

镇定网络化线性系统的数据率定理

游科友^{1,†}, 谢立华²

(1. 清华大学 自动化系, 北京 100084; 2. 南洋理工大学 电气与电子工程学院, 新加坡 639798)

摘要: 传统控制理论研究如何利用反馈信息实现控制目标, 且通常假定通信链路的物理局限性对控制系统没有显著影响. 通信理论研究如何将信息从信道的一端可靠地传输到另一端, 但忽略传输信息的具体用途. 因此, 控制和通信在过去是两门相对独立发展的学科. 网络化控制系统的涌现促使研究者综合利用控制和通信理论来刻画反馈通信网络对控制系统的影响. 本文回顾了基于数字通信网络的离散线性系统的可镇定性问题. 特别地, 基于信息理论的控制方法, 讨论了镇定网络化线性系统所需的最低通信数据率问题. 结果表明, 最低数据率本质上取决于闭环系统的拓扑熵率.

关键词: 网络化系统; 镇定性; 数据率; 通信信道

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Data rate theorems for stabilization of networked linear systems

YOU Ke-you^{1,†}, XIE Li-hua²

(1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. School of Electrical and Electronic Engineering, Nanyang Technological University, Singapore 639798, Singapore)

Abstract: Traditional control theory is concerned with using information in a feedback loop, and usually assumes that limitations in communication links do not significantly affect the control systems. Communication theory studies how to reliably transmit messages from one point to another, regardless of the usage of the transmitted messages. Thus, control and communication have evolved as separate subjects. The emergence of networked control systems brings together the ideas from both control and communication theories to study how the feedback networks affect the control systems. In this work, we discuss the stabilization problem of a discrete-time linear dynamical system over a digital communication channel. In particular, we focus on the minimum information rate for stabilization of a networked linear system from the information-theoretic approach. It is shown that the topological entropy of the system imposes a fundamental limitation on the information rate for stabilization.

Key words: networked system; stabilization; data rate; communication channel

1 引言(Introduction)

经典控制理论(如建立在频率法和根轨迹法等基础上的理论^[1])通常假定从传感器到控制器和从控制器到执行器之间所交换的信息具有无限精度. 但基于数字计算机运算平台的控制系统对该假设提出了挑战. 在这样的系统中, 系统的模拟输出和控制输入信号必须降低到有限字长或离散符号才能在计算机上进行存储、处理和传输等. 从而, 研究的重心从经典控制理论转移到数字控制技术. 需要额外考虑的问题包括有效的采样机制、有限字长和相位滞后补偿等.

至今, 数字控制技术已相对成熟^[2]. 但传统控制系统常建立在点对点的有线链路上, 并不能满足当前对模块化、分散控制、综合诊断、快速和易维修、低成本等方面的需求. 随着通信、传感、计算等多项技术的快速发展, 建立基于无线链路的大规模网络化控制系

统变得可行, 并引起了国内外大量学者的深入研究^[3-4].

与传统控制系统相比, 网络化控制系统的各个组成单元利用实时通信网络交换信息. 由于网络的物理局限性, 只能交换有限字长的信息. 在某些恶劣的通信环境下, 如基于水声通信的控制系统, 网络带宽可能极其有限, 允许传输的信息字长非常有限. 因此, 需要将连续取值(无限字长)的系统状态或/和输出减少到有限字长. 这种将连续取信号离散化的过程被称为量化. 显然, 量化程度越严重(即量化输出个数越少), 信号的分辨率越低, 对闭环系统的性能影响越大. 量化控制就是研究在反馈回路中具有这种模拟-数字转换机制的控制系统的设计与分析问题.

量化控制的研究可追溯到20世纪50年代的数字控制理论. 本文重点介绍近年来关于量化控制的一些新

的研究方法, 如基于信息理论的方法, 讨论了基于数字信道的网络化线性时不变系统的镇定性问题. 基于其他相关理论的网络控制新方法, 如基于网络理论的控制方法、基于图论的控制方法等可参见文[5].

在第2节中, 介绍量化的概念. 在第3节中, 用标量系统具体解释传统量化反馈控制方法的局限性, 从而需要发展新的量化反馈控制方法, 并进一步说明基于信息理论的量化反馈控制方法的优越性. 在第4和5节中, 分别讨论在无噪和有噪信道下镇定网络化线性系统的数据率定理. 第6节总结全文, 并展望未来研究方向.

