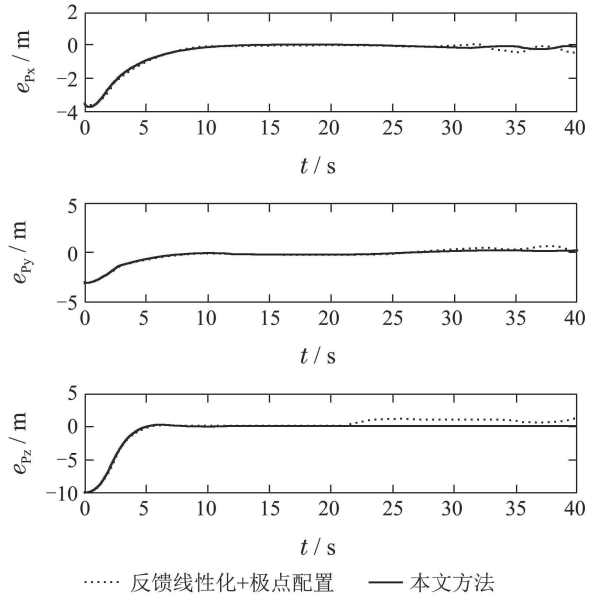


图5 轨迹跟踪仿真-位置误差

Fig. 5 Trajectory tracking simulation-position error

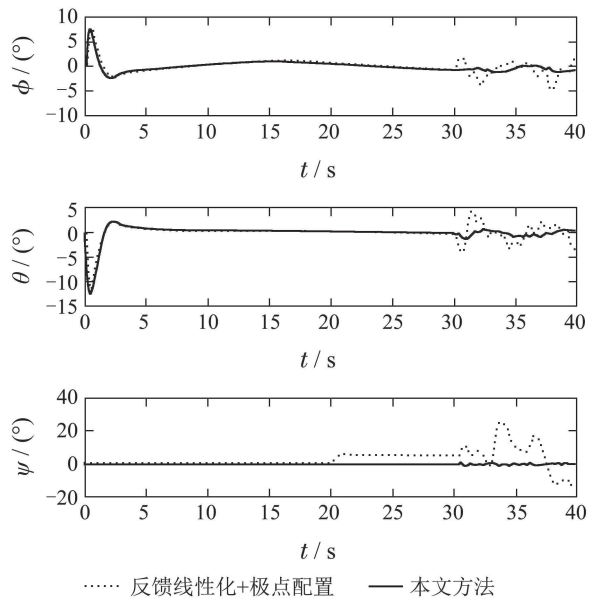
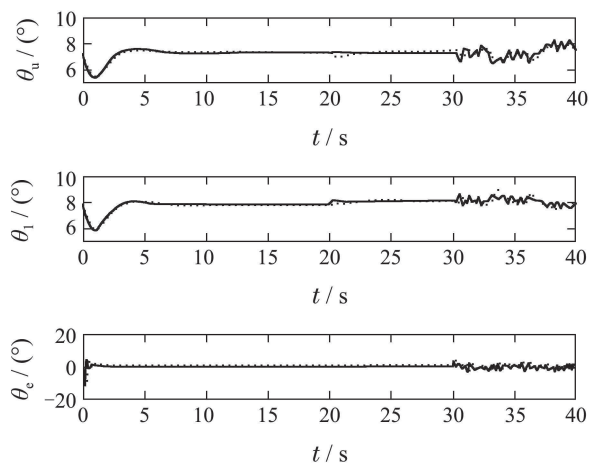


图6 轨迹跟踪仿真-欧拉角

Fig. 6 Trajectory tracking simulation-Euler angles



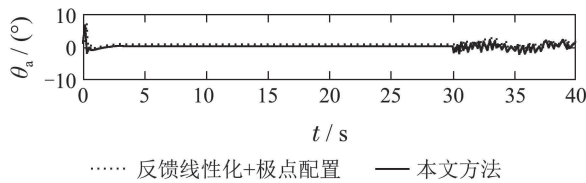


图 7 轨迹跟踪仿真-控制输入

Fig. 7 Trajectory tracking simulation-control input

由图4-7的仿真结果可以看到, 采用反馈线性化方法能够有效解除各通道间耦合, 实现较好的轨迹跟踪, 其中惯性参数摄动对其控制效果影响不大, 但气动参数摄动与力/力矩干扰会明显降低控制器的鲁棒性, 尤其对于耦合严重的高度与航向通道, 跟踪效果变差. 本文所提方法有效地改善了鲁棒性, 在存在多种模型不确定性的情况下, 仍能较好地跟踪期望轨迹, 同时避免了姿态出现较大振荡.