2 量化(Quantization)

假定 $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为一连续信号. 首先对其周期性采样, 得到离散时间信号 $\{x(kh)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. 为恢复原始信号 $x(t)$, 采样频率 $1/h$ 必须大于原信号 $x(t)$ 的奈奎斯特频率(Nyquist frequency). 然后, 对采样信号 $x_k := x(k\tau)$ 进行量化, 将其转换为量化的离散信号 x_k^q , 即

$$x_k^q := Q(x_k) \in \{q^1, \dots, q^M\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

这里, 映射 $Q(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 就称为一个无记忆的静态量化器. 因量化后的信号 x_k^q 可以取 M 个不同的值, 故需要 $\lceil \log_2 M \rceil$ 比特(bit)的字长来表示量化输出 x_k^q .

满足

$$R^i := \{x \in \mathbb{R}^n | Q(x) = q^i\}$$

且 $\bigcup_{i=1}^M R^i = \mathbb{R}^n$ 的集合称为量化区域. 故量化器完全由量化输出 q^i 和相对应的量化区域 R^i 来决定. 量化误差定义为

$$n_k := x_k - x_k^q.$$

若 $\{x_k\}$ 是一独立同分布的随机过程, 对于均方量化误差最小的最优量化器 Q^* , 即

$$Q^* \in \operatorname{argmin}_Q E[\|x_k - x_k^q\|^2], \quad (2)$$

其量化输出和量化区域须同时满足以下两必要条件^[6]:

- a) q^i 是区域 R^i 的“重心”, 即 $q^i = E[x_k | x_k \in R^i]$;
- b) 就近原则, 即若 $x \in R^i$, 则对任意的 $j \in \{1, \dots, M\}$ 有

$$\|x - q^i\| \leq \|x - q^j\|.$$

通常无法给出最优量化器的显式形式. 但利用上述两性质, 可以设计数值算法得到较好的次优量化器, 如 Lloyd 算法^[6]. 容易验证, 满足上述两性质的量化器的量化误差是无偏的, 并与输出 x_k^q 无关, 即

$$E[n_k] = 0, E[(x_k^q)n_k^T] = 0.$$

如果上述最优量化器的量化区域较小, 则相应的量化误差变化也不大. 故传统量化控制方法把量化误

差建模为近似均匀分布的加性随机噪声.

两种常见的量化器^[6]包括: a) 均匀量化器, 其绝对量化误差一致有界; b) 对数量化器^[7], 其相对量化误差一致有界.

3 量化反馈控制方法(Quantized feedback control)

考虑以下线性时不变离散随机系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad y_k = Cx_k + v_k. \quad (3)$$

其中: (A, B, C) 是系统矩阵, 并满足可镇定性和可检测性; $x_k \in \mathbb{R}^n, u_k \in \mathbb{R}^m$ 和 $y_k \in \mathbb{R}^p$ 分别表示系统的状态、控制输入和输出向量; $w_k \in \mathbb{R}^n$ 和 $v_k \in \mathbb{R}^p$ 分别表示过程扰动和量测噪声. 为避免显而易见的情形, 假定 A 是不稳定的, 即 A 至少存在一个不在单位圆内的特征根.

在网络化控制系统中, 传感器与控制器和控制器与执行器利用通信网络来实现信息交换, 如图1所示. 传感器与控制器之间的通信链路称为上行链路(uplink), 而控制器与执行器之间的通信链路称为下行链路(downlink). 因本文只关心网络化系统的镇定性问题, 不失一般性可考虑仅存在上行通信链路的网络控制系统, 如图2所示.

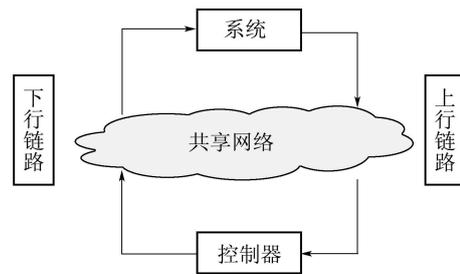


图 1 网络控制系统

Fig. 1 Networked control system

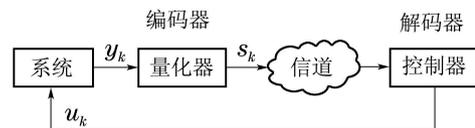


图 2 网络控制系统

Fig. 2 Networked control system

在图2中, 系统的模拟输出信号 y_k 经量化器(编码器)处理后, 生成信道输入信号 s_k . 信道另一端(解码器)根据信道输出信号估计系统的状态 \hat{x}_k , 估计误差为 $\tilde{x}_k := x_k - \hat{x}_k$. 假定 s_k 可以取 M_k 个不同的值, 那么该信道的数据率(渐近平均意义下)定义为

$$R := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \log_2 M_k \text{ bit/样本}. \quad (4)$$

记 $Q_k(\cdot)$ 为 k 时刻的量化器, $D_k(\cdot)$ 为 k 时刻解码器对状

态 x_k 的估计算法. 根据系统的因果性条件知

$$s_k = Q_k(y_0, \dots, y_k, s_0, \dots, s_{k-1}), \quad (5)$$

且

$$\hat{x}_k = D_k(s_0, \dots, s_k). \quad (6)$$

对于无噪信道, 信道的输入与输出信号是一致的. 量化反馈控制主要研究如何综合设计量化器、解码器和控制器来实现控制目标.

3.1 传统量化控制方法(Classical quantized control approach)

考虑无噪声的标量系统, 即系统(3)满足

$$w_k = v_k = 0 \text{ 和 } n = m = p = 1.$$

一种传统的量化控制方法是将量化误差 n_k 建模为一加性随机白噪声, 即

$$y_k^q = y_k + n_k, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

其中 n_k 为一随机白噪声, 且与 y_k 不相关. 噪声的方差为固定常数, 即 $E[n_k^2] = \sigma^2 > 0$.

该方法主要是根据均匀量化器的特点提出的, 但存在两个显著的缺陷. 首先, 量化器是关于量化输入信号的确定性函数. 对于无噪声系统, 闭环系统并不存在随机源. 但此方法在系统中人为地加入了随机项. 其次, 不管量化误差多小(即对任意小的 $\sigma^2 > 0$), 对开环不稳定的系统都不存在线性反馈使得闭环系统达到均方渐近稳定.

例如, 令 $A = a > 1, B = C = 1$. 对任意的线性反馈增益 f , 即 $u_k = fy_k^q$, 闭环系统的动态方程为

$$x_{k+1} = ax_k + f(x_k + n_k) = (a+f)x_k + fn_k. \quad (8)$$

由于 x_k 与 n_k 不相关, 那么

$$E[x_{k+1}^2] = (a+f)^2 E[x_k^2] + f^2 \sigma^2. \quad (9)$$

因 $a > 1$, 则 $f \neq 0$. 再根据式(9), 很显然

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[x_k^2] \neq 0.$$

因此, 不存在线性反馈使得闭环系统达到均方渐近稳定. 类似的结论可推广至一般线性系统(3), 这里不再赘述.

但对于 $|a| < 2$ 的情形, 文[8]设计了在该方法下的非线性反馈使得闭环系统达到均方渐近稳定.

另一种方法是将量化噪声建模为一乘性噪声, 即

$$y_k^q = (1 + n_k) \cdot y_k, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

其中 n_k 是与 y_k 不相关的随机白噪声, 且存在 $\delta > 0$ 使得 n_k 在区间 $[-\delta, \delta]$ 上服从均匀分布. 对于线性反馈增益 f , 闭环系统的动态方程为

$$x_{k+1} = (a + f + fn_k)x_k,$$

且

$$E[x_{k+1}^2] = ((a+f)^2 + f^2\delta^2/3) E[x_k^2],$$

则满足

$$(a+f)^2 + f^2\delta^2/3 < 1$$

的增益 f 才能镇定网络化线性系统. 因此, 只有当

$$\frac{\delta^2}{3}(1 - 4a^2) + 1 \geq 0$$

成立时才存在线性反馈使得闭环线性系统达到均方渐近稳定.

另外, 上述两种传统的量化控制方法均需要无穷比特率(即式(4)中 $R = \infty$)来表示量化器的输出. 由此可知, 传统量化控制方法存在一定的局限性.

3.2 基于信息理论的量化控制方法(Information-theoretic approach for quantized control)

传统的量化控制方法没有利用系统的动态特性, 不能准确刻画量化对控制系统的影响. 为此, 本文将结合信息与控制理论讨论基于信息理论的量化控制方法.

同样, 考虑无噪声的标量系统. 若控制器能准确获得系统的初始状态 x_0 , 根据系统的动态方程, 控制器也能准确获得其他任何时刻的系统状态信息. 故控制器对系统的不确定性本质上来源于系统的初始状态. 但通信是获得信息的有力手段. 直观上, 可设计合理的编码和解码策略, 使得基于量化反馈信号 s_k 和系统的动态特性控制器能逐步地获取 x_0 的准确信息. 但与通信理论的不同点在于还需考虑控制系统的时效性.