6 总结(Conclusion)

本文针对一类共轴式无人直升机动力学模型设计了基于反馈线性化的鲁棒轨迹跟踪控制器. 结合已有的共轴式旋翼系统气动建模成果, 本文建立了能够反映共轴式直升机旋翼间气动干扰耦合特性的动力学模型. 对于高度-姿态子系统, 首先通过扩展状态变量对该子系统进行了动态反馈线性化, 分析了系统零动态的稳定性; 然后对解耦后的子系统进行了极点配置, 通过设计鲁棒补偿器改善鲁棒性; 最后通过设计外环PD控制实现了轨迹跟踪. 仿真结果表明, 所设计控制器具有良好的解耦特性, 在存在多种模型不确定性情况下, 仍具有较好的跟踪性能与鲁棒性.

参考文献(References):

[1] CAIG W, CHEN B M, LEE T H. *Unmanned Rotorcraft Systems* [M]. London, British: Springer, 2010: 1 - 18.

[2] 陈铭. 共轴双旋翼直升机的技术特点及发展 [J]. 航空制造技术, 2009(17): 26 - 31.
(CHEN Ming. Technology characteristic and development of coaxial rotor helicopter [J]. *Aeronautical Manufacturing Technology*, 2009(17): 26 - 31.)

[3] 徐冠峰, 陈铭. 基于自由尾迹的共轴式直升机总距/航向解耦分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2011, 37(2): 249 - 252.
(XU Guanfeng, CHEN Ming. Decoupling analysis between yaw and collective pitch controls of coaxial helicopter using free wake arithmetic [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2011, 37(2): 249 - 252.)

[4] SCHAFFROTH D, BERMES C, BOUABDALLAH S, et al. Modeling, system identification and robust control of a coaxial micro helicopter [J]. *Control Engineering Practice*, 2010, 18(7): 700 - 711.

[5] FANKHAUSER P, BOUABDALLAH S, LEUTENEGGER S, et al. Modeling and multivariable control techniques for small coaxial helicopters [C] // *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Portland, Oregon: AIAA, 2011: 1 - 21.

[6] 袁夏明, 朱纪洪, 陈志刚, 等. 一种共轴式直升机操纵机构的运动学建模与分析 [J]. 航空学报, 2013, 34(5): 988 - 1000.
(YUAN Xiaming, ZHU Jihong, CHEN Zhiqiang, et al. Kinematic modeling and analysis of a coaxial helicopter's actuating mechanism [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2013, 34(5): 988 - 1000.)

[7] COLEMAN C P. A survey of theoretical and experimental coaxial rotor aerodynamic research [R]. California, NASA-TP-3675, 1997.

[8] CAO Y H, REICHERT G. Nonlinear inverse simulation for the maneuvering flight of coaxial rotor helicopters [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 1997, 10(4): 239 - 246.

[9] 陈铭, 胡继忠, 曹义华. 共轴式直升机半差动航向操纵的动态响应分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2002, 28(5): 524 - 527.
(CHEN Ming, HU Jizhong, CAO Yihua. Dynamic response analysis of direction control for semi-differential coaxial helicopter [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2002, 28(5): 524 - 527.)

[10] 周国仪, 胡继忠, 曹义华, 等. 共轴式直升机飞行动力学仿真数学模型研究 [J]. 航空学报, 2003, 24(4): 293 - 295.
(ZHOU Guoyi, HU Jizhong, CAO Yihua, et al. Research on a mathematical model for coaxial helicopter flight dynamics [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2003, 24(4): 293 - 295.)