例如, 在 k 时刻有

$$x_k = a^k x_0 - a^k z_k, \quad (10)$$

其中 $z_k = -a^{-k} \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} u_j$ 看成控制器在 k 时刻对 x_0 的估计. 若估计误差 $n_k := x_0 - z_k$ 以大于 $|a|$ 的速率下降, 即存在 $\eta > |a|$ 和常数 $\alpha > 0$ 使得

$$|n_k| \leq \alpha \eta^k,$$

那么

$$|x_k| \leq \alpha \left(\frac{|a|}{\eta}\right)^k.$$

从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = 0$.

事实上, 控制器在 k 时刻至多收到从传感器发出的

$$\sum_{j=0}^k \log_2 M_j$$

比特信息. 根据信息理论知, 控制器在该时刻对初始状态 x_0 的最小估计误差与

$$\eta_k := 2^{-\sum_{j=0}^k \log_2 M_j}$$

相当, 即 $|n_k| = O(\eta_k)$. 由定义(4)知, 估计误差的渐近

平均下降速率为

$$2^{-\left(\sum_{j=0}^k \log_2 M_j\right)/k+1} \approx 2^{-R}.$$

故通过量化反馈镇定该线性系统, 通信数据率 R 必须满足

$$2^R > |a|, \text{ 即 } R > \log_2 |a|. \quad (11)$$

综上, 基于信息理论的量化控制方法利用了系统的动态特性和信息理论, 并严格刻画了镇定网络化线性系统所需的最低通信数据率. 与传统量化控制方法相比, 该方法对量化误差没有任何假设, 并取得了更深刻的结果.

4 无噪信道下的数据率定理(Data rate theorem over noiseless channels)

式(11)关于标量系统的结果可推广至向量系统(3). 但因系统存在外部扰动, 即 $w_k \neq 0$ 或 $v_k \neq 0$, 称基于量化反馈的控制系统可镇定, 若闭环系统的状态满足

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\|x_k\|^2] < \infty.$$

但随机向量 x_0 , w_k 和 v_k 需满足一定的条件, 具体参见文[9]. 该条件涵盖了 (w_k, v_k) 为高斯白噪声且 (w_k, v_k, x_0) 相互独立的情形. 有以下结果.

定理 1^[9] 在无噪信道环境下, 网络化线性系统(3)可镇定当且仅当

$$R > \sum_{i=1}^n \max\{0, \log_2 |\lambda_i|\}, \quad (12)$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为开环系统矩阵 A 的所有特征根.

控制器通过量化反馈信号来获取系统的状态信息, 从而减少对系统状态的不确定性. 与标量系统的情形相似, 控制器对系统状态的估计误差减少速率取决于 R 的大小, 而不等式(12)的右边反映了由系统本身动态特性引起的不确定性增长速率. 故要镇定该网络化系统, 系统的通信数据率必须严格大于对其不确定性的增长速率.

同时

$$H(A) := \sum_{i=1}^n \max\{0, \log_2 |\lambda_i|\}$$

称为系统的拓扑熵率. 根据不等式(12), 镇定线性系统所需的通信速率只取决于其拓扑熵率, 与量化器、解码器和控制器的具体形式无关. 这与著名的香农定理^[10]有异曲同工之妙.

注 1 若存在 $l > 0$ 使得

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \max\{\|x_0\|, \|w_k\|, \|v_k\|\} \leq l, \quad (13)$$

文[11–12]分别设计了有限比特数的均匀量化器和对数量化器来达到不等式(12)的下界, 即给定任意大于 $H(A)$ 的数据率 R , 可以设计数据率不超过 R 的量化反馈控制来镇定网络

化系统(3).

若不存在满足式(13)的 l , 如 x_0 为高斯随机向量, 通常需要设计自适应量化器^[9]来达到不等式(12)的下界.

4.1 充分性证明(Proof of sufficiency)

针对系统(3)的无噪声和 $\|x_0\|_\infty \leq l_0$ 的情形¹, 本文对充分性给出较为简单的证明. 事实上, 对任意给定的 $R > H(A)$, 只需要设计通信数据率不超过 R 的量化策略和相应的控制算法使得闭环控制系统达到渐近稳定.

因考虑无噪系统的情形, 且初始状态在给定的有界区域, 故可采用有限比特数的均匀量化器. 特别地, 若 $-1 \leq x < 1$, 那么 R 比特均匀量化器的输出可表示为

$$Q(x) = \frac{\lfloor 2^{R-1}x \rfloor + 0.5}{2^{R-1}},$$

且当 $x = 1$ 时,

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{2^R}.$$

容易验证, 若 $|x| \leq l$, 则

$$\left|x - lQ\left(\frac{x}{l}\right)\right| \leq \frac{l}{2^R}. \quad (14)$$

由线性代数知, 存在变换矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$PAP^{-1} = \text{diag}\{A_s, A_u\},$$

其中 A_s 的所有特征根都落在单位圆内而 A_u 的任意特征根都不在单位圆内. 易知, A_s 对应的状态变量在零输入的情况下将自行收敛到0. 故只需考虑 A_u 对应的状态变量. 不妨假定 A 的所有特征都不在单位圆内, 则 (A, B, C) 是可控和可观的. 故存在无偏差观测器(deadbeat observer)使得在 n 时刻以后, 传感器和量化器可获得系统的完整状态信息. 综上, 可以假定 A 的所有特征根都不在单位圆内且 $C = I$, 即状态反馈.

因系统不稳定极点决定了其对应的状态变量不确定性增长速率, 故将这些状态变量分离出来是有利的. 为此, 记 A 的所有不共轭特征根为 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. 即若 λ_i 为复根, 那么其共轭根 λ_i^* 并不包含在此列.

记特征根 λ_i 的代数重数为 m_i . 令

$$\mu_i = \begin{cases} m_i, & \text{若 } \lambda_i \text{ 为实根,} \\ 2m_i, & \text{若 } \lambda_i \text{ 为复根.} \end{cases}$$

不失一般性, 设 A 为实若当标准型矩阵^[13], 即

$$A = \text{diag}\{J_1, \dots, J_d\},$$

其中 $J_i \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_i}$ 为特征根 λ_i 对应的实若当块. 显然, J_i 的所有特征根的长度是一样的, 相应的状态变量的增长速率也是一样的. 有以下引理.

引理 1 存在常数 $\zeta > 0$ 使得对任意的自然数 q

¹此条件是为了表达简便, 可去掉.

∈ N, 满足

$$\|J_i^q\|_\infty \leq \zeta \sqrt{\mu_i} q^{\mu_i-1} |\lambda_i|^q. \quad (15)$$

证 参见文[12].

注2 由引理1知, 若当块 J_i 的增长速率被 $|\lambda_i|$ 控制. 特别地, 当 J_i 是对角矩阵, 那么 $\|J_i^q\|_\infty = |\lambda_i|^q$. 该结论对后续设计量化策略和分配数据率至关重要.

对任意满足

$$R > H(A) = \sum_{i=1}^d \mu_i \log_2 |\lambda_i|$$

的数据率 R , 存在正整数 α_i 和 β 使得

$$\log_2 |\lambda_i| < \frac{\alpha_i}{\beta} \text{ 且 } \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^d \mu_i \alpha_i \leq R. \quad (16)$$

根据若当矩阵 A 的结构, 记

$$x_k = [(x_k^{(1)})^T \cdots (x_k^{(d)})^T]^T.$$

分别设计数据率为 α_i/β 的 d 个均匀量化器, 并用来自量化 $x_k^{(i)}$ 中的每一个状态变量.

下面设计量化、解码和控制策略, 并证明闭环系统的渐近稳定性.

量化器: 由引理1和式(16)知, 存在整数 q 使得

$$\eta := \max_{i \in \{1, \dots, d\}} \frac{\zeta \sqrt{\mu_i} q^{\mu_i-1} |\lambda_i|^q}{2^{q\alpha_i/\beta}} < 1. \quad (17)$$

因状态估计 $\hat{x}_k = D_k(s_0, \dots, s_k)$, 故量化器和解码器均可得到相同的 \hat{x}_k , 详见解码器部分.

对任意 $i \in \{1, \dots, d\}$, 令 $l_0^{(i)} = l_0$ 且

$$l_{k+1}^{(i)} = \frac{l_k^{(i)}}{2^{q\alpha_i}} (\zeta \sqrt{\mu_i} q^{\mu_i-1} |\lambda_i|^q)^\beta. \quad (18)$$

由式(17)–(18)知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k^{(i)} \leq l_0 \lim_{k \rightarrow \infty} \eta^{\beta k} = 0. \quad (19)$$

令 $\tau = q\beta$ 和 $\tilde{x}_{k\tau} = x_{k\tau} - \hat{x}_{k\tau}$, 考虑时间段

$$\{k\tau, \dots, (k+1)\tau - 1\},$$

即每个时间段的长度为 τ . 在每个时间段的开始时刻, 用 $q\alpha_i$ 比特的均匀量化器来量化 $\tilde{x}_{k\tau} l_k^{(i)}$ 的每一个分量, 并得到量化输出向量 $s_k \in \mathbb{R}^n$. 那么, 该协议的通信数据率为

$$\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^d (q\alpha_i) \mu_i = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^d \alpha_i \mu_i. \quad (20)$$

由式(16)知, 数据率不超过 R .