[11] 徐冠峰. 基于非定常气动模型的共轴式直升机特殊操纵响应研究 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2011.
(XU Guanfeng. *Investigation of the special control response of the coaxial helicopter based on the unsteady aerodynamic model* [D]. Beijing: Beihang University, 2011.)

[12] 聂资, 陈铭, 徐冠峰. 总距突增时共轴式直升机瞬态操纵响应分析 [J]. 航空动力学报, 2011, 27(3): 521 - 527.
(NIE Zi, CHEN Ming, XU Guanfeng. Dynamic response analysis of a small-scale coaxial helicopter to a rapid collective pitch increase [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2011, 27(3): 521 - 527.)

[13] 刘鹏, 蒙志君, 武哲. 基于DE算法的共轴直升机模型辨识及精度分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2012, 38(7): 971 - 975.
(LIU Peng, MENG Zhijun, WU Zhe. Coaxial helicopter model identification based on differential evolution algorithm and accuracy analysis [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2012, 38(7): 971 - 975.)

[14] REHMAN O U, PETERSEN I R, FIDAN B. Feedback linearization-based robust nonlinear control design for hypersonic flight vehicles [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2012, 227(1): 3 - 11.

[15] XU B, SUN F, LIU H, et al. Adaptive kriging controller design for hypersonic flight vehicle via back-stepping [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(4): 487 - 497.

[16] VEGA L L, TOLEDO B C, LOUKIANOV A G. Robust block second order sliding mode control for a quadrotor [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(2): 719 - 739.

[17] XU B, WANG D W, SUN F C, et al. Direct neural discrete control of hypersonic flight vehicle [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 70(1): 269 - 278.

[18] RAPTIS I A, VALAVANIS K P, VACHTSEVANOS G J. Linear tracking control for small-scale unmanned helicopters [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 20(4): 995 - 1010.

[19] 孙秀云, 方勇纯, 孙宁. 小型无人直升机的姿态与高度自适应反步控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(3): 381 - 388.
(SUN Xiuyun, FANG Yongchun, SUN Ning. Backstepping-based adaptive attitude and height control of a small-scale unmanned helicopter [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(3): 381 - 388.)

[20] 周洪波, 裴海龙, 贺跃帮, 等. 状态受限的小型无人直升机轨迹跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 778 - 784.
(ZHOU Hongbo, PEI Hailong, HE Yuebang, et al. Trajectory-tracking control for small unmanned helicopter with state constraints [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 778 - 784.)

- [21] PIETER A, ADAM C, ANDRW Y N. Autonomous helicopter aerobatics through apprenticeship learning [J]. *International Journal of Robotics Research*, 2010, 29(13): 1 - 31.
- [22] DZUL A, HAMEL T, LOZANO R. Modeling and nonlinear control for a coaxial helicopter [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. New York: IEEE, 2002.
- [23] 宋宝泉. 小型无人直升机非线性建模与控制算法研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2010.
(SONG Baoquan. *Nonlinear modeling and controller design of a small-scaled unmanned helicopter* [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2010.)
- [24] PADFIELD G D. *Helicopter Flight Dynamics: the Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling* [M]. Washington, USA: Blackwell, 2007: 33 - 42.
- [25] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems* [M]. London, British: Springer, 1995: 249 - 263.
- [26] SONG B Q, LIU Y H, FAN C Z. Feedback linearization of the nonlinear model of a small-scale helicopter [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, 8(3): 301 - 308.
- [27] LIU H, LU G, ZHONG Y. Robust LQR attitude control of a 3-DOF laboratory helicopter for aggressive maneuvers [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, 60(10): 4627 - 4636.
- [28] ZHONG Y S. Robust output tracking control of SISO plants with multiple operating points and with parametric and unstructured uncertainties [J]. *International Journal of Control*, 2002, 75(4): 219 - 241.

作者简介:

袁夏明 (1985-), 男, 博士研究生, 目前研究方向为无人直升机建模与飞行控制, E-mail: summersbright@126.com;

朱纪洪 (1968-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行控制与导航、鲁棒控制与非线性控制, E-mail: jhzhu@mail.tsinghua.edu.cn;

毛漫 (1989-), 女, 助理工程师, 目前研究方向为机械设计及自动化, E-mail: 303285587@qq.com.