解码器: 根据信道输出信号 s_k , 解码器利用以下算法对状态 x_k 进行估计.

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= 0, \quad L_0 = \text{diag}\{l_0^{(1)} I_{\mu_1}, \dots, l_0^{(d)} I_{\mu_d}\}, \\ \hat{x}_{k\tau+j} &= A \hat{x}_{k\tau+(j-1)} + B u_{k\tau+(j-1)}, \quad 1 \leq j \leq \tau - 1, \\ L_k &= \text{diag}\{l_k^{(1)} I_{\mu_1}, \dots, l_k^{(d)} I_{\mu_d}\}, \\ \hat{x}_{(k+1)\tau} & \end{aligned}$$

$$A^\tau (\hat{x}_{k\tau} + L_k s_k) + \sum_{j=k\tau}^{(k+1)\tau-1} A^{(k+1)\tau-j-1} B u_j,$$

其中 $I_{\mu_i} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_i}$ 是单位矩阵.

控制器: 因 (A, B) 是可控的, 存在增益矩阵 K 使得闭环系统矩阵 $A + BK$ 的特征根均落在单位圆内. 令

$$u_k = K \hat{x}_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

注3 基于信息理论的量化控制方法只需采用线性反馈即可镇定网络化系统(3).

渐近稳定性: 用归纳法验证

$$\|\tilde{x}_{k\tau}^{(i)}\|_\infty \leq l_k^{(i)}.$$

显然, 当 $k = 0$ 时, 上式成立.

假定对 $t \leq k$ 都有 $\|\tilde{x}_{t\tau}^{(i)}\|_\infty \leq l_t^{(i)}$. 由解码器的估计算法知

$$\hat{x}_{(k+1)\tau} = A^\tau (\tilde{x}_{k\tau} - L_k s_k). \quad (21)$$

又根据式(14)知

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_{(k+1)\tau}^{(i)}\|_\infty &\leq \|J_i^\tau\|_\infty \|\tilde{x}_{k\tau}^{(i)} - l_k^{(i)} s_k^{(i)}\|_\infty \leq \\ &\frac{\|J_i^\tau\|_\infty}{2^{q\alpha_i}} l_k^{(i)}. \end{aligned} \quad (22)$$

综合引理1和式(18)知 $\|\tilde{x}_{(k+1)\tau}^{(i)}\|_\infty \leq l_{k+1}^{(i)}$. 因此,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_{k\tau}\|_\infty \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{i \in \{1, \dots, d\}} l_k^{(i)} = 0.$$

对任意 $j \in \{1, \dots, \tau - 1\}$, 有 $\tilde{x}_{k\tau+j} = A^j \tilde{x}_{k\tau}$. 进一步知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_k\|_\infty = 0$. 闭环系统方程为

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k - BK \tilde{x}_k.$$

因闭环系统矩阵 $A + KB$ 的所有特征根在单位圆内, 根据Toplietz引理^[14]知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_\infty = 0.$$

5 有噪信道下的数据率定理(Data rate theorem over noisy channels)

在无线网络环境下, 信道通常存在多种不确定性因素, 如输入信号 s_k 可能因信道拥塞和/或衰减而随机地丢失. 也就是说, 不能保证信道接收端一定能收到 s_k , 进一步加大信息损失. 可以想象, 要镇定同一个系统, 有噪信道情况下需要更大的通信数据率来弥补信道不确定性引起的信息损失.

为此, 通信理论中的两种常见的信道引起了研究者的广泛兴趣, 即Erasure信道和Gilbert-Elliott信道^[10].

5.1 Erasure信道情形(Erasure channels)

对于Erasure信道, s_k 存在随机丢包, 其丢包过程 γ_k 服从一独立同分布的伯努利过程, 并有以下结果:

定理2^[15] 在Erasure信道环境下, 网络化线性标量系统(3)(即 $A = a$)可镇定当且仅当

$$\mathbb{E}\left[\frac{|a|^2}{2^{2R\gamma_k}}\right] < 1. \quad (23)$$

以无噪信道的情况类似, 系统的动态特性使得均方状态变量在每步增长 $|a|^2$ 倍. 若不存在丢包, 即 $\gamma_k = 1$, 那么此刻控制器收到信号 s_k , 对该状态变量的不确定性减少 $\frac{1}{2^{2R}}$ 倍; 若存在丢包, 即 $\gamma_k = 0$, 那么控制器没有收到信号 s_k , 故不能降低其对系统状态的不确定性. 控制器要能镇定该系统, 在平均意义下的不确定性降低速率必须大于增长速率, 即不等式(23)成立.

注4 对于有界噪声的系统, 即满足式(13), 文[16]设计了均匀量化器来证明定理2的充分性. 文[17]将结果推广到单输入的向量系统. 对于满足一定条件的随机无界噪声的情形, 文[15]建立了定理2.

5.2 Gilbert-Elliott信道情形(Gilbert-Elliott channels)

对于Gilbert-Elliott信道, s_k 的丢包过程 γ_k 服从一遍历马尔科夫过程^[18]. 因 γ_k 存在时间上的相关性, 上述方法不再适用. 为克服此困难, 文[19]采用了一套随机过采样理论的方法.

不失一般性, 令 $\gamma_0 = 1$ 和 $t_0 = 0$. 定义随机过采样时间点 $\{t_k\}$ 为控制器收到信道输入信号的所有时刻, 即 t_k 满足条件

$$t_{k+1} = \inf\{j > t_k | \gamma_j = 1\}. \quad (24)$$

令逗留时间 $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, 根据马尔科夫过程的性质易知 $\{\tau_k\}$ 是一独立同分布过程.

定理3^[19] 在Gilbert-Elliott信道环境下, 网络化线性标量系统(3)(即 $A = a$)可镇定当且仅当

$$\mathbb{E}\left[\frac{|a|^{2\tau_k}}{2^{2R}}\right] < 1. \quad (25)$$

直观上, 在 τ_k 长的时间段内, 系统的动态特性使得均方状态的不确定性增长为 $|a|^{2\tau_k}$. 但在该时间段内, 控制器收到一次信道输入信号, 其对状态的不确定性减少 $1/2^{2R}$ 倍. 控制器要能镇定该系统, 在平均意义下的不确定性降低速率必须大于增长速率, 即不等式(25)成立.

下面简略地说明定理3的主要证明思想, 详见文[19].

必要性. 通过信息论的条件熵功率(conditional entropy power)^[10], 可以找到 $\mathbb{E}[x_k^2]$ 的下界 $\mathbb{E}[\xi_k]$, 即 $\mathbb{E}[x_k^2] \geq \mathbb{E}[\xi_k]$. 同时, 存在常数 $\mu > 0$ 满足

$$\xi_{k+1} = \frac{|a|^2}{2^{2R\gamma_k}} \xi_k + \mu.$$

再基于马尔科夫线性跳变系统理论^[20], 必要性容易得证.

充分性. 主要有以下难点.

a) γ_k 在时间上的相关性;

注意到, $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\|x_k\|^2] < \infty$ 当且仅当 $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\|x_{t_k}\|^2] < \infty$ ^[21]. 由系统动态特性知

$$x_{t_k} = a^{\tau_k} x_{t_{k-1}} + p_k, \quad (26)$$

这里 p_k 是控制输入 u_k 和扰动 w_k 的线性组合. 故只需分析由独立同分布过程 $\{\tau_k\}$ 驱动的随机过采样系统(26)的可镇定性. 但因 τ_k 是独立同分布过程, 其稳定性分析相对简单.

b) 系统的随机噪声 w_k 和 v_k 无界, 即式(13)不成立;

常用的均匀量化器不再适用, 这里可采用文[15]的自适应量化器.

c) 信道输入信号随机丢失.

对时间轴进行分段, 即第 $k+1$ 个时间段为

$$\{t_{kq}, \dots, t_{(k+1)q} - 1\},$$

其中 q 为待定整数. 由 t_k 的定义知, 在每个时间段内控制器共收到 q 个数据包. 故可设计 qR 比特的量化器来量化状态 $x_{t_{kq}}$. 基于此思想, 可以得到不等式迭代

$$\mathbb{E}[x_{t_{(k+1)q}}^2] \leq c_0 (\mathbb{E}[\frac{|a|^{2\tau_1}}{2^{2R}}])^q \mathbb{E}[x_{t_{kq}}^2] + c_1, \quad (27)$$

其中 c_0 和 c_1 均为正的常数. 取充分大的 q 使得

$$c_0 (\mathbb{E}[\frac{|a|^{2\tau_1}}{2^{2R}}])^q < 1,$$

故 $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[x_{t_{kq}}^2] < \infty$. 又因为 $q < \infty$, 则 $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[x_{t_k}^2] < \infty$.

进一步由a)部分结果知

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[x_k^2] < \infty.$$

6 结束语(Conclusions)

本文指出了传统量化控制方法的局限性, 从而迫切需要发展更深刻的方法与技术. 基于信息理论的量化控制方法能较完整地解决网络化线性系统的可镇定性问题. 值得一提的是文中所设计的量化和控制策略并不能保证闭环系统的控制性能, 如瞬态响应等. 事实上, 量化反馈的性能控制需要进一步的深入研究.

若系统存在参数不确定性, 上述分析方法也将失效. 同时, 本文的结论只适用于单个回路的反馈系统, 对于具有相互影响的多回路大规模系统的最低数据率问题, 因其状态变化异常复杂, 至今仍未取得较大进展. 文[22]对此进行了研究, 并给出具有耦合关系的多回路系统达到同步的充分数据率条件. 但其保守性依然未知, 有待进一步深入研究.

参考文献(References):

- [1] NYQUIST H. Regeneration theory [J] *Bell System Technical Journal*, 1932, 11(3): 126 - 147.
- [2] FRANKLIN G, POWELL J, EMAMI-NAEINI A, et al. *Feedback Control of Dynamic Systems* [M]. Reading, MA: Addison-Wesley,

- 1994, vol. 2.
- [3] MURRAY R, ASTROM K, BOYD S, et al. Future directions in control in an information-rich world [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2003, 23(2): 20 – 33.
- [4] KYOUNG-DAE K, KUMAR P R. Cyber-physical systems: a perspective at the centennial [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2012, 100: 1287 – 1308.
- [5] 游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述 [J]. 自动化学报, 2013, 39(2): 101 – 118.
(YOU Keyou, XIE LiHua. Survey of recent progress in networked control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(2): 101 – 118.)
- [6] GERSHO A, GRAY R. *Vector Quantization and Signal Compression* [M]. MA, USA: Kluwer Academic Publishers Norwell, 1991.
- [7] ELIA N, MITTER S. Stabilization of linear systems with limited information [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001: 46(9): 1384 – 1400.
- [8] DELCHAMPS D. Stabilizing a linear system with quantized state feedback [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(8): 916 – 924.
- [9] NAIR G, EVANS R. Stabilizability of stochastic linear systems with finite feedback data rates [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2004, 43(2) 413 – 436.
- [10] COVER T, THOMAS J. *Elements of Information Theory* [M]. New Jersey, USA: Wiley-Interscience, 2006.
- [11] TATIKONDA S, MITTER S. Control under communication constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1056 – 1068.
- [12] YOU K, SU W, FU M, et al. Attainability of the minimum data rate for stabilization of linear systems via logarithmic quantization [J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 170 – 176.
- [13] HORN R, JOHNSON C. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985.
- [14] ASH R, DOLÉANS-DADE C. *Probability and Measure Theory* [M]. California, USA: Academic Press, 2000.
- [15] MINERO P, FRANCESCHETTI M, DEY S, et al. Data rate theorem for stabilization over time-varying feedback channels [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 243 – 255.
- [16] MARTINS N, DAHLEH M, ELIA N. Feedback stabilization of uncertain systems in the presence of a direct link [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 438 – 447.
- [17] YOU K, XIE L. Minimum data rate for mean square stabilization of discrete LTI systems over lossy channels [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2373 – 2378.
- [18] MEYN S, TWEEDIE R, HIBEY J. *Markov Chains and Stochastic Stability* [M]. London: Springer-Verlag, 1996.
- [19] YOU K, XIE L. Minimum data rate for mean square stabilizability of linear systems with Markovian packet losses [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 772 – 785.
- [20] COSTA O, FRAGOSO M, MARQUES R. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems* [M]. London: Springer, 2005.
- [21] YOU K, FU M, XIE L. Mean square stability for Kalman filtering with markovian packet losses [J]. *Automatica*, 2011, 47(12): 2647 – 2657.
- [22] YOU K, XIE L. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(10): 2262 – 2275.

作者简介:

游科友 (1985–), 男, 第16届(2010年)《关肇直奖》获奖论文作者, 清华大学自动化系讲师, 2013年入选第5批国家“青年千人计划”。研究方向为网络化系统的控制与估计、分布式算法和传感器网络, E-mail: youky@tsinghua.edu.cn.

谢立华 (1964–), 男, 新加坡南洋理工大学电气与电子工程学院教授, IEEE Fellow和IFAC Fellow, 研究方向为鲁棒控制、传感器网络、网络控制系统, 估计理论和信号处理. E-mail: elhxie@ntu.edu.sg